

geodetiche : 1^a definizione

Lezione X

Def. geodetiche $\equiv$ curve auto parallele, ovvero
tali che il loro vettore velocità sia parallelo se
di loro

Possiamo $(v^j) = (\dot{x}^j)$ nell'equazione
precedente, si ha ..

$$\ddot{x}^r + \dot{x}^i \dot{x}^j \Gamma_{ij}^r = 0$$

equazione delle
geodetiche

$r = 1, 2$

★ Le geodetiche sono curve parametriche
(l'equazione delle geodetiche non è invariante
per cambiamento di parametro)



★ geodetiche : 2^a definizione

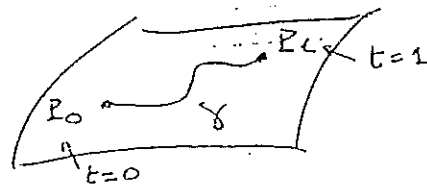
L'equazione delle geodetiche può derivare a
partire da due principi variazionali

$$L_1 = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j$$

lagrangiana : energia cinetica
di una particella
 $g_{ij} = g_{ij}(x, v)$ di massa $m=1$. Che si
muove liberamente su Σ

(in generale $L = T - V$
cinetica potenziale)

$$L_1 = L_1(\dot{q}^i, \dot{q}^i)$$



★ azione

$$S(\gamma) := \int_0^1 \frac{1}{2} g_{ij} \dot{x}^i \dot{x}^j dt$$

Fatto $\star$ Le equazioni delle geodetiche

sono le equazioni di Eulero-Lagrange ottenute da S tramite il principio di azione stazionaria

[Ricordiamo $\delta S = 0$, $S = \int_0^1 L(q, \dot{q}) dt$

$\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial q^j} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}$ Eulero-Lagrange

II. $p_i = g_{ij} \dot{q}^j$

$f_i = p_i$ Eq. di Newton

(se $L = T - V$ $\frac{\partial L}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$)]
 $T(\dot{q})$

Sia ora $L_2 = \sqrt{2} L_1^{\frac{1}{2}}$ S = lunghezza ($\vec{x}$ indep dal parametro)

si trova

$$\frac{d}{dt} \frac{g_{kj} \dot{q}^j}{\sqrt{g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j}} = \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{q}^i \dot{q}^j}{2 \sqrt{g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j}}$$

Se $t \propto S$ (assisa curvilinea), ovvero $\sqrt{g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j} = \text{cost}$

Si ha $\left[\frac{d}{dt} \underbrace{g_{kj} \dot{q}^j}_{p_k} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \dot{q}^i \dot{q}^j \right]$

... cioè la stessa eq. di prima, come si verifica con qualche calcolo, nonché l'eq. di autoparallelismo (eq. geodetica)

★ eq. delle geodetiche $\equiv$ Eulero-Lagrange dimostrazione

$$L = \frac{1}{2} g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j$$

$i, j = 1, 2, \dots, n$
vale per una geometria
metrica Riemanniana

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^k} &= \frac{1}{2} g_{ij} \frac{\partial \dot{u}^i}{\partial \dot{u}^k} \dot{u}^j + \frac{1}{2} g_{ij} \dot{u}^i \frac{\partial \dot{u}^j}{\partial \dot{u}^k} \\ &= \frac{1}{2} g_{ij} \delta_{ik} \dot{u}^j + \frac{1}{2} g_{ij} \delta_{jk} \dot{u}^i \\ &= \frac{1}{2} g_{kj} \dot{u}^j + \frac{1}{2} g_{ik} \dot{u}^i \\ &= g_{kj} \dot{u}^j \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^k} \right) = \frac{d}{dt} (g_{kj} \dot{u}^j) = \frac{d}{dt} (g_{kj}) \dot{u}^j + g_{kj} \ddot{u}^j$$

$$= g_{kj} \ddot{u}^j + \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} \dot{u}^i \dot{u}^j$$

$$\frac{\partial L}{\partial u^k} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \dot{u}^i \dot{u}^j$$

$$g_{kj} \ddot{u}^j + \left(\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right) \dot{u}^i \dot{u}^j = 0$$

X-2'

mult. per g^{km}

$$g^{km} g_{jk} = g^{mk} g_{kj} = \delta_j^m$$

$$\ddot{u}^m + g^{km} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right) \dot{u}^i \dot{u}^j = 0$$

★ ora $g^{km} \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} \dot{u}^i \dot{u}^j =$

cruciale!

$$= \frac{1}{2} \dot{u}^i \dot{u}^j g^{km} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} \right)$$

$\Rightarrow$

$$\ddot{u}^m + \underbrace{\frac{1}{2} g^{km} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \right)}_{\Gamma_{ij}^m} \dot{u}^i \dot{u}^j = 0$$

$$\boxed{\ddot{u}^m + \Gamma_{ij}^m \dot{u}^i \dot{u}^j = 0}$$

$m=1 \dots n$

Q.E.D.

X-2''

$$\text{Se } L = \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}^k} = \frac{\partial L}{\partial u^k}$$

diventa

$$\frac{d}{dt} \frac{g_{kj} \dot{u}^j}{\sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}} = \frac{\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \dot{u}^i \dot{u}^j}{2 \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j}}$$

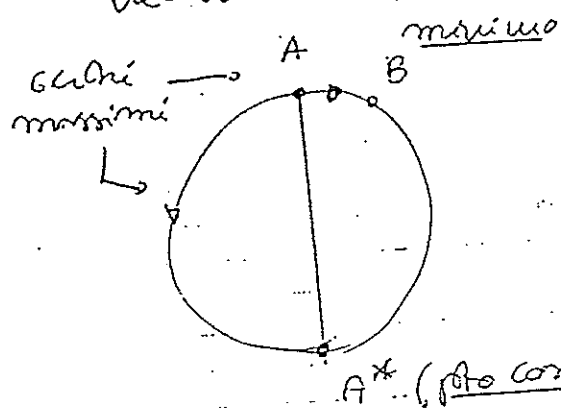
$$\text{Se } t = \alpha \cdot s \quad \text{l. d'arco} \quad \sqrt{g_{ij} \dot{u}^i \dot{u}^j} \equiv \text{cost}$$

$\Rightarrow$ l'eq. diventa

$$\frac{d}{dt} (g_{kj} \dot{u}^j) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} \dot{u}^i \dot{u}^j$$

=> "Le geodetiche, parametrizzate con un parametro naturale sono cammini critici del funzionale lunghezza"

[★ Attenzione! una geodetica non realizza necessariamente un cammino di lunghezza minima

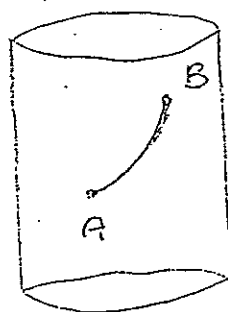
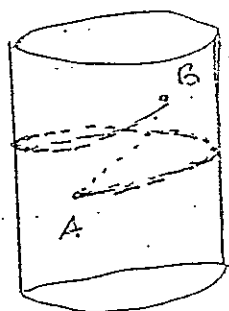


$\widehat{AB}$ minimo

$\widehat{AA^*B}$ non è minimo.

