ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA

modulo: ELEMENTI DI GEOMETRIA (Prof. M. Spera)

Prova scritta del 18 luglio 2012

① Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, ampliato proiettivamente, si determini la conica $\mathcal{C}$ avente come asintoto la retta $r: x=1$, centro in $C: [1,1,0]$, tale che la tangente in $A: [0,1,1]$ passi per C, e tangente a $s: x-2y=0$. Determinarne gli asintoti, gli assi, la forma canonica metrica, e abbozzarne il grafico

② Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, determinare, possibilmente in due modi, la trasformazione affine T tale che

$$A: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto A': \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$B: \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto B': \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto C': \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dire se si tratta di un movimento rigido. Qual è l'immagine $\mathcal{C}'$ della circonferenza $\mathcal{C}$ passante per A, B, C? Trovare le equazioni di $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$.

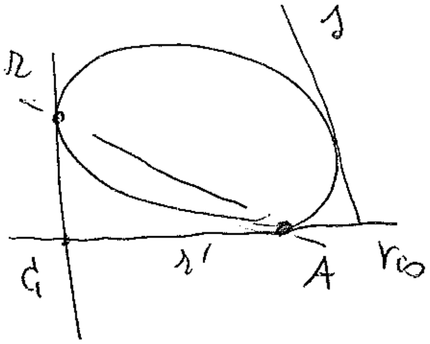
Tempo a disposizione: 1h 15m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Ele geo
18 luglio 2012

(1) Conica $\mathcal{C}$ avente come asintoto $r: x=1$

Centro $C: [1,1,0]$, tale che la tangente a $\mathcal{C}$ in $A: [0,1,1]$ passi per C, e tangente a $s: x-2y=0$



Sol: AC è l'altro asintoto!

è la retta r': $\begin{cases} x = 1+t \\ y = t \end{cases}$ ovvero $x = 1+y$

$r': x-y-1=0$

$\mathcal{C} \in$ fascio di coniche bitangenti (forma affine)

$$\mathcal{C}_\lambda : (x-1)(x-y-1) + \lambda = 0$$

ora $\mathcal{C}_\lambda \cap s$ deve essere doppia!

$$x = 2y \Rightarrow (2y-1)(2y-y-1) + \lambda = 0$$

$$(2y-1)(y-1)+\lambda = 0 \qquad 2y^2 - y - 2y + 1 + \lambda = 0$$

$$2y^2 - 3y + (\lambda+1) = 0 \qquad \Delta = 9 - 4\cdot 2(\lambda+1) = 9 - 8(\lambda+1) = 0$$

$$9 - 8\lambda - 8 = 0 \Rightarrow 1 - 8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{8}$$

dunque $\mathcal{C}: \quad (x-1)(x-y-1)+\frac{1}{8}=0$

$$\boxed{\mathcal{C}: \quad 8(x-1)(x-y-1)+1=0}$$

gli assi sono le bisettrici degli asintoti

scriviamo le eq. degli asintoti normalizzate. $(a^2+b^2=1)$

$r: \quad x-1=0 \quad$ (già norm)

$r': \quad \frac{1}{\sqrt{2}}x-\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=0$

sicché gli assi sono dati da

$$\left(1\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x \mp \frac{y}{\sqrt{2}} \underbrace{-1\mp\frac{1}{\sqrt{2}}}_{\frac{-\sqrt{2}\mp 1}{\sqrt{2}}}=0$$

$m_{\pm} = 1\pm\sqrt{2}$

$$(\sqrt{2}\pm 1)x \mp y -\sqrt{2}\mp 1 = 0$$

Controllo: passano per $C: (1,0) \qquad \sqrt{2}\pm 1-(\sqrt{2}\pm 1)=0$ ✓

sono perp.

$$(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)-1\cdot 1 = 2-1-1=0 \text{ ✓}$$

l'asse focale è $\quad y=m_+(x-1)$

b: $8(x^2 - x - xy + y - x + 1) + 1 = 0$

$$8(x^2 - xy - 2x + y + 1) + 1 = 0$$

$$8x^2 - 8xy - 16x + 8y + 8 + 1 = 0$$

$$8x^2 - 8xy - 16x + 8y + 9 = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = 16 \cdot \underbrace{8 \cdot 2}_{16} - 8 \cdot 16 - 16 \cdot 9 = 16\,[\overbrace{16 - 8 - 9}^{-1}]$$

$$= -16 = -4^2$$

$\vartheta = 8$ $\qquad \Omega_{00} = -16$ $\qquad$ (…iperbole)

semiassi

$$t^2 + \frac{\Omega_{00}\vartheta}{\Omega}\,t + \frac{\Omega_{00}^3}{\Omega^2} = 0$$

