INTRODUZIONE ALLA TRASFORMATA DI FOURIER IN $\mathbb{R}$.

ANTONIO MARIGONDA

Versione del giorno 12 febbraio 2009

Sommario. Queste note contengono un'introduzione sintetica ed elementare alla Trasformata di Fourier in una variabile all'interno del Corso di Analisi Matematica 2 (mod. avanzato) tenuto dal prof. G. Orlandi.
Il materiale presente nelle note a piè di pagina è di studio *facoltativo* e viene riportato solo per completezza,per lo più si tratta di dimostrazioni che richiedono l'utilizzo di strumenti di calcolo maggiormente avanzato.
Tutto il resto del materiale, *comprese le dimostrazioni non rimandate a pié di pagina*, è da intendersi di studio *obbligatorio*. Nell'ultima sezione è presente un riassunto dei risultati principali presentati nella dispensa, tale riassunto può costituire un utile supporto mnemonico e di autovalutazione. Vi prego di segnalarmi eventuali inesattezze.

1. Richiami di teoria dell'integrazione

Definizione 1. Sia $1 \leq p < +\infty$ un numero reale, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione.[1] Diremo che $f \in L^p(\mathbb{R})$ se

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx < +\infty.$$

L'insieme delle funzioni L^p costituisce uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Data $f \in L^p(\mathbb{R})$, porremo

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

La funzione $\|\cdot\|_{L^p} : L^p(\mathbb{R}) \to [0, +\infty)$ è una *norma* su $L^p(\mathbb{R})$ che rende $L^p(\mathbb{R})$ uno spazio di Banach.
Casi particolarmente importanti di questa definizione sono:

$$L^1(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx < +\infty \right\}, \qquad \|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| \, dx$$

$$L^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx < +\infty \right\}, \qquad \|f\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Definizione 2. Lo spazio delle funzioni continue su $\mathbb{R}$ verrà indicato con $C^0(\mathbb{R})$. Dato $m > 1$, lo spazio delle funzioni derivabili fino all'ordine m con derivata continua su tutto $\mathbb{R}$ sarà indicato con C^m. Scriveremo che $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ se $f \in C^m(\mathbb{R})$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.
Se $f \in C^0(\mathbb{R})$, si pone:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Diremo che una funzione continua è C^1 a tratti se essa è derivabile con derivata continua su $\mathbb{R}$ ad eccezione di un insieme finito di punti.

Proposizione 1 (Disuguaglianza di Schwarz)**.** *Siano $f, g \in L^2(\mathbb{R})$. Allora il prodotto $fg \in L^1(\mathbb{R})$ e vale:*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Teorema 1 (Convergenza Dominata di Lebesgue)**.** *Sia $g \in L^1$ e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di funzioni tale che per (quasi[2]) ogni $x \in \mathbb{R}$ valgano:*

---

[1] In questa sezione presentiamo senza dimostrazione alcuni risultati della teoria dell'integrazione secondo Lebesgue. Per precisare gli enunciati, in tutta la sezione quando si parlerà di "funzione" si intenderà "rappresentante della classe di equivalenza di funzioni misurabili modulo l'uguaglianza q.o. secondo la misura di Lebesgue". Il lettore non familiare con tale teoria può considerare le funzioni che compaiono continue a tratti e considerare gli integrali secondo Riemann.

[2] Diremo che una proprietà è vera per *quasi ogni* $x \in \mathbb{R}$ (abbreviato in q.o.) se è vera per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ ad eccezione di un insieme di misura nulla secondo Lebesgue. Il lettore non familiare con tale nozione, potrà considerare che tale proprietà valga per tutti gli $x \in \mathbb{R}$ ad eccezione di un insieme finito di punti.

(1) *esiste il* $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$,
(2) $|f_n(x)| \le g(x)$.

Allora vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\,dx.$$

Teorema 2 (Fubini e Tonelli)**.** *Sia* $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *una funzione. Allora se:*

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|\,dx\right)\,dy<+\infty,\ \textit{oppure}\ \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|\,dy\right)\,dx<+\infty,$$

si ha anche

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}|f(x,y)|\,dx\,dy<+\infty,$$

e

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\right)\,dy.$$

Lemma 1 (di Riemann-Lebesgue)**.** *Sia* $f\in L^1$. *Allora:*

$$\lim_{\alpha\to\pm\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{i\alpha x}\,dx = 0.$$

In particolare:

$$\lim_{\alpha\to\pm\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\cos(\alpha x)\,dx = 0,\qquad \lim_{\alpha\to\pm\infty}\int_{\mathbb{R}} f(x)\sin(\alpha x)\,dx = 0.$$

Dimostrazione. Omessa.[3] □

Definizione 3. Se $z = x+iy\in\mathbb{C}$, con $\bar{z}$ indicheremo il *coniugato* di z, ovvero $\bar{z} = x-iy\in\mathbb{C}$.

2. Verso la trasformata di Fourier (G. De Marco)

Per un fenomeno periodico, rappresentato da funzioni periodiche, lo sviluppo in serie di Fourier di queste costituisce un metodo per l'analisi del fenomeno stesso: le armoniche dello sviluppo di Fourier hanno spesso significato fisico, intendendosi con ciò il fatto che esistono strumenti di vario genere (risuonatori, oscilloscopi, ecc.) che permettono di rilevare e misurare tali armoniche. Per funzioni $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ non periodiche è possibile qualcosa del genere? Si può pensare di prendere un numero T grande, di considerare la funzione su $[-T/2, T/2[$, di estendere per periodicità tale restrizione al di fuori di $[-T/2, T/2[$, e di considerare la successione $c(f,T):\mathbb{Z}\to\mathbb{C}$ dei coeffcienti di Fourier di tale funzione; al tendere di T a $+\infty$, $c(f,T)$ dovrebbe, sotto opportune ipotesi su f, tendere ad un oggetto legato alla funzione f. Non possiamo però restare nell'ambito discreto; come funzione su $\mathbb{Z}$, la successione dei coefficienti di Fourier, almeno per f assolutamente integrabile, tende solo a zero. Si fa diventare ogni $c(f,T)$ una funzione $\hat{f}_T:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, costante a tratti, nel modo seguente:

$$\hat{f}_T(\nu) = \frac{1}{T}c_n(f,T) = \int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi i n t/T}\,dt,\qquad \frac{n}{T}\le\nu<\frac{n+1}{T},$$

ovvero:

$$\hat{f}_T(\nu) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-2\pi i n t/T}\chi_{[\frac{n}{T},\frac{n+1}{T}]}(\nu)\,dt.$$

Si può allora dimostrare (non lo facciamo; queste righe sono solo a titolo euristico) che se $f\in L^1(\mathbb{R})$ allora, per $T\to+\infty$ la funzione $\hat{f}_T$ tende uniformemente su $\mathbb{R}$ ad una funzione continua $\hat{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$, detta *trasformata di Fourier* di f.