A^* (pto conjugato)

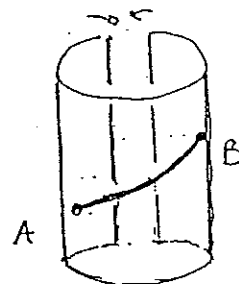
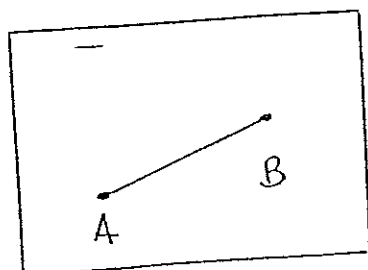
Altro esempio



minimo

cilindro: geodetiche = eliciche ...]
(vedi figura ...)

[... si confronta ciò col principio di Maupertuis ...
 $S = \int \sqrt{E - V(x)} ds \dots$



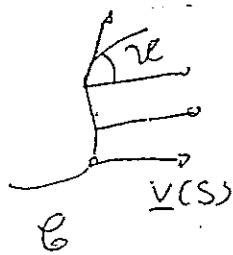
★ geodetiche. 3^a definizione
(approccio "estricco")

Problema: Definire una quantità per curve su Σ in E . In termini la definizione della geodeticità

Soluzione Proiettore $\mathcal{P}$ sul piano tangente a Σ in E e considera la corrispondente curva piana $\mathcal{C}'$: si definisce curvatura geodetica $\kappa_g(E)$ la curvatura di $\mathcal{C}'$ in E .

★ geodetiche $\equiv (\kappa_g \equiv 0)$

Procediamo in questo modo:



sia $\mathcal{C}$ descritta da s . $\underline{r} = \underline{r}(s)$
sia $\underline{v}(s)$ parallelo, e $\|\underline{v}\| = 1$

★ $\cos \varphi = \langle \underline{v} | \underline{r}' \rangle$ ($\|\underline{r}'\| = 1$)

definiamo:

$$\boxed{\kappa_g := \frac{d\varphi}{ds}}$$

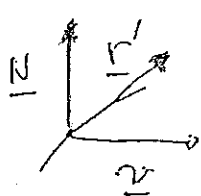


nel piano
 $\kappa = \frac{d\varphi}{ds}$
direzione fissa

Deriviamo ★: $-\varphi' \sin \varphi = \langle \underline{v}' | \underline{r}' \rangle + \langle \underline{v} | \underline{r}'' \rangle$

si ponga $\sin \varphi = +1$ in un dato punto. per definizione di vett. parallelo
(κ_g non dipende dal vettore...)

$\frac{d\varphi}{ds} = -\varphi' = \langle \underline{r}'' | \underline{v} \rangle \Rightarrow \underline{v} = \underline{r}' \times \underline{N}$



$\Rightarrow \kappa_g = -\langle \underline{v}, \underline{r}'' \rangle =$

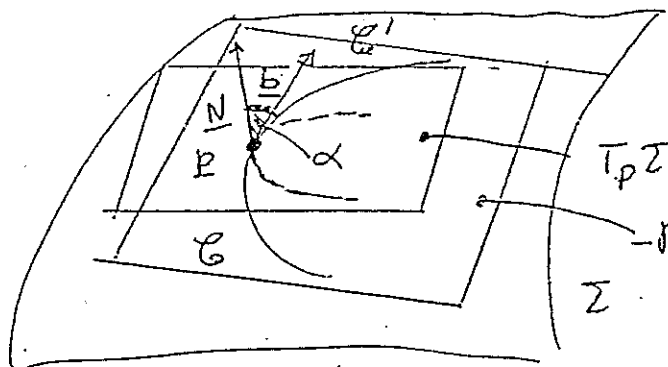
$= -\langle \underline{r}' \times \underline{N}, \underline{r}'' \rangle = \langle \underline{r}', \underline{r}'' \times \underline{N} \rangle$
 $\underline{r}' \in \underline{R}_m$

$$\Rightarrow R_g = \langle \underbrace{N}_{\parallel \frac{b}{\|b\|}} | \underbrace{t \times n}_{\parallel \frac{b}{\|b\|}} \rangle R \equiv \cos \alpha R$$

$\Rightarrow$ curve autoparallele

$$\equiv K_g = 0, \dots$$

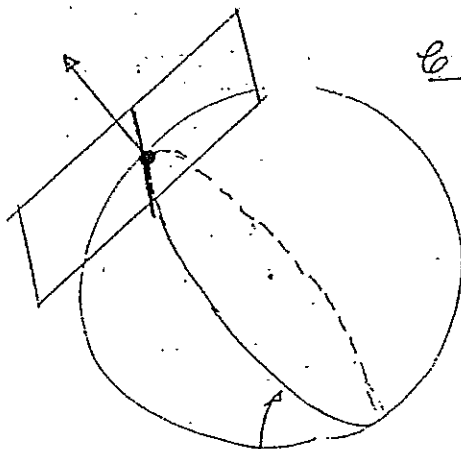
reappra l'intervista
originaria...



- piano osculatore di C in P

C' è una retta...

ex:



cerchio massimo

sia una superficie
di rotazione:

i meridiani sono
geodetiche



Osservazione

$$R^2 \stackrel{Z}{=} R_m + R_g$$

$$\text{se } R = R_m \text{ è}$$

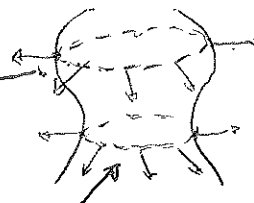
$$R_g = 0$$

i paralleli, in
generale no
ma v. altre

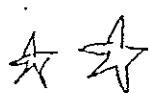
= 7



questi paralleli
costituiscono
geodetiche



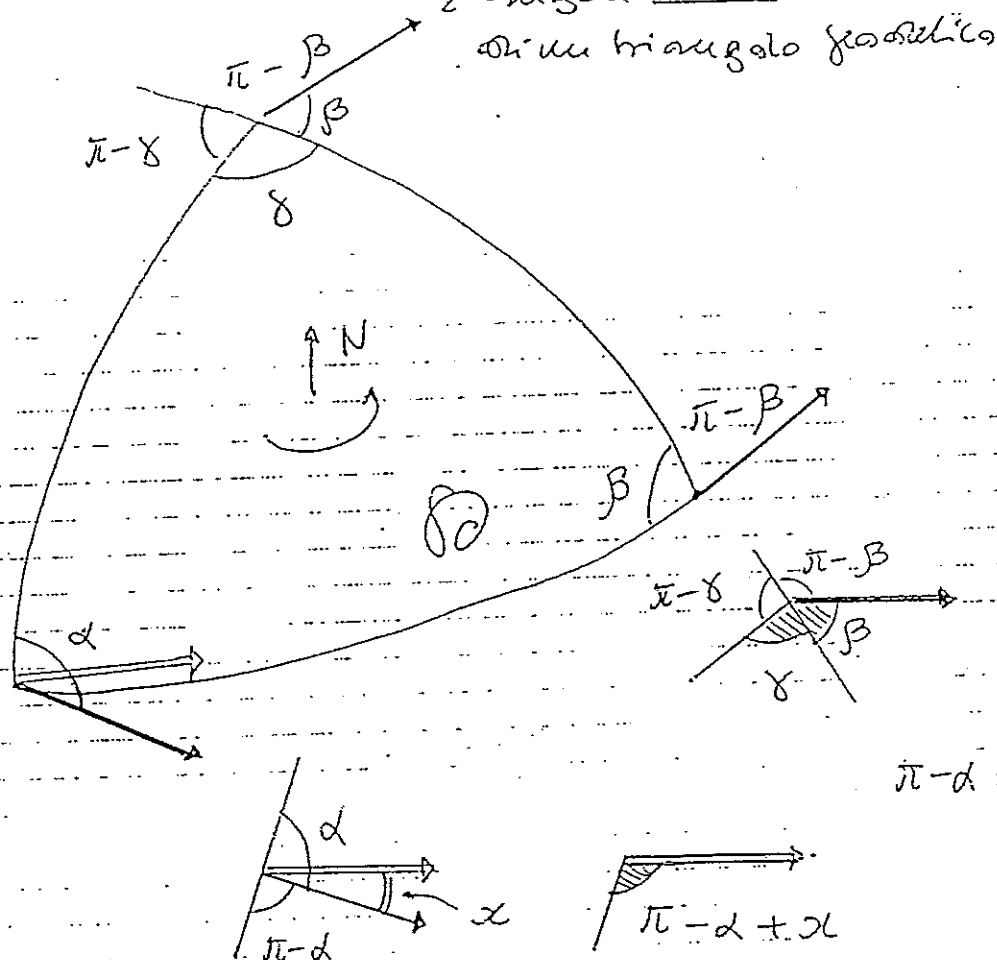
X-5



Formula di Gauss (- Bonnet)
(per i triangoli geodetici)

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \iint_{\mathcal{D}} K \, d\sigma$$

2 angoli esterni
di un triangolo geodetico



$$\pi - \alpha + \alpha = \gamma + \beta$$

Dimostrazione Si ottiene dalla formula di Gauss... si ricorda che i triangoli sono geodetici e che il trasporto parallelo conserva gli angoli.

$$\alpha = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

||

$$\iint_{\mathcal{D}} K \, d\sigma$$



Applicandola ad una

sfera, si trova la formula

di L'Huilier, Girard, Legendre
($K = \frac{1}{R^2}$)

Area di un triangolo sferico
(geodetico: i lati sono tratti di cerchi
massimi)

★ angolo sferico (Gauss)

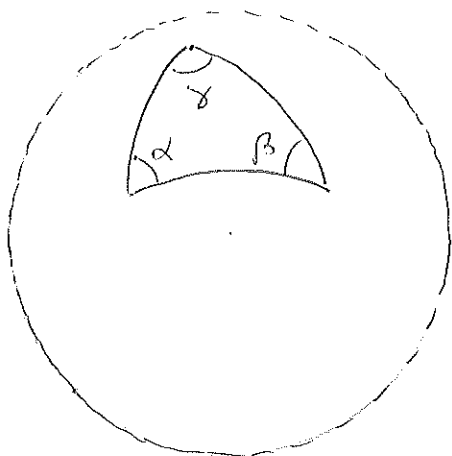
$$A = \alpha + \beta + \gamma - \pi (> 0)$$

... geometria non euclidea

X-6

!!

Applicazione : geometrie non euclidee ***



$$\alpha + \beta + \gamma > \pi$$

* la somma degli angoli di un triangolo (geodetico) supera π

triangolo geodetico

cerchi massimi (modulo identif.

dei poli opposti) $\equiv$ rette

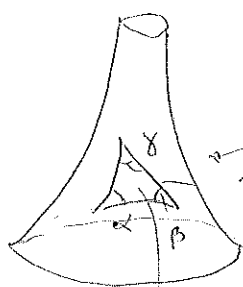
*** $\mathbb{R}P^2$

primo proiettivo reale : modello del piano
ellittico

non vi sono "rette" parallele !!
due cerchi massimi si incontrano
sempre.

*** piano di Lobachevski (ipربولico) : modello locale :
pseudosfera di Beltrami

$$K = -1$$



triangolo geodetico

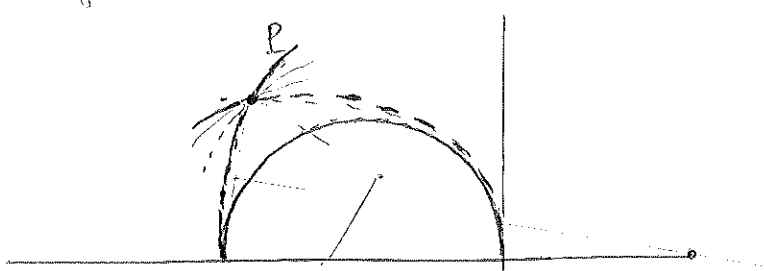
$$\alpha + \beta + \gamma < \pi$$

$$\alpha + \beta + \gamma - \pi = -A(\tilde{\gamma})$$

area

non vi sono
triangoli simili
che non siano
congruenti

infinita parallele per un punto esterno ad una "retta" (i.e.
geodetica) data



v. oltre per il calcolo delle
geodetiche

★ ★ Teorema di Gauss - Bonnet

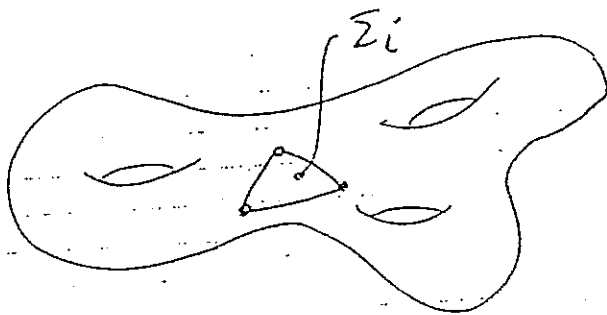
Σ sup. (LSDA), compatta, senza bordo

(Σ, g)
metrica
riemanniana...

$$\iint_{\Sigma} K d\sigma = 2\pi \chi(\Sigma) \quad (= 2 - 2g)$$

caratteristica
di Eulero-Poincaré

$g = \#$
"buchi"



g : genere di Σ
($g = 3 \dots$)

$\chi(\Sigma) = n_0 - n_1 + n_2$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$
 $\#$ vertici $\#$ lati $\#$ triangoli (geodetici)

invariante topologico di una triangolazione di Σ

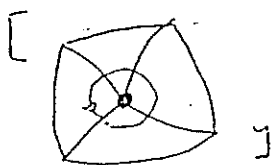
! sarebbe da dimostrare

Dimostrazione Si deduce dalla formula precedente

$$\iint_{\Sigma} K d\sigma = \sum_{i=1}^{n_2} \iint_{\Sigma_i} K d\sigma = \sum_{i=1}^{n_2} (\alpha_i + \beta_i + \gamma_i - \pi) =$$

triangoli...

$$= 2\pi n_0 - \pi n_2 = 2\pi \left(n_0 - \frac{n_2}{2} \right)$$



Ora $n_1 = \frac{3n_2}{2} \Rightarrow \chi(\Sigma) =$

$$= n_0 - \frac{3n_2}{2} + n_2$$

$\Rightarrow$ segue l'asserto $\square$ $= n_0 - \frac{n_2}{2}$

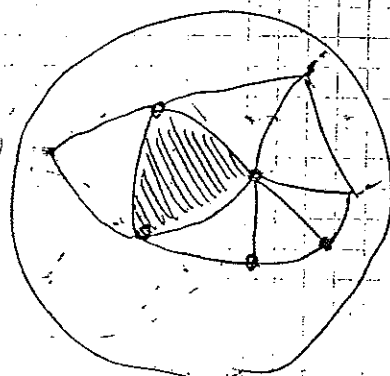
★ Curiosità

★ La "Dimostrazione" di Cauchy

$$V - E + F = 2$$

vertici spigoli facce

(per la sfera, o superficie omomorfa a questa)
per una qualsiasi triangolazione.