$$t^2 + \frac{\cancel{-16}\cdot 8}{\cancel{-16}}\,t + \frac{-4^6}{4^4} = 0$$

$$t^2 + 8t - 4^2 = 0$$

$$t = -4 \pm \sqrt{16 + 16} = -4 \pm \sqrt{4^2 \cdot 2} = -4 \pm 4\sqrt{2}$$

$$= -4(1 \pm \sqrt{2})$$

$$t_1 = -4(1+\sqrt{2}) < 0$$

$$b = \frac{1}{\sqrt{4(1+\sqrt{2})}} = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{4(\sqrt{2}-1)}} = \frac{1}{2\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sqrt{1+1}-1}} \sim$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}-1}} \sim$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} \sim 0{,}7$$

direzioni degli assi (diam. coniug. ortogonali):

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$$

ovvero $\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{pmatrix} -m & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2-m \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \qquad -m(2-m)-1 = 0$$

$$-2m + m^2 - 1 = 0$$

$$m^2 - 2m - 1 = 0$$

$\checkmark$ $\quad m = 1 \pm \sqrt{2}$ $\quad$ (ortog? $(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}) = 1-2 = -1$ $\checkmark$)

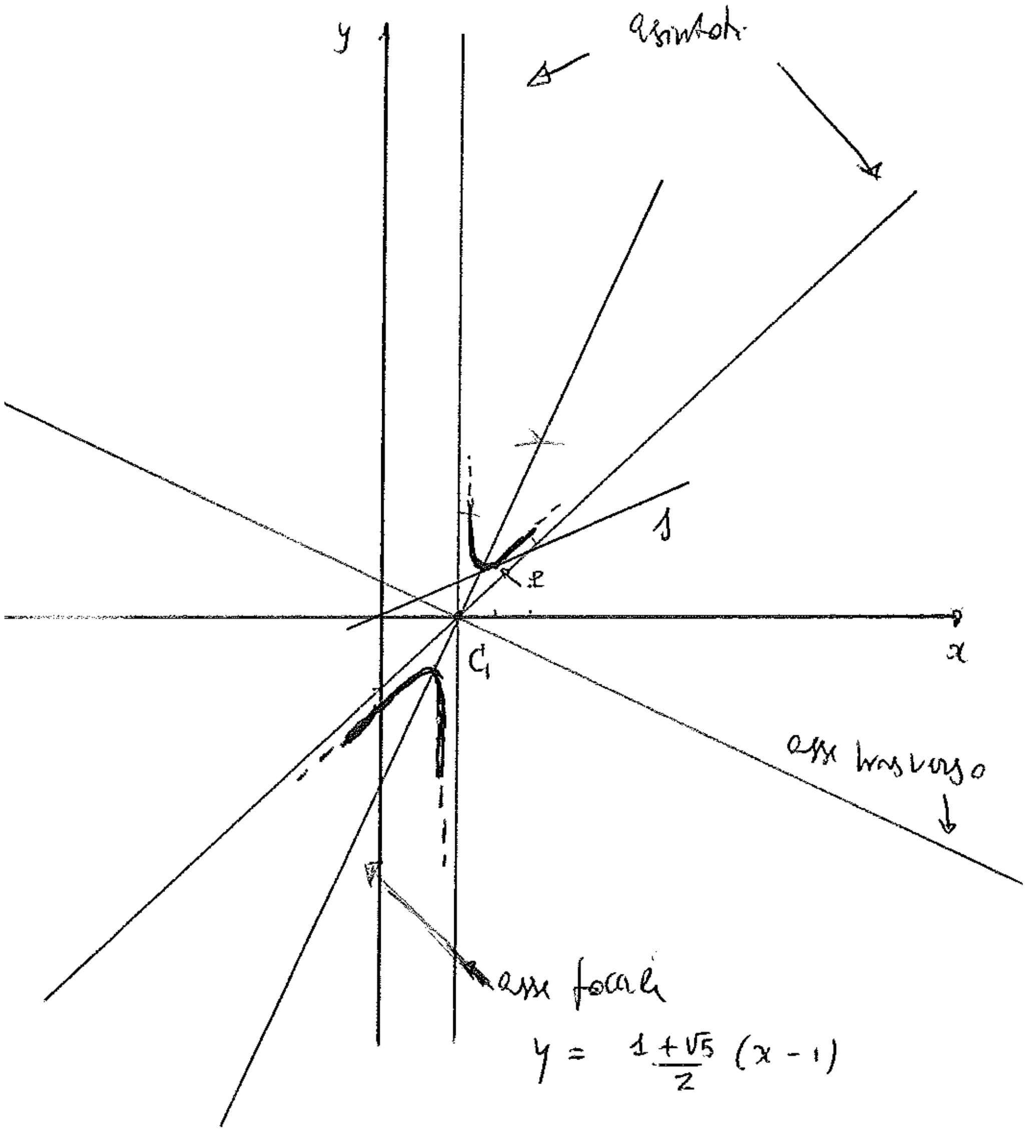
altro modo: autospazi di $A_{00} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ (autom. ortogonali)