[3] La dimostrazione si basa sul fatto che lo spazio vettoriale generato dalle funzioni $\chi_{[a,b]}$ (funzioni *a scalino*), ovvero l'insieme delle combinazioni lineari finite di tali funzioni, definite da $\chi_{[a,b]}(x)=0$ se $x\notin[a,b]$ e $\chi_{[a,b]}(x)=1$ se $x\in[a,b]$, è denso in L^1 (e anche in L^2).

3. Definizione e prime proprietà

Definizione 4. Sia $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, la sua *trasformata di Fourier* $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è definita da:

$$\hat{f}(\nu) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \nu t}\, dt, \qquad \nu \in \mathbb{R}.$$

Proposizione 2. *Data $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, si ha $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ e $\lim_{\nu\to\pm\infty} \hat{f}(\nu) = 0$.*

Dimostrazione. Si ha:

$$|\hat{f}(\nu) - \hat{f}(\nu_0)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) \cdot (e^{-2\pi i \nu t} - e^{-2\pi i \nu_0 t})\, dt \right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \cdot |e^{-2\pi i \nu t} - e^{-2\pi i \nu_0 t}|\, dt \le 2 \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt.$$

Pertanto se $\{\nu_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione, con $\nu_n \to \nu_0$, è possibile applicare il Teorema della Convergenza Dominata (dato che $|f(t) \cdot e^{-2\pi i \nu t} - e^{-2\pi i \nu_0 t}| \le 2|f(t)| \in L^1$) ottenendo:

$$\lim_{n\to\infty} |\hat{f}(\nu_n) - \hat{f}(\nu_0)| \le \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \cdot |e^{-2\pi i \nu_n t} - e^{-2\pi i \nu_0 t}|\, dt = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \cdot \left(\lim_{n\to\infty} |e^{-2\pi i \nu_n t} - e^{-2\pi i \nu_0 t}| \right) dt = 0.$$

Pertanto $\hat{f} \in C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Si ha che $\lim_{\nu\to\pm\infty} \hat{f}(\nu) = 0$ per il Lemma di Riemann-Lebesgue. □

Definizione 5. Denoteremo con $C^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ lo spazio delle funzioni continue il cui limite all'infinito è nullo. Sono in particolare limitate ed uniformemente continue. Lo spazio $(C^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach.

Proposizione 3. *La trasformazione di Fourier è un operatore lineare e continuo di $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ in $C^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$, in particolare per ogni $\nu \in \mathbb{R}$ si ha:*

$$|\hat{f}(\nu)| \le \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx.$$

Dimostrazione. La linearità è ovvia per la linearità dell'integrale. Si ha poi:

$$|\hat{f}(\nu)| = \left| \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i \nu t}\, dt \right| \le \int_{\mathbb{R}} |f(t)| \cdot |e^{-2\pi i \nu t}|\, dt \le \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\, dt = \|f\|_{L^1}.$$

Quindi $\sup\{|\hat{f}(\nu)| : \nu \in \mathbb{R}\} = \|\hat{f}\|_\infty \le \|f\|_{L^1}$ (il che implica l'ultimo asserto dell'enunciato), per cui l'operatore di trasformazione è lineare e continuo. □

Osservazione 1. Dalla definizione, ricordando che l'integrale del coniugato è il coniugato dell'integrale, discende che ogni funzione reali pari ha trasformata reale pari e ogni funzione reale dispari ha trasformata dispari puramente immaginaria.

Proposizione 4. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, $\lambda, t_0, \nu_0 \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Allora:*

(1) cambiamento di scala*: posto $g(t) = f(\lambda t)$ si ha $\hat{g}(\nu) = \frac{1}{|\lambda|} \hat{f}\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)$;*
(2) ritardo*: posto $g(t) = f(t - t_0)$ si ha $\hat{g}(\nu) = \hat{f}(\nu) e^{-2\pi i t_0 \nu}$;*
(3) modulazione*: posto $g(t) = e^{2\pi i \nu_0 t} f(t)$ si ha $\hat{g}(\nu) = \hat{f}(\nu - \nu_0)$.*

Dimostrazione.

(1) Si ha:

$$\begin{aligned} \lambda > 0, \quad \hat{g}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda t) e^{-2\pi i \nu t}\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(w) e^{-2\pi i \frac{\nu}{\lambda} w} \frac{dw}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \hat{f}\left(\frac{\nu}{\lambda}\right). \\ \lambda < 0, \quad \hat{g}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda t) e^{-2\pi i \nu t}\, dt = \int_{+\infty}^{-\infty} f(w) e^{-2\pi i \frac{\nu}{\lambda} w} \frac{dw}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \hat{f}\left(\frac{\nu}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

(2) Si ha $\hat{g}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(t - t_0) e^{-2\pi i \nu t}\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(w) e^{-2\pi i \nu (w + t_0)}\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(w) e^{-2\pi i \nu w}\, dw \cdot e^{-2\pi i \nu t_0} = \hat{f}(\nu) e^{-2\pi i \nu t_0}$.

(3) Si ha $\hat{g}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} e^{2\pi i \nu_0 t} f(t) e^{-2\pi i \nu t}\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i (\nu - \nu_0) t}\, dt = \hat{f}(\nu - \nu_0)$.