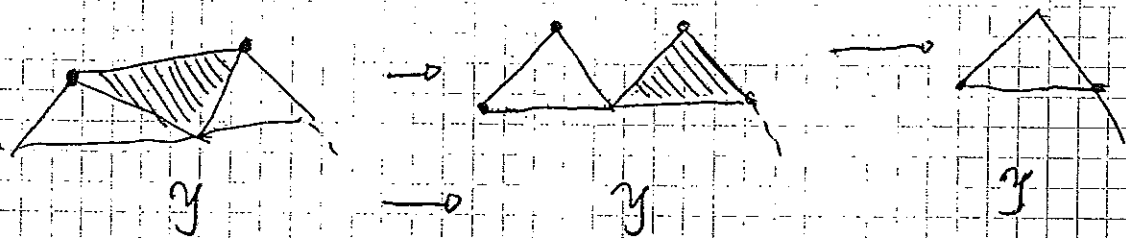
Sia $V - E + F = x$

Diminuendo un triangolo, tale somma

diviene $y = x - 1$. Proviamo che $y = 1$

"strutturiamo" la superficie così ottenuta

sul di un piano, e togliamo ad uno ad uno i triangoli "partendo dall'esterno"



Ci si comincia finalmente dal fatto che

y non cambia. Si arriva all'ultimo

triangolo, per il quale $y = 1$ $\square$

(Ma la faccenda è un po' più complicata...)

Si veda I. La Rosa

"Dimostrazioni e Computazioni"
Fabbricelli

★ Determinazione delle geodetiche

★ Sfora : cerchi massimi (chiara dalla def. tramite $Rg = 0$).

$$(r, \varphi) \quad ds^2 = dr^2 + \sin^2 r d\varphi^2$$

$\uparrow \quad \nwarrow$
 coordinate longitudinali coordinate
 $\parallel \quad \parallel$
 $x^1 \quad x^2$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 r \end{pmatrix}$$

$$(g^{ij}) = \frac{1}{\sin^2 r} \begin{pmatrix} \sin^2 r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 r} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \sin 2r$$

$$\Gamma_{12}^2 = \cotan r$$

(gli altri sono nulli...) . Si ha , per le geodetiche

$$\begin{cases} r'' - \frac{1}{2} (\varphi')^2 \sin 2r = 0 \\ \varphi'' + \varphi' r' \cotan r = 0 \end{cases}$$

Si calcoli $K = \dots + 1$

$\varphi = \text{cost}$ $r = s$ (meridiano) è certamente geodetica, prendendo come parametro la lunghezza d'arco) . Per simmetria, tutti i cerchi massimi sono geodetiche, e una geodetica qualsiasi, essendo la sua direzione iniziale tangente ad un cerchio massimo, è necessariamente un cerchio massimo.

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j \quad \text{metrica}$$

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{ih} (g_{kh,i} + g_{h,i,k} - g_{ik,h})$$

$\uparrow$
 simboli di Christoffel
 matrice inversa di (g_{ij})

$\frac{\partial g_{kh}}{\partial x^i}$ etc...
 ★ -geodetiche

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{kh}^i \dot{x}^k \dot{x}^h = 0$$

$i = 1, \dots, n$

tali formule hanno val di tri
generale ; si usa la
 convenzione di Einstein :
 somma su indici ripetuti

4 variante, trovare le equazioni di Lagrange

[si usa il calcolo dei simboli di Christoffel]

$$g = dr^2 + \sin^2 r d\varphi^2$$

$$T = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + \sin^2 r \dot{\varphi}^2) \equiv L$$

"energia
cinetica"

Nota: se $t = s$
 $\dot{r}^2 + \sin^2 r \dot{\varphi}^2 = a = \cos r$
 $\dot{r}^2 + \frac{c^2}{\sin^2 r} = a \quad (\text{pu} (**))$
 e derivando, otteniamo $a(**)$, e
 integrare l'equazione

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \sin r \cos r \dot{\varphi}^2$$

∂r

$$\Rightarrow \ddot{r} = \sin r \cos r \dot{\varphi}^2 \quad (*)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{d}{dt} (\dot{r}) = \ddot{r}$$

↓ fatto cruciale

$$\text{ma } \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{cost.}$$

$$(**) \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \sin^2 r \dot{\varphi} = c \quad (\text{costante}) \quad r \notin \{0, \pi\} \dots$$

$$\text{ovvero, se } c=0 \quad \dot{\varphi} = 0, \quad \varphi = \text{cost} \quad (\text{minimale})$$

e concludo come prima, per ragioni di simmetria

[sostituendo in (*), che di fatto non serve, i

$$\ddot{r} = \sin r \cos r \frac{c^2}{\sin^4 r} = \frac{\cos r c^2}{\sin^3 r} \dots]$$

* Piano (perbolico) (Lobachevski)

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2} \quad y > 0$$

$$(g_{ij}) = \frac{1}{y^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (g^{ij}) = y^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{y} \quad \Gamma_{11}^2 = +\frac{1}{y} \quad \Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}$$

si ha:

$$(*) \quad \begin{cases} \ddot{x} = 2 \frac{\dot{x} \dot{y}}{y} & \ddot{x} + \Gamma_{12}^1 \dot{x} \dot{y} + \Gamma_{21}^1 \dot{x} \dot{y} = 0 \\ \ddot{y} = \frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y} & \ddot{y} + \Gamma_{11}^2 \dot{x}^2 + \Gamma_{22}^2 \dot{y}^2 = 0 \end{cases} \quad \circ = \frac{d}{dt}$$

ora

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\underbrace{\frac{dy}{dt}}_{\dot{y}} \frac{dt}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) =$$

$$= \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \cdot \underbrace{\frac{dt}{dx}}_{\frac{1}{\dot{x}}} = \frac{\ddot{y} \dot{x} - \dot{y} \ddot{x}}{\dot{x}^3} = (da (*)) /$$

$$= \frac{\frac{\dot{y}^2 - \dot{x}^2}{y} \dot{x} - \dot{y} \frac{2\dot{x}\dot{y}}{y}}{\dot{x}^3} = \frac{1}{y} \frac{\dot{y}^2 \dot{x} - \dot{x}^3 - 2\dot{y}^2 \dot{x}}{\dot{x}^3}$$

$$= \frac{1}{y} \left(\frac{-\dot{y}^2 \dot{x} - \dot{x}^3}{\dot{x}^3} \right) = -\frac{1}{y} \left(\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)^2 + 1 \right) = -\frac{1}{y} (y'^2 + 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