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda(\lambda-2)-1 = 0 \qquad \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \qquad \lambda_\pm = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_+ & -1 \\ -1 & -\lambda_+ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad -\xi - \lambda_+\eta = 0$$

$$\eta = -\frac{1}{\lambda_+}\xi = \lambda_-\xi \quad \dots \checkmark$$

Abbozzo del grafico



$y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} (x - 1)$

controlli

$\mathcal{C}: \quad 8(x-1)(x-y-1) + 1 = 0$

$x = 0 \Rightarrow \quad -8(-y-1) + 1 = 0$

$8y + 8 + 1 = 0$

$8y + 9 = 0$

$y = -\frac{9}{8}$

ulteriore controllo

$y = 0 \Rightarrow \quad 8(x-1)^2 + 1 = 0$

$\Rightarrow \mathcal{C}$ non interseca l'asse x

e: pto di tangenza

$2y^2 - 3y + (\frac{1}{8} + 1) = 0$

$2y^2 - 3y + \frac{9}{8} = 0$

$16y^2 - 24y + 9 = 0$

$(4y - 3)^2 = 0$

$y = \frac{3}{4}$ doppia

$x = \frac{3}{2} \quad e: \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$

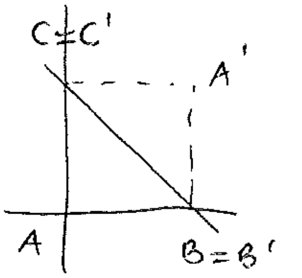
Elegeo
18 luglio 2012

(2) Determinare, possibilmente in due modi, la trasf. affine T che manda

$$A: \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \longmapsto A': \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$B: \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \longmapsto B': \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$C: \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \longmapsto C': \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$



È un mov. rigido? Qual è l'immagine della circonferenza ℓ passante per A, B, C. Trovarne le equazioni

Sol. 1ª (standard)
$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ b_1 & a_{11} & a_{12}\\ b_2 & a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{b_1 = b_2 = 1}$$

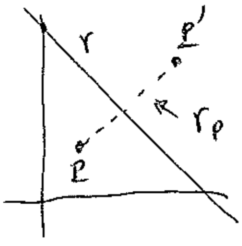
$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & a_{11} & a_{12}\\ 1 & a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 1 = 1 + a_{11} & \Rightarrow \\ 0 = 1 + a_{21} & \Rightarrow \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} = 0 \\ a_{21} = -1\end{matrix}}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & a_{12}\\ 1 & -1 & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 0 = 1 + a_{12} & \Rightarrow \\ 1 = 1 + a_{22} & \Rightarrow \end{matrix} \boxed{\begin{matrix} a_{12} = -1 \\ a_{22} = 0\end{matrix}}$$

$$\Rightarrow T: \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$ è un'isometria (che cambia l'or.) (mov. rigido)

ortogonale, det $= -1$

Di fatto è la simmetria ortogonale rispetto a $r: x + y - 1 = 0$



Infatti (2° metodo); posto $P: \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$,

r_P (retta per P $\perp$ r) è data da

$$r_P : \begin{cases} x = a + t \\ y = b + t \end{cases}$$

$r_P \cap r$:
$$a + t + b + t - 1 = 0$$
$$a + b - 1 + 2t = 0$$

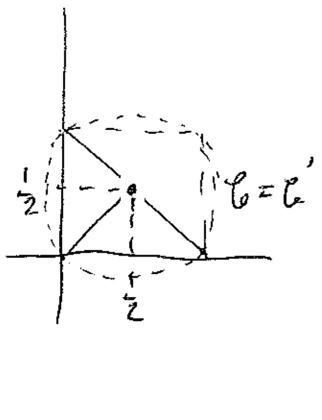
$\Rightarrow P'$ corrisponde a $\bar{t} = 2t = 1 - a - b$

$$P' : \begin{cases} x = a + 1 - a - b = 1 - b \\ y = b + 1 - a - b = 1 - a \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{b}}$$

$$\Rightarrow \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\mathcal{C}$ è ovviamente mutata <u>in se stessa</u>
(ed è la circ. di centro $C : (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e raggio $= \frac{\sqrt{2}}{2}$)



$$\boxed{(x - \tfrac{1}{2})^2 + (y - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{2}}$$ ovvero

$$x^2 + y^2 - x - y + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - x - y = 0}$$