□

Proposizione 5. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ tale che la mappa $t \mapsto tf(t)$ appartenga ad $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Allora $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ e, posto $g(t) = (-2\pi i t)f(t)$, si ha $\frac{d}{d\nu}\hat{f}(\nu) = \hat{g}(\nu)$. In generale se $t \mapsto t^m f(t)$ è in L^1 per $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, si ha che $\hat{f} \in C^m$ e, posto $g(t) = (-2\pi i t)^m f(t)$, si ha $\frac{d^m}{d\nu^m}\hat{f}(\nu) = \hat{g}(\nu)$.*

Dimostrazione. Si ha:

$$\begin{aligned}\frac{\hat{f}(\nu+\varepsilon)-\hat{f}(\nu)}{\varepsilon} &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\cdot\frac{e^{-2\pi i(\nu+\varepsilon)t}-e^{-2\pi i\nu t}}{\varepsilon}\,dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)\,e^{-2\pi i\nu t}\cdot\frac{e^{-2\pi i\varepsilon t}-1}{-2\pi i\varepsilon t}\cdot(-2\pi i t)\,dt\\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-2\pi i\nu t}\cdot\frac{e^{-2\pi i\varepsilon t}-1}{-2\pi i\varepsilon t}\,dt\end{aligned}$$

Per ipotesi $g \in L^1$, inoltre la funzione $\frac{e^{-2\pi i\varepsilon t}-1}{-2\pi i\varepsilon t}$ è limitata, pertanto è possibile applicare il Teorema della Convergenza Dominata ottenendo:

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{f}}{d\nu}(\nu) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\hat{f}(\nu+\varepsilon)-\hat{f}(\nu)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-2\pi i\nu t}\cdot\frac{e^{-2\pi i\varepsilon t}-1}{-2\pi i\varepsilon t}\,dt\\ &= \int_{\mathbb{R}} g(t)e^{-2\pi i\nu t}\cdot\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{e^{-2\pi i\varepsilon t}-1}{-2\pi i\varepsilon t}\right)dt = \hat{g}(\nu).\end{aligned}$$

Il caso per $m > 1$ si prova per induzione. □

Osservazione 2. Il risultato precedente si può esprimere in modo impreciso ma suggestivo dicendo che *più rapidamente la funzione tende a zero all'infinito, più la sua trasformata di Fourier è regolare.*

Proposizione 6. *Sia $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap C^0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ è di classe C^1 a tratti e $f' \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, allora $\widehat{f'}(\nu) = 2\pi i\nu\hat{f}(\nu)$.*

Dimostrazione. Nelle ipotesi dell'enunciato si ha:

$$f(t) = f(0) + \int_0^t f'(s)\,ds.$$

Poichè $f' \in L^1$, esistono i limiti:

$$\lim_{t\to\pm\infty} f(t) = f(0) + \lim_{t\to\pm\infty}\int_0^t f'(s)\,ds,$$

e dato che $f \in L^1$, tali limiti sono entrambi nulli. Quindi si ha che $f \in C^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Applicando la definizione e integrando per parti si ottiene:

$$\widehat{f'}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} f'(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt = [f(t)e^{-2\pi i\nu t}]_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} f(t)\cdot(-2\pi i\nu)e^{-2\pi i\nu t}\,dt = 2\pi i\nu\hat{f}(\nu).$$

Per induzione si ha che se $f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) \cap C^{m-1}(\mathbb{R},\mathbb{C})$ con $f^{(m-1)}$ di classe C^1 a tratti e $f^{(i)} \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ per $i = 1,...,m$, allora $\widehat{f^{(m)}}(\nu) = (2\pi i\nu)^m\hat{f}(\nu)$ e quindi $\hat{f}(\nu)$ è $o(1/\nu^m)$. □

4. Convoluzione e formula di inversione

Definizione 6. Date $f, g \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$, il loro *prodotto di convoluzione* è dato da:

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)\,dt.$$

Si ha che $f*g \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ e $\|f*g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1}\cdot\|g\|_{L^1}$. Valgono le seguenti proprietà [4] per ogni $f,g,h \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$:

$$(f*g)*h = f*(g*h), \qquad (f+g)*h = f*h+g*h, \qquad f*g = g*f.$$

Dimostrazione. Omessa.[5] □

[4] Queste proprietà si possono riassumere dicendo che $(L^1(\mathbb{R},\mathbb{C}),+,*)$ è un'algebra di Banach associativa e commutativa.

[5] Per il Teorema di Fubini si ha:

$$\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}|g(x-t)|\,dx\right)|f(t)|\,dt = \int_{\mathbb{R}}\|g\|_{L^1}\cdot|f(t)|\,dt = \|g\|_{L^1}\int_{\mathbb{R}}|f(t)|\,dt = \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^1},$$

quindi la mappa $(t,x) \mapsto f(t)g(x-t)$ è in $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Allora per q.o. $x \in \mathbb{R}$ si ha che $t \mapsto f(t)g(x-t)$ è in $L^1(\mathbb{R})$, pertanto per q.o. $x \in \mathbb{R}$ l'integrale che definisce $f*g(x)$ è finito e definisce una funzione di L^1. Le altre proprietà sono ovvie.

Esempio 1. A titolo di esempio, siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, consideriamo la convoluzione tra una funzione $f \in L^1$ e la funzione $g \in L^1$ definita da $g(x) = 1$ se $a < x < b$ e $g(x) = 0$ altrimenti. Per definizione:

$$(f * g)(x) = (g * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} g(t)f(x-t)\,dt = \int_a^b f(x-t)\,dt \overset{w=x-t}{=} -\int_{x-a}^{x-b} f(w)\,dw = \int_{x-b}^{x-a} f(w)\,dw.$$

Esempio 2. Vogliamo fornire un esempio che aiuti a comprendere il significato del prodotto di convoluzione, utilizzando il linguaggio della teoria della probabilità [6].