Donc que

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = -\frac{1}{y} (y'^2 + 1) \Rightarrow$$

$$y y'' + y'^2 = -1 \Rightarrow$$

$$(y y')' = -1 \Rightarrow y y' = -x + A \quad (\diamond)$$

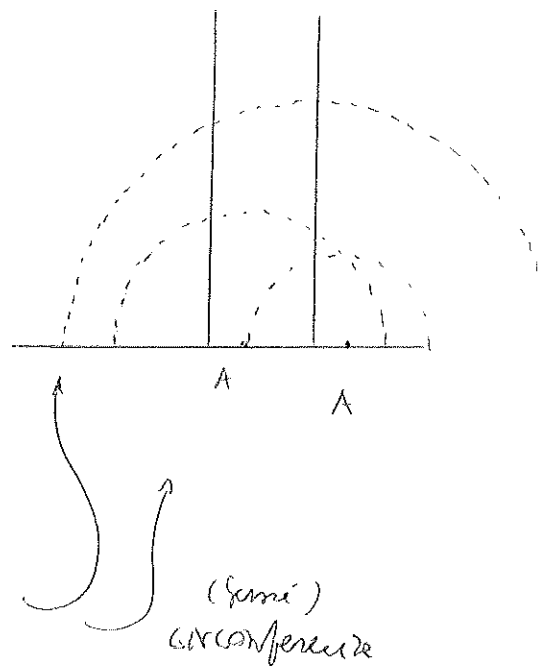
$$y dy = (-x + A) dx$$

$$\frac{1}{2} d(y^2) = (-x + A) dx$$

$$y^2 = -x^2 + 2Ax + B$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2Ax - B = 0$$

$$(x - A)^2 + y^2 = A^2 + B$$



$$\text{Se } x' = 0 \quad \text{e} \quad x = C_1 \Rightarrow \text{(semi) rette verticali.}$$

Curvatura del primo ipersolico

$y > 0$

$$K = -\frac{1}{2\lambda} \Delta \log \lambda$$

$$\lambda = \frac{1}{y^2}$$

$$\log \lambda = -2 \log y$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\log \lambda) = 0$$

$$\Delta \log \lambda = -2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \log y =$$

$$= -2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \right) = +2 y^{-2}$$

$$K = -\frac{2 y^{-2}}{2 y^{-2}} = -1$$

★ Variazioni (eq. di Lagrange)

$y = \frac{d}{ds}$ lunghezza d'arco
[iperbolica!]

$$L = \frac{1}{2} \frac{1}{y^2} (x'^2 + y'^2) \left[\text{cf. il teorema di Ekeland una "simmetria" dà luogo ad un principio di conservazione} \right]$$

da $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ si ha $\frac{\partial L}{\partial x'} = \frac{x'}{y^2} = C$ (cost.)

invarianza per traslazioni $x \rightarrow x+a$

poniamo, per fissare le idee

$$x' = y^2$$

se $C=0$
traiamo
 $x' = 0$
 $x = \text{cost}$
 $\Rightarrow$ (semi)-
rette verticali

Si ha pure $(g_{ij} \dot{x}_i \dot{x}_j = \tilde{C})$
"cons. dell'energia"

$$\frac{1}{y^2} (x'^2 + y'^2) = 1$$

$$x'^2 + y'^2 = y^2 \Rightarrow$$

$$y'^2 = y^2 - x'^2 = y^2 - y^4 = y^2(1 - y^2)$$

$y > 0$

$$y' = \pm y \sqrt{1 - y^2}$$

prendiamo il segno -

$$y' = -y \sqrt{1 - y^2}$$

$$\begin{cases} x' = y^2 = \frac{dx}{ds} \\ y' = -y \sqrt{1 - y^2} = \frac{dy}{ds} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = - \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y}$$

posto

$$y = \sin \xi \quad dy = \cos \xi d\xi$$

$$\frac{-y dy}{\sqrt{1 - y^2}} = dx$$

$$\frac{-\sin \xi \cdot \cos \xi \cdot d\xi}{\cos \xi} = dx$$

$$dx = -\sin \xi d\xi$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \cos \xi + a \\ y = \sin \xi \end{cases}$$

$$(x - a)^2 + y^2 = 1$$

+ ... 0

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\underbrace{g_{11,1}}_{g_{11}=1=0} + \underbrace{g_{11,1}}_{0} - \underbrace{g_{11,1}}_{0} \right)$$

$$\boxed{\Gamma_{11}^1 = 0}$$

Simboli
di
Christoffel
della sfera: dettagli

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\cancel{g_{21,1}} + \cancel{g_{11,2}} - \cancel{g_{12,1}} \right) = 0$$

$$\boxed{\Gamma_{12}^1 = 0}$$

$$\boxed{\Gamma_{21}^1 = 0}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} \left(\cancel{g_{21,2}} + \cancel{g_{21,2}} - g_{22,1} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \sin \vartheta \cos \vartheta = -\sin \vartheta \cos \vartheta = -\frac{1}{2} \sin 2\vartheta$$

$$\boxed{\Gamma_{22}^1 = -\frac{1}{2} \sin 2\vartheta}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(\cancel{g_{12,1}} + \cancel{g_{12,1}} - \cancel{g_{11,2}} \right) = 0$$

$$\boxed{\Gamma_{11}^2 = 0}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(g_{22,1} + \cancel{g_{12,2}} - \cancel{g_{12,2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin^2 \vartheta) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sin \vartheta} \cdot 2 \sin \vartheta \cos \vartheta = \cot \vartheta$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{22} (g_{22,2} + \cancel{g_{22,2}} - \cancel{g_{22,2}})$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (g_{22,2}) = 0$$

$$\boxed{\Gamma_{22}^2 = 0}$$

★ Simboli di Christoffel del piano iperbolico:
della gli

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (g_{11,1} + \cancel{g_{11,1}} - \cancel{g_{11,1}}) = 0$$

$$\boxed{\Gamma_{11}^1 = 0}$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (g_{21,1} + g_{11,2} - \cancel{g_{12,1}})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot y^{-2} \cdot \frac{\partial}{\partial y} y^{-2} = \frac{1}{2} y^{-2} \cdot (-2) y^{-3}$$

$$= -\frac{1}{y}$$

$$\boxed{\Gamma_{12}^1 = -\frac{1}{y}}$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} g^{11} (g_{22,2} + \cancel{g_{22,2}} - \cancel{g_{22,2}}) = 0$$

$$\boxed{\Gamma_{22}^1 = 0}$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \textcircled{2} \left(\cancel{g_{12,1}} + \cancel{g_{12,1}} - g_{11,2} \right)$$

$$= -\frac{1}{2} y^2 \frac{\partial}{\partial y} (y^{-2}) = -\frac{1}{2} y^2 (-2) y^{-3} \\ = y^{-1}$$

$$\boxed{\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y}}$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \textcircled{2} \left(\cancel{g_{22,1}} + \cancel{g_{12,2}} - \cancel{g_{12,2}} \right) \\ = 0$$

$$\boxed{\Gamma_{12}^2 = 0}$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} g^{22} \left(g_{22,2} + \cancel{g_{22,2}} - \cancel{g_{22,2}} \right)$$