Un uomo d'affari, ex studente del corso di Analisi 2, gestisce due negozi in due città molto lontane tra loro. In questo modo i due negozi non si fanno concorrenza tra loro e i profitti dell'uno sono indipendenti da quello dell'altro. Alla fine di ogni mese, il profitto (o la perdita se negativo) del primo negozio è un numero reale che indichiamo con e_1 e quello del secondo sarà indicato con e_2. Dopo alcuni mesi di attività, il nostro imprenditore ha acquistato sufficiente esperienza del mercato per poter prevedere a grandi linee quello che sarà il profitto del mese di ciascun negozio: più precisamente, dato un intervallo di $\mathbb{R}$, può prevedere la probabilità che il profitto e_1 sia in tale intervallo, e analogamente può fare per e_2. A tal proposito, forte dei suoi studi di analisi, assegna a ciascun negozio $i = 1, 2$ una funzione $f_i \in L^1$, $f_i(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\|f_i\|_{L^1} = 1$ in modo tale che per $i = 1, 2$ la probabilità che il profitto e_i *appartenga all'intervallo* $[a, b]$ non sia altro che $P_i([a, b]) := \int_a^b f_i(x)\,dx$. Naturalmente, il profitto di ogni negozio sarà sempre un numero reale, per cui si deve avere per $i = 1, 2$: $P_i(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} f_i(x)\,dx = 1 = \|f_i\|_{L^1}$, infatti *con certezza* tale profitto sarà un numero reale (assegnare probabilità 1 vuol dire infatti avere il 100% di probabilità). Più in generale, se I è un sottinsieme di $\mathbb{R}$, si ha: $P_i(I) := \int_I f_i(x)\,dx \leq 1$, che esprime la probabilità che il profitto e_i appartenga all'insieme I. In generale per $i = 1, 2$ si avrà per ogni intervallo $[a, b]$ che $P_i([a, b]) = \int_a^b f_i(x)\,dx \leq 1$ a meno che l'imprenditore non sia assolutamente certo che i profitti dei negozi non rimarranno compresi tra il valore a e il valore b. (Sperando per il suo bene che $a > 0$!) A priori il nostro imprenditore non può prevedere *con esattezza* il valore *preciso* di e_1 ed e_2: per ogni $f \in L^1$ e per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha infatti $P_i([c, c]) = \int_c^c f(x)\,dx = 0$, per cui la probabilità che il profitto sia *esattamente* il valore c è nulla, per questo la sua previsione resta a grandi linee.

A fine mese i profitti o perdite dei due negozi vengono convogliati nella sede centrale e quindi si considera $e_T = e_1 + e_2$. Il problema dell'imprenditore è il seguente: conoscendo l'andamento prevedibile di e_1 (modellizzato da f_1) e quello di e_2 (modellizzato da f_2) cosa si può dire del profitto complessivo e_T? Si può definire anche qui una funzione $F \in L^1$, $F(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $\|F\|_{L^1} = 1$ in modo tale da assegnare una probabilità al fatto che il profitto *complessivo* appartenga ad un certo intervallo? Naturalmente tale funzione dovrà in un certo senso *tenere conto* delle funzioni f_1 e f_2.

Dopo una cospicua donazione all'Università di Verona, al nostro imprenditore verrà svelato che tale funzione F non è altro che $f_1 * f_2$. Vediamo di capire il perché con un ragionamento intuitivo. Se immaginiamo di approssimare l'integrale di f_1 e f_2 con funzioni a gradino, abbiamo che la probabilità di avere e_1 in un intervallo infinitesimo $[x, x + \delta_x]$ è proprio $f_1(x)\delta_x$ e la probabilità di avere e_2 in un intervallo infinitesimo $[y, y + \delta_y]$ è proprio $f_2(y)\delta_y$. Quindi, la probabilità che tali condizioni siano soddisfatte simultaneamente è $f_1(x)f_2(y)\delta_x\delta_y$. Poiché $e_T = e_1 + e_2$, se vogliamo e_T in un intervallo infinitesimo $[z, z+\delta_z]$ dovrà essere $x+y = z$, ovvero $y = z-x$. Quindi la probabilità di avere simultaneamente e_T in $[z, z + \delta_z]$ supponendo e_1 in $[x, x + \delta_x]$ è $f_1(x)f_2(z - x)\delta_x\delta_z$. Integrando in x su tutto $\mathbb{R}$, otteniamo che la probabilità di avere e_T in $[z, z+\delta_z]$ è $(f_1 * f_2)(z)\delta_z$, per cui integrando in z su un insieme I si ha che la probabilità di avere $e_T \in I$ è $\int_I (f_1 * f_2)(z)\,dz$, come richiesto.

Proposizione 7. *Siano $f, g \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, allora $\widehat{f * g}(\nu) = \hat{f}(\nu) \cdot \hat{g}(\nu)$.*

Dimostrazione. Dalla definizione si ha:

$$\widehat{f * g}(\nu) = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(s)g(t-s)\,ds \right) e^{-2\pi i \nu t}\,dt.$$

---

[6] Quanto segue si intende *esclusivamente* a titolo euristico per facilitare la comprensione. Tutti gli insiemi considerati si sottintendono misurabili

Poichè la mappa $(s,t)\mapsto f(s)g(t-s)$ è in $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, si ha che anche la mappa $(s,t)\mapsto f(s)g(t-s)e^{-2\pi i\nu t}$ è in $L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$, infatti:

$$|f(s)g(t-s)e^{-2\pi i\nu t}|\leq|f(s)g(t-s)|,$$

quindi è lecito scambiare l'ordine di integrazione ottenendo:

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} f(s)\left(\int_{\mathbb{R}} g(t-s)e^{-2\pi i\nu t}\,dt\right)ds=\int_{\mathbb{R}} f(s)\left(\int_{\mathbb{R}} g(t-s)e^{-2\pi i\nu(t-s)}\,dt\right)e^{-2\pi i\nu s}\,ds\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(s)\left(\int_{\mathbb{R}} g(w)e^{-2\pi i\nu(w)}\,dt\right)e^{-2\pi i\nu s}\,ds=\int_{\mathbb{R}} f(s)e^{-2\pi i\nu s}\hat{g}(\nu)\,ds=\hat{f}(\nu)\cdot\hat{g}(\nu).\end{aligned}$$