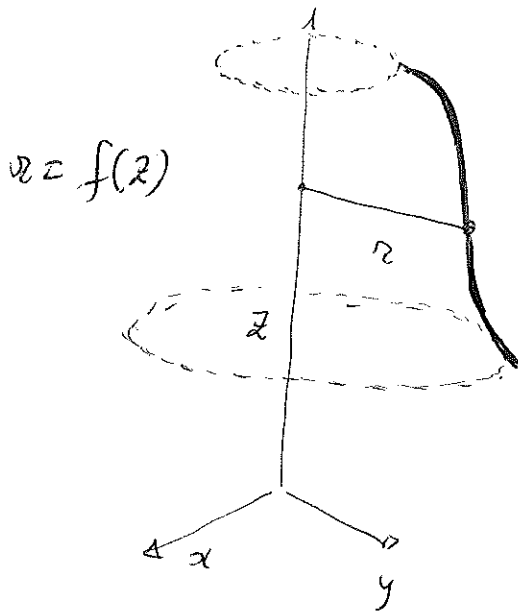
$$= \frac{1}{2} \cdot y^2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} (y^{-2}) = \frac{1}{2} y^2 (-2) y^{-3} \\ = -y^{-1}$$

$$\boxed{\Gamma_{22}^2 = -\frac{1}{y}}$$

X-14'''

★ geodetiche sulle superficie di rivoluzione

discussione generale
hamilton e
eq. di lagrange



$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$T = \frac{1}{2} (\dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2)$$

Energia
cinetica

$$\begin{cases} x = r \cos \phi \\ y = r \sin \phi \\ z = z \end{cases} \quad \phi \in [0, 2\pi)$$

coordinate cilindriche

Controllo:

$$\dot{x} = \dot{r} \cos \phi - r \sin \phi \dot{\phi}$$

$$\dot{y} = \dot{r} \sin \phi + r \cos \phi \dot{\phi}$$

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \dot{z}^2 + \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2$$

$$- 2r\dot{r}\sin\phi\cos\phi\dot{\phi} + 2r\dot{r}\sin\phi\cos\phi\dot{\phi}$$

$$\dot{r} = \frac{df}{dt} = \frac{df}{dz} \frac{dz}{dt} = f'(z) \dot{z}$$

$$= T = \frac{1}{2} \left\{ \left[f'(z)^2 + 1 \right] \dot{z}^2 + f(z)^2 \dot{\phi}^2 \right\} \quad \text{"energia cinetica"}$$

L

Lagrangiana

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$$

$\alpha = 1, \dots, n$

o $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_\alpha} = 0$ (q_α coordinata ciclica, o ignorabile)

$$\bar{e} \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = 0$$

conservazione
le

avremo $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_\alpha} = \text{costante}$ (integrale primo)

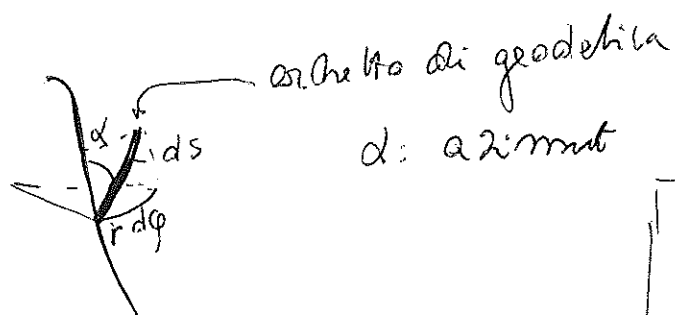
Nel nostro caso T non dipende da ϕ , sicché

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = 2 f(z)^2 \dot{\phi} = \text{cost.}$$

[conservazione
della componente
 z del
momento angolare]

$$f(z)^2 \dot{\phi} = \text{cost}$$

$$r^2 \dot{\phi}$$



$$dt = ds$$

$$r^2 d\phi = C ds$$

$$r (r d\phi) = C ds$$

$$r \sin \alpha ds = C ds$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{r \sin \alpha = C}$$

$\uparrow$ raggio del parallelo $\nwarrow$ azimuth

teorema di
Clairaut

44 L' Equazione geodetica (che non è necessario scrivere) si integra, in linea di principio, utilizzando

$$T = h \quad (\text{cost}) \quad \leftarrow \text{conservazione dell'energia}$$

$$(f'^2 + 1) \dot{z}^2 + k^2 f^{-2} = 2h$$

$$f^2 \dot{\phi} = k \quad \text{(Clairaut)}$$

$$f^4 \dot{\phi}^2 = k^2 \quad \text{(cons. della componente 2 del momento angolare)}$$

$$f^2 \dot{\phi}^2 = f^2 \frac{k^2}{f^4} = k^2 f^{-2}$$

$$\dot{z}^2 = \frac{2h - k^2 f^{-2}}{f'^2 + 1}$$

$$= \frac{2h f^2 - k^2}{f^2 (f'^2 + 1)}$$

$$(2h f^2 - k^2 \geq 0) \\ f > 0$$

$$\dot{z} = \pm \sqrt{\frac{2h f^2 - k^2}{f^2 (f'^2 + 1)}} \\ \text{"} \\ \frac{dz}{dt}$$

$$dt = \pm \sqrt{\frac{f^2 (f'^2 + 1)}{2h f^2 - k^2}}$$

$$\left[\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \frac{k}{f^2} \\ d\phi &= \frac{k}{f^2(t)} dt \\ \phi &= \int \frac{k}{f^2(t)} dt + \dots \end{aligned} \right]$$

$2h = 1$
 $\text{se } dt = ds \quad \uparrow$

$$t = \tau(z)$$

$$z = \tau^{-1}(t)$$

X-17

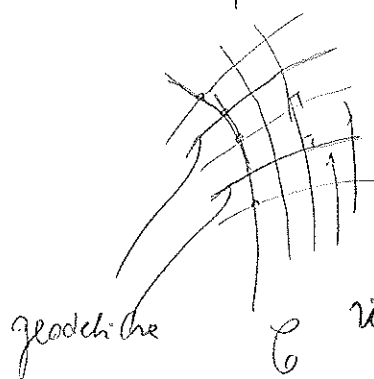
$$r = r(z) = f(z) = y(t)$$

$$\phi = \dots \Phi(t)$$

★ Le geodetiche danno luogo, localmente, alle curve di lunghezza minima congiungenti due pti dati (suffic. vicini) ["minimizzano, localmente, il funzionale lunghezza"]

vediamo come:

in una porzione di superficie consideriamo una curva qualsiasi C ; a partire dai pt. di C spicchiamo



le geodetiche ortogonali a C ; rispetto ad un opportuno parametro v^* , che può vedersi come un parametro su C , esse saranno date da $v^* = \text{cost.}$

consideriamo le loro traiettorie

ortogonali come curve $u^* = \text{cost}$ (C corrisponde a $u^* = 0$)

[queste ultime non sono necessariamente geodetiche]; in termini delle coordinate u^* e v^* ,

$$g_{12}^* \equiv F^* = 0 \quad (\text{ortogonalità}).$$

$$\text{Da } (K_g)_{v^* = \text{cost}} = - \frac{1}{\sqrt{E^*}} \frac{\partial}{\partial v^*} (\log \sqrt{E^*}) = 0$$

$\uparrow$
 curvatura geodetica

$\frac{\partial}{\partial v^*}$
 " "

($v^* = \text{cost}$
 sono geodetiche)

Si ha $E^* = g_{11}^*(u^*)$ (non dipende cioè da v^*)
 ovvero, la lunghezza d'arco su una geodetica