□

Proposizione 8. *Siano $f,g\in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Se $f\in C^m$, $m\geq 1$, allora si ha*

$$\frac{d^m}{dx^m}(f*g)(x)=\left(\frac{d^mf}{dx^m}*g\right)(x).$$

Dimostrazione. Segue dal Teorema della Convergenza Dominata. □

Proposizione 9. *Sia $g\in L^1(\mathbb{R})$ con $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx=1$. Per $\lambda>0$ poniamo $g_\lambda(x)=\lambda g(\lambda x)$. Si ha sempre $\int_{\mathbb{R}} g_\lambda(x)\,dx=1$. Diremo che $\{g_\lambda\}_{\lambda>0}$ è una famiglia di unità approssimate di convoluzione.*

1. *Se $f\in L^1(\mathbb{R})$, allora $\lim_{\lambda\to+\infty}\|f*g_\lambda-f\|_{L^1}=0$.*
2. *Se f è limitata e uniformemente continua, allora $\lim_{\lambda\to+\infty}\|f*g_\lambda-f\|_\infty=0$.*
3. *Se $f\in L^2(\mathbb{R})$, allora $\lim_{\lambda\to+\infty}\|f*g_\lambda-f\|_{L^2}=0$.*

Dimostrazione. Omessa. [7] □

[7] La dimostrazione è basata sul seguente

Lemma 2. *Sia $1\leq p<+\infty$, $f\in L^p(\mathbb{R})$. Dato $t\in\mathbb{R}$, definiamo $\tau_t:L^p\to L^p$ ponendo $(\tau_t g)(x)=g(x-t)$. Allora la funzione $t\mapsto\tau_t f$ è uniformemente continua da $\mathbb{R}$ in $L^p(\mathbb{R})$.*

Dimostrazione. Si deve provare che per ogni $\varepsilon>0$ esiste $\delta>0$ tale che se $|t-s|<\delta$ si ha $\|\tau_t f-\tau_s f\|_{L^p}<\varepsilon$. Poichè la norma $\|\cdot\|_{L^p}$ è invariante per traslazioni, si ha $\|\tau_t f\|_{L^p}=\|f\|_{L^p}$, quindi $\|\tau_t f-\tau_s f\|_{L^p}=\|\tau_{t-s}f-f\|_{L^p}$, pertanto basta provare l'asserto per $s=0$ (uniformità). Siano $a,b\in\mathbb{R}$, $a\leq b$. Si ha $\|\tau_t\chi_{[a,b]}-\chi_{[a,b]}\|_{L^p}\leq 2^{1/p}|t|^{1/p}$ se $|t|\leq b-a$. Per linearità, l'asserto è vero per le funzioni a scalino. Infine se $f\in L^p$ e $\varepsilon>0$, sia g funzione a scalino con $\|f-g\|_{L^p}<\varepsilon$. Allora esiste $\delta>0$ tale che se $|t|<\delta$ si ha $\|\tau_t g-g\|_{L^p}<\varepsilon$. Quindi $\|\tau_t f-f\|_{L^p}\leq\|\tau_t f-\tau_t g\|_{L^p}+\|\tau_t g-g\|_{L^p}+\|g-f\|_{L^p}\leq 3\varepsilon$. □

Dimostrazione della proposizione: Si ha:

$$f*g_\lambda(x)-f(x)=\int_{\mathbb{R}} f(x-\xi)g_\lambda(\xi)\,d\xi-f(x)\int_{\mathbb{R}} g_\lambda(\xi)\,d\xi=\int_{\mathbb{R}}[f(x-\xi)-f(x)]\cdot\lambda g(\lambda\xi)\,d\xi=\int_{\mathbb{R}}\left[f(\left(x-\frac{\xi}{\lambda}\right)-f(x)\right]\cdot g(\xi)\,d\xi,$$

da cui: $|f*g_\lambda(x)-f(x)|=\int_{\mathbb{R}}\left|f(\left(x-\frac{\xi}{\lambda}\right)-f(x)\right|\cdot|g(\xi)|\,d\xi$.

(1) Supponiamo $f\in L^1$. Si ha:

$$\begin{aligned}\|f*g_\lambda(x)-f(x)\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|f\left(x-\frac{\xi}{\lambda}\right)-f(x)\right|\cdot|g(\xi)|\,d\xi\right)dx=\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}}\left|f\left(x-\frac{\xi}{\lambda}\right)-f(x)\right|dx\right)\cdot|g(\xi)|\,d\xi\\ &= \int_{\mathbb{R}}\|\tau_{\xi/\lambda}f-f\|_{L^1}\cdot|g(\xi)|\,d\xi\end{aligned}$$

Si è potuto invertire l'ordine di integrazione perchè $f,g\in L^1$. Si può applicare a questo punto il Teorema della Convergenza dominata perchè $\|\tau_{\xi/\lambda}f-f\|_{L^1}\cdot|g(\xi)|\leq 2\|f\|_{L^1}|g(\xi)|$ e $g\in L^1$. Si ottiene:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|f*g_\lambda(x)-f(x)\|_{L^1}=\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\|\tau_{\xi/\lambda}f-f\|_{L^1}\cdot|g(\xi)|\,d\xi=\int_{\mathbb{R}}\left(\lim_{\lambda\to\infty}\|\tau_{\xi/\lambda}f-f\|_{L^1}\right)\cdot|g(\xi)|\,d\xi=0.$$

(2) Supponiamo f limitata e uniformemente continua. Osserviamo che $f*g_\lambda$ è ben definita. Per ogni $\varepsilon>0$ esiste $N>0$ tale che se $\lambda>N$ si ha $\left|f\left(x-\frac{\xi}{\lambda}\right)-f(x)\right|<\varepsilon$, pertanto per $\lambda>N$ si ricava che per ogni $x\in\mathbb{R}$ vale $|f*g_\lambda(x)-f(x)|\leq\varepsilon\int_{\mathbb{R}}|g(\xi)|\,d\xi=\varepsilon\|g\|_{L^1}$. Quindi $\lim_{\lambda\to+\infty}\|f*g_\lambda-f\|_\infty=0$.

Lemma 3 (di dualità)**.** *Siano $f, g \in L^1$. Allora vale:*

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s) \cdot g(s)\, ds = \int_{\mathbb{R}} f(s) \cdot \hat{g}(s)\, ds.$$

Dimostrazione. Si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s) \cdot g(s)\, ds = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2\pi i s t}\, dt \right) \cdot g(s)\, ds = \int_{\mathbb{R}} f(t) \left(\int_{\mathbb{R}} g(s) e^{-2\pi i s t}\, ds \right) \cdot\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(s) \cdot \hat{g}(s)\, ds$$

dove si è potuto applicare il Teorema di Fubini e Tonelli per invertire l'ordine di integrazione dal momento che:

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(t) e^{-2\pi i s t}|\, dt \right) \cdot |g(s)|\, ds \le \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1} < +\infty.$$

□

Esempio 3. Sia $f(t) = e^{-\pi t^2}$. Calcoliamo la sua trasformata di Fourier. Si ha, osservando che la funzione è pari:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\nu) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} e^{-2\pi i t \nu}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t^2} \cos(2\pi t \nu)\, dt \\ \frac{d}{d\nu} \hat{f}(\nu) &= -\int_{\mathbb{R}} (2\pi t) \sin(2\pi t \nu) e^{-\pi t^2}\, dt = [e^{-\pi t^2} \sin(2\pi t \nu)]_{t=-\infty}^{t=+\infty} - \int_{\mathbb{R}} e^{-\pi t^2} \cos(2\pi t \nu) 2\pi \nu\, dt = -2\pi \nu \hat{f}(\nu). \end{aligned}$$

Per quanto riguarda $\hat{f}(0)$, si ha:

$$I_R^2 := \left(\int_0^R e^{-t^2}\, dt \right)^2 = \iint_{[0,R]\times[0,R]} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$$

Si ricava allora:

$$\begin{aligned} I_R^2 &\ge \iint_{\{x^2+y^2 \le R\}} e^{-(x^2+y^2)} = \int_0^{\pi/2} \int_0^R e^{-r^2} r\, dr d\theta, \\ I_R^2 &\le \iint_{\{x^2+y^2 \le R\sqrt{2}\}} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \int_0^{\pi/2} \int_0^{R\sqrt{2}} e^{-r^2} r\, dr d\theta. \end{aligned}$$

da cui si ha $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-R^2}) \le I_R^2 \le \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2R^2})$. Passando al limite per $R \to +\infty$ si ottiene $I_\infty = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ da cui si ricava $\hat{f}(0) = 1$. Pertanto $\hat{f}(\nu)$ risolve l'equazione $y'(\nu) = -2\pi\nu y(\nu)$ con condizione iniziale $y(0) = 1$. Si ha che l'unica soluzione di tale equazione è data da $y(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$. Quindi $\hat{f}(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$.

Proposizione 10 (Formula di inversione)**.** *Sia $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ tale che $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Allora $f \in C_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e vale:*

$$f(t) = \tilde{\Phi}(\hat{f})(t) := \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu) e^{2\pi i t \nu}\, d\nu.$$

Dimostrazione. Omessa.[8] □

---

(3) Supponiamo $f \in L^2$ e poniamo $h(x) = \int_{\mathbb{R}} \left| f\left(x - \frac{\xi}{\lambda}\right) - f(x) \right| \cdot |g(\xi)|\, d\xi$. Si ha allora (utilizzando il Teorema di Fubini e la disuguaglianza di Schwarz):

$$\begin{aligned} \|f * g_\lambda - f\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}} |f * g_\lambda(x) - f(x)|^2\, dx \le \int_{\mathbb{R}} h^2(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} h(x) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \left| f\left(x - \frac{\xi}{\lambda}\right) - f(x) \right| \cdot |g(\xi)|\, d\xi \right) dx \\ \text{(Fubini)} &= \int_{\mathbb{R}} |g(\xi)| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \left| f\left(x - \frac{\xi}{\lambda}\right) - f(x) \right| \cdot h(x)\, dx \right) d\xi \\ \text{(Schwarz)} &\le \int_{\mathbb{R}} |g(\xi)| \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \left| f\left(x - \frac{\xi}{\lambda}\right) - f(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}} h^2(x)\, dx \right)^{1/2} d\xi \\ &= \|h\|_{L^2} \int_{\mathbb{R}} \|\tau_{\xi/\lambda} f - f\|_{L^2} \cdot |g(\xi)|\, d\xi, \end{aligned}$$

e si conclude come nel caso $f \in L^1$.

[8]Poniamo $u(\nu) = e^{-\pi\nu^2}$ e $u_\lambda(\nu) = u(\nu/\lambda)$. Si ha che

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|\hat{f} u_\lambda - \hat{f}\|_{L^1} = 1$$

Corollario 1. *La trasformata di Fourier è iniettiva da $L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ a $C^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$.*

Dimostrazione. Siano $f,g \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})$ con $\hat{f} = \hat{g}$. Allora $\widehat{f-g} = 0$ e si può applicare la formula di inversione ottenendo $f-g=0$ da cui $f=g$. □

5. La teoria in L^2

Teorema 3 (Plancherel)**.** *La trasformata di Fourier $\Phi : L^1 \cap L_2 \to L^2$, $\Phi(f) = \hat{f}$ si estende ad un isomorfismo di L^2 in sé che ha come inverso su $L^1 \cap L^2$ l'antitrasformata $\tilde{\Phi}$. Tale isomorfismo è isometrico: se $f \in L^2$ si ha $\|f\|_{L^2} = \|\hat{f}\|_{L^2}$.*

Dimostrazione. Omessa.[9] □

Corollario 2. *La trasformata di Fourier per funzioni di L^2 è definita come:*

$$\hat{f}(\nu) = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{-2\pi i\nu x}\,dx =: v.p. \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\nu x}\,dx.$$