Poniamo $u = \int_0^{u^*} \sqrt{E^*} du^*, \quad v = v^*$

si ottengono nuovamente coordinate ortogonali, e, inoltre

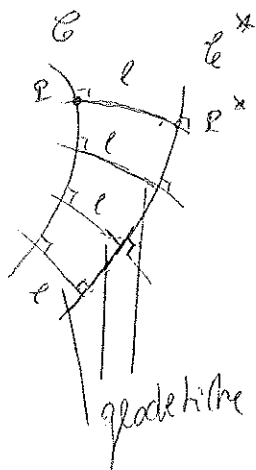
$$ds^2 = du^2 + E(u, v) dv^2$$

$$g_{22} = g = \det(I) = \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix} = E G - F^2$$

(in particolare $K = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial^2 \sqrt{g}}{\partial u^2} \quad g = G \quad)$

Dalla formula precedente si ha (lemma di Gauss)

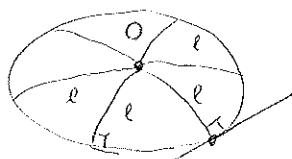
infatti, costruendo
la curva C^* , del
tipo $u = \text{cost.}$,
la lunghezza di
un arco
di geodetica
 $\widehat{PP^*}$ è costante



la curva C^* luogo dei punti
sulle geodetiche emananti ortogonalmente
da C ad una distanza fissata l
(misurata tramite la metrica) è ancora
ortogonale alle geodetiche ante.
 C^* è detta parallelo geodetica

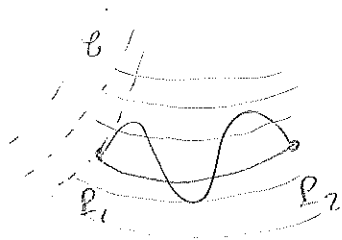
In particolare un circhio geodetico

è perpendicolare; in ogni suo punto,
alla geodetica che va al pto di
contatto



Se ora P_1 e P_2 sono punti di I congiunti da
un'unica geodetica γ , e costruisco un sistema di
coordinate geodetiche come sopra,

per la lunghezza di un arco γ
congiungente P_1 e P_2 ho

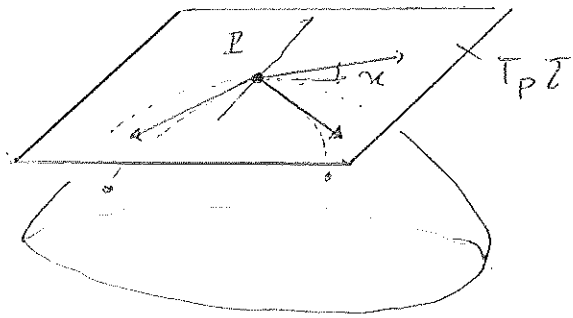


$$l(\gamma) = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{u}^2 + \underbrace{g_{22}}_{=l_r} \dot{v}^2} dt$$

$$\geq \int_{t_1}^{t_2} \dot{u} dt = u_2 - u_1$$

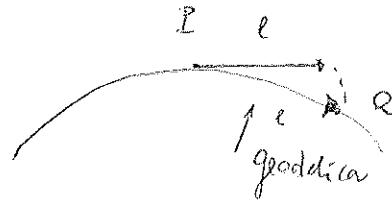
e vale $\Leftrightarrow \dot{v} = 0$, cioè

γ ha lo stesso sostegno della
geodetica $\widehat{P_1 P_2}$.

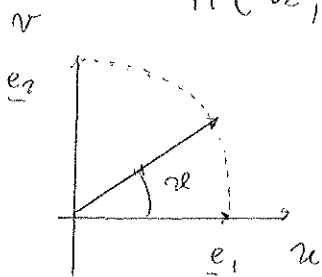


★ Applicazione,
o mappa
esponenziale

(.. al - Biruni..)
X-XI sec.

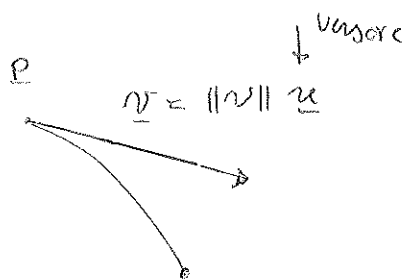


$$H(r, u) = \exp_P (r (\cos u \underline{e}_1 + \sin u \underline{e}_2)) \in \Sigma$$



[per r suff. piccolo $\hat{=}$
un diffeomorfismo]

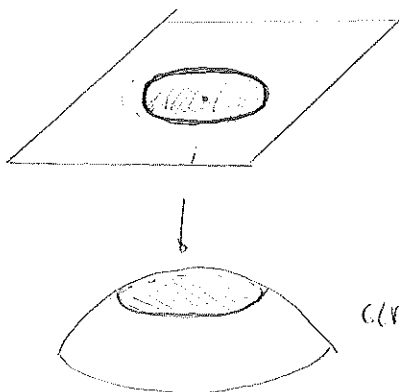
$$\exp_P \underset{\substack{\cap \\ T_P \Sigma}}{v} := \gamma^v(1) = \text{2° estremo dell'arco di} \\ \text{geodetica uscente da } P \\ \text{con velocità } v, \text{ per } s=1$$



(s : asseissa curvilinea)

$$= \gamma^u(\|v\|)$$

(2° estremo dell'arco di geodetica
uscite da P con velocità u ($\|u\|=1$),
per $s = \|v\|$



$$C_r : u \mapsto H(r, u)$$

↑
fisso

circonferenza geodetica di raggio r
di centro P e raggio r

* Teorema (Bertrand, Poincaré)

$$1. \quad L(\tilde{C}_R^P) = \underbrace{2\pi R}_{\substack{\text{l. circ.} \\ \text{euclidea}}} \left(1 - \frac{K(P)}{6} r^2 + o(r^2) \right)$$

$$2. \quad A(\tilde{C}_R^P) = \underbrace{\pi r^2}_{\substack{\text{area} \\ \text{circolo} \\ \text{"euclidea"}}} \left(1 - \frac{K(P)}{12} r^2 + o(r^2) \right)$$

$\uparrow$
 circolo
geodetico

Dimo. Diamo una dimostrazione (omettendo qualche dettaglio analitico) diretta, di tipo geometrico.

Approssimiamo $\tilde{C}$, in un intorno di P , con una sfera (sfera osculatrice)

tangente a $\tilde{C}$ in P e di raggio R

$$\text{con } \frac{1}{R^2} = K(P)$$

[Se K è negativo, si usa una pseudo-sfera.]