Questa definizione si riconduce alla precedente data per funzioni di L^1 nell'intersezione $L^1 \cap L^2$. In L^2 la trasformata è invertibile e l'inversa è data da

$$v.p. \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu x}\,d\nu.$$

L'uguaglianza

$$f = v.p. \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu x}\,d\nu$$

vale nel senso di L^2, ovvero:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) - \int_{-R}^{R} \hat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu x}\,d\nu \right|^2 dx = 0.$$

Infatti, poiché $|u_\lambda(\nu)\hat{f}(\nu)| \le |\hat{f}(\nu)|$ e $\hat{f} \in L^1$, è possibile applicare il Teorema della Convergenza Dominata ottenendo:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\nu)u_\lambda(\nu) - \hat{f}(\nu)|\,d\nu = \int_{\mathbb{R}} \lim_{\lambda\to\infty} |\hat{f}(\nu)u_\lambda(\nu) - \hat{f}(\nu)|\,d\nu = 0.$$

Da questo fatto segue che la funzione:

$$\tilde{\Phi}(\hat{f}u_\lambda)(t) := \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu)u_\lambda(\nu)\cdot e^{2\pi it\nu}\,d\nu$$

converge uniformemente in $C^0_0(\mathbb{R},\mathbb{C})$ alla funzione:

$$\tilde{\Phi}(\hat{f})(t) := \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu)\cdot e^{2\pi it\nu}\,d\nu.$$

Posto $v^t_\lambda(s) = u_\lambda(s)\cdot e^{2\pi its}$, si ha:

$$\hat{v}^t_\lambda(\nu) = \int_{\mathbb{R}} v^t_\lambda(s)e^{-2\pi i\nu s}\,ds = \tau_t(\hat{u}_\lambda)(\nu) = \tau_t(\lambda e^{-\pi\lambda^2\nu^2}) = \lambda e^{-\pi\lambda^2(\nu-t)^2},$$

e quindi posto $g(s) = e^{-\pi s^2}$, si ottiene che $g \in L^1$, $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx = 1$ e $\hat{v}_\lambda(\nu) = g_\lambda(\nu - t) = g_\lambda(t-\nu)$, dove $g_\lambda(x) = \lambda g(\lambda x)$. Allora per il lemma di dualità:

$$\tilde{\Phi}(fu_\lambda)(t) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu)v^t_\lambda(\nu)\,d\nu = \int_{\mathbb{R}} f(\theta)\hat{v}^t_\lambda(\theta)\,d\theta = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\theta)g_\lambda(t-\theta)\,d\theta = (f * g_\lambda)(t).$$

Dai teoremi sulla convoluzione si ha che il membro di destra converge in L^1 a f, quindi qualche sottosuccessione converge q.o. a f. D'altra parte il membro di sinistra converge uniformemente a $\tilde{\Phi}(\hat{f})$, quindi $f = \tilde{\Phi}(\hat{f})$.

[9] Consideriamo l'insieme $X = \{f \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C}) : \hat{f} \in L^1(\mathbb{R},\mathbb{C})\}$. Tale insieme contiene $C^\infty_c(\mathbb{R},\mathbb{C})$ e quindi è denso in $L^2(\mathbb{R},\mathbb{C})$. Inoltre si ha che la trasformata di Fourier conserva i prodotti scalari nel senso di L^2 tra elementi di X: ovvero se $f,g \in X$ si ha

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)\hat{\overline{\hat{g}}}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}}(x)\,dx.$$

Pertanto $\Phi : X \to X$ induce un'isometria lineare unitaria biettiva di X in sé, continua per le norme di L^2. Pertanto si estende ad un'isometria di L^2 in sé detta *trasformata di Fourier-Plancherel*. Data $f \in L^2$, per definire l'estensione è sufficiente considerare

$$\Phi(f)(\nu) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k(x)e^{-2\pi i\nu x}\,dx,$$

dove $\{f_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ è successione in L^1 e $f_k \to f$ in L^2. Su $L^1 \cap L^2$ si ha che l'antitrasformata coincide con $\tilde{\Phi}$ ricordando che se $f \in L^2$ e $\{g_\lambda\}_{\lambda>0}$ è una famiglia di unità approssimate di convoluzione, si ha che $f * g_\lambda$ converge a f in L^2.

In altre parole non è vero in generale che per ogni $x \in \mathbb{R}$ i valori $f(x)$ e *v.p.* $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu x}\,d\nu$ coincidano. *Se* $f \in L^2$ *si ha*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\nu)|^2\,d\nu.$$

Inoltre se $f, g \in L^2$ *si ha:*

$$\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}.$$

Esempio 4. Definiamo la seguente funzione di $L^1(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{rect}(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| > 1/2, \\ 1/2 & \text{se } x = \pm 1/2, \\ 1 & \text{se } |x| > 1/2. \end{cases}$$

Calcoliamone la trasformata di Fourier:

$$\widehat{\mathrm{rect}}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{rect}(t)e^{-2\pi i\nu t}\,dt = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2\pi i\nu t}\,dt = \left[\frac{e^{-2\pi i\nu t}}{-2\pi i\nu}\right]_{t=-1/2}^{t=1/2} = \frac{1}{\pi\nu}\frac{e^{\pi i\nu} - e^{-\pi i\nu}}{2i} = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}.$$

Tale funzione prende il nome di $\mathrm{sinc}(\nu) := \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$, per le proprietà della trasformata di Fourier, si ha che $\mathrm{sinc} \in C^\infty$ (perché rect è nulla fuori da un compatto) e $\lim_{\nu\to\pm\infty} \mathrm{sinc}(\nu) = 0$ (perché $\mathrm{rect} \in L^1$).