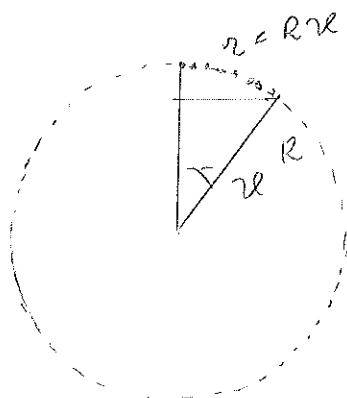
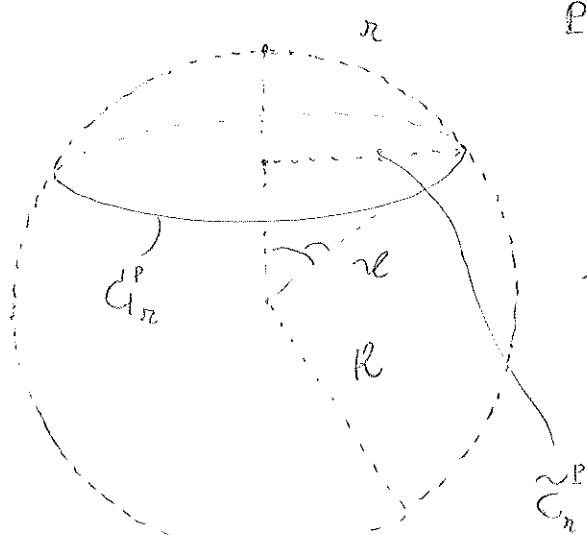
$$\text{Si ha: } L(\tilde{C}_R^P) =$$

$$2\pi R \sin r = 2\pi R \sin \frac{r}{R} =$$

$$= 2\pi R \left[\frac{r}{R} - \frac{1}{6} \left(\frac{r}{R} \right)^3 + \dots \right]$$

$$= 2\pi r - 2\pi R \cdot \frac{1}{6} \frac{r^3}{R^3} \cdot \frac{1}{R^2} + \dots$$

$\underbrace{\quad}_{=K(P)}$



$$= 2\pi r - 2\pi r \cdot \frac{r^2}{6} \cdot K(L) + \dots$$

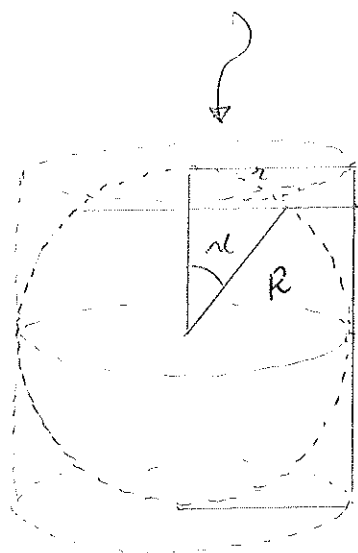
$$= 2\pi r \left(1 - \frac{K(L)}{6} r^2 + \dots \right) \quad \text{che è la l.}$$

Allo stesso modo, $A(\tilde{C}_r^P) = \text{area calotta sferica}$

$$= \int_0^r \left(\int_0^{2\pi} \sin \vartheta \, d\varphi \right) d\vartheta = 2\pi R^2 (1 - \cos \vartheta)$$

||

(cf. anche il teore. di Archimede)



$$\vartheta = \frac{r}{R}$$

$$2\pi R^2 \left(\frac{\vartheta^2}{2} - \frac{\vartheta^4}{4!} + \dots \right)$$

$$(1 - \cos \vartheta) R$$

$$= 2\pi R^2 \left(\frac{\vartheta^2}{2 R^2} - \frac{\vartheta^4}{4! R^4} + \dots \right)$$

$$= \pi r^2 \left[1 - \frac{1}{12} r^2 \cdot \frac{1}{R^2} + \dots \right]$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{K(L)}$

$$= \pi r^2 \left[1 - \frac{K(L)}{12} r^2 + \dots \right], \quad \text{il che prova l.}$$

* Lemma tecnico in coordinate geodetiche polari (ρ, ϑ)

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{g} = 0 \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial(\sqrt{g})}{\partial \rho} = 1 \quad E \equiv 1$$

$$g = g(\rho, \vartheta)$$

Dim. in coordinate normali $\begin{cases} u^* = \rho \cos \vartheta \\ v^* = \rho \sin \vartheta \end{cases}$

$$\sqrt{Eg - F^2} = \sqrt{E^*g^* - F^{*2}} \cdot \frac{\partial(u^*, v^*)}{\partial(\rho, \vartheta)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{g} = \rho \sqrt{E^*g^* - F^{*2}}$$

Ora, in $\mathcal{P}$ ($\rho=0$, ϑ arbitr.) $E^* = g^* = 1$, $F^* = 0$

$$\Rightarrow \lim_{\rho \rightarrow 0} \sqrt{g} = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{g}}{\rho} = 1$$

Utilizzeremo ciò nel discutere la diffusione delle geodetiche (approccio locale)

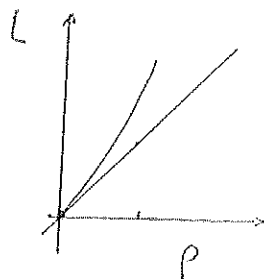
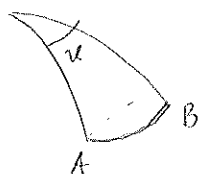
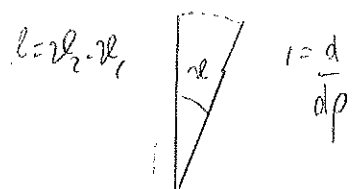
La lunghezza di un arco $\rho = \text{cost}$, in coord. polari è

$$L(\rho) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \sqrt{g} d\vartheta \quad ; \quad \text{successivamente è}$$

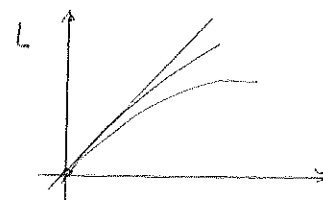
$$L'(\rho) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\sqrt{g}) d\vartheta,$$

$$L''(\rho) = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} (\sqrt{g}) d\vartheta$$

$$= -K \sqrt{g}$$



$K < 0$
le geod. si
allontanano



$K > 0$
inizialmente si
allontanano;
possibile
divergenza

D
O non è la dist. tra
A e B in que.

Conseguenza: il flusso geodetico su una superficie a curvatura negativa è caotico (ovvero, si ha dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali).



* Conseguenza remota: l'impossibilità di previsioni meteorologiche precise di lungo termine.

I tipi stati dell'atmosfera costituiscono i pti di una varietà riemanniana di dimensione infinita, e la dinamica può interpretarsi come flusso geodetico di una corta metrica. Tale varietà ha curvatura (sezionale) generalmente negativa (V. I. Arnold)

★ Teorema di Minding

Due superficie con la stessa curvatura costante
sono localmente isometriche

Dica. Partiamo da

$$(\sqrt{G})_{pp} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{costante}}}{K} \sqrt{G} = 0 \quad (\text{coord. polari})$$

e ricordiamo che (*) $\lim_{p \rightarrow 0} \sqrt{G} = 0$, $\lim_{p \rightarrow 0} (\sqrt{G})_p = 1$

Abbiamo tre casi:

1. $K = 0$ $\sqrt{G} = p + f(\varphi)$, ma da (*) si ha $f(\varphi) \equiv 0$

$\Rightarrow E = 1, F = 0, G(p, \varphi) = p^2$ $ds^2 = dp^2 + p^2 d\varphi^2$
plano

2. $K > 0$

$$\sqrt{G} = A(\varphi) \cos(\sqrt{K} p) + B(\varphi) \sin(\sqrt{K} p)$$

ma (*) implica $A(\varphi) \equiv 0$ e (**) da' $B(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{K}}$

$\Rightarrow E = 1, F = 0, G = \frac{1}{K} \sin^2(\sqrt{K} p) \Rightarrow$ loc. sfera di raggio $\frac{1}{\sqrt{K}}$

3. $K < 0$ $\sqrt{G} = A(\varphi) \cosh(\sqrt{-K} p) + B(\varphi) \sinh(\sqrt{-K} p)$

$\Rightarrow E = 1, F = 0, G = -\frac{1}{K} \sinh^2(\sqrt{-K} p)$
 $\leadsto$ loc. pseudosfera