Esempio 5. Consideriamo la funzione "a triangolo" $\triangle(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$, nulla fuori da $[-1, 1]$ e il cui grafico in $[1, -1]$ coincide con quello di $1 - |x|$. Tale funzione è in $L^1(\mathbb{R})$, inoltre è continua e C^1 a tratti. La sua derivata vale 1 in $]-1, 0[$, -1 in $]0, 1[$, 0 se $|x| > 1$ e non è definita nei punti $\pm 1, 0$. Possiamo quindi dire che per $x \neq \{\pm 1, 0\}$ si ha

$$\triangle'(x) = \mathrm{rect}(x + 1/2) - \mathrm{rect}(x - 1/2) \in L^1$$

Applicando la trasformata della derivata e del ritardo, si ha che:

$$\begin{aligned} \widehat{\triangle'}(\nu) &= 2\pi i\nu\hat{\triangle}(\nu) = \mathrm{rect}\widehat{(x + 1}/2) - \mathrm{rect}\widehat{(x - 1}/2) \\ &= e^{\pi i\nu}\widehat{\mathrm{rect}}(\nu) - e^{-\pi i\nu}\widehat{\mathrm{rect}}(\nu) = (e^{\pi i\nu} - e^{-\pi i\nu})\mathrm{sinc}(\nu) \end{aligned}$$

Pertanto:

$$\hat{\triangle}(\nu) = \frac{e^{\pi i\nu} - e^{-\pi i\nu}}{2\pi i\nu}\mathrm{sinc}(\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\mathrm{sinc}(\nu) = \mathrm{sinc}^2(\nu).$$

Osserviamo che $\mathrm{sinc}^2(\nu) \in L^1$, infatti dalla definizione si ha che sinc^2 è continua in 0 dove vale 1 pertanto esiste $\delta > 0$ tale che $|\mathrm{sinc}^2(x)| < 2$ se $|x| < \delta$ (esercizio dalla definizione di limite). D'altra parte per $|x| > \delta$ si ha $|\mathrm{sinc}^2(x)| \leq \frac{1}{\pi^2 x^2}$, quindi:

$$\int_{\mathbb{R}} |\mathrm{sinc}^2(x)|\,dx \leq \int_{-\delta}^{\delta} 2\,dx + \int_{\mathbb{R}\setminus[-\delta,\delta]} \frac{1}{\pi^2 x^2} < +\infty.$$

Pertanto vale la formula di antitrasformazione:

$$\triangle(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{sinc}^2(y)e^{2\pi ixy}\,dy$$

Osservando che sinc^2 è pari, si ha anche:

$$\triangle(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(y)e^{2\pi ixy}\,dy \overset{t=-y}{=} -\int_{+\infty}^{-\infty} \mathrm{sinc}^2(-t)e^{-2\pi ixt}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sinc}^2(t)e^{-2\pi ixt}\,dt = \widehat{\mathrm{sinc}^2}(x).$$

In definitiva si ha $\hat{\triangle} = \mathrm{sinc}^2$ e $\widehat{\mathrm{sinc}^2} = \triangle$.

Proposizione 11. *Sia* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *regolare a tratti, ovvero tale per cui esistano finiti per ogni* $t_0 \in \mathbb{R}$ *i seguenti limiti:*

$$\lim_{t\to t_0^+} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \qquad \lim_{t\to t_0^-} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

(ovvero f *ammette derivata destra e sinistra in ogni punto). Allora si ha per ogni* $t_0 \in \mathbb{R}$*:*

$$\frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} = \lim_{m\to+\infty} \int_{-m}^{m} \hat{f}(\nu)e^{2\pi i\nu t_0}\,d\nu,$$

dove:

$$f(t_0^+) = \lim_{t \to t_0^+} f(t), \qquad f(t_0^-) = \lim_{t \to t_0^-} f(t).$$

Dimostrazione. Omessa. □

Esempio 6. Vogliamo ora calcolare l'antitrasformata di Fourier $\tilde{\Phi}(\mathrm{rect})$ della funzione $\mathrm{rect} \in L^1 \cap L^2$. Osserviamo che si ha, per parità,

$$\int_{-R}^{R} \mathrm{rect}(\nu) e^{2\pi\nu t}\, d\nu \overset{x=-t}{=} -\int_{+R}^{-R} \mathrm{rect}(-x) e^{-2\pi x t}\, dx = \int_{-R}^{R} \mathrm{rect}(x) e^{-2\pi x t}\, dx$$

Poiché $\mathrm{rect} \in L^1$, il limite per $R \to +\infty$ esiste e vale $\widehat{\mathrm{rect}}(t) = \mathrm{sinc}(t)$. In altre parole si ha $\tilde{\Phi}(\mathrm{rect})(t) = \mathrm{sinc}(t)$ puntualmente. Per l'iniettività della trasformata si ha quindi[10] $\widehat{\mathrm{sinc}}(\nu) = \mathrm{rect}(\nu)$. In particolare, $\mathrm{sinc} \notin L^1$ perché la sua trasformata non è continua.

Esempio 7. Applicando il risultato sulla trasformata della convoluzione, si prova facilmente che $\mathrm{rect} * \mathrm{rect} = \triangle$ e $\mathrm{sinc} * \mathrm{sinc} = \mathrm{sinc}$.

6. Applicazioni all'equazione del calore

Esempio 8. Sia $k > 0$ e si determini la soluzione dell'equazione del calore in una sbarra infinita:

$$\begin{cases} \partial_t u = k\partial^2_{xx} u = 0 & \text{in }]0, +\infty[\times\mathbb{R}, \\ u(0, x) = u_0(x) \in L^2(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Consideriamo la trasformata di Fourier di u rispetto alle sole variabili spaziali. Si ha:

$$\hat{u}(t, s) = \int_{\mathbb{R}} u(t, x) e^{-2\pi i s x}\, dx.$$

Dalle proprietà della trasformata di Fourier, trasformando l'equazione si ottiene:

$$\begin{cases} \partial_t \hat{u} = -4\pi^2 k s^2 \hat{u} & \text{in }]0, +\infty[\times\mathbb{R}, \\ \hat{u}(0, s) = \hat{u}_0(s) \in L^2(\mathbb{R}). \end{cases}$$

Pertanto si ottiene per ogni $s \in \mathbb{R}$ fissato:

$$\hat{u}(t, s) = \hat{u}_0(s) e^{-4\pi^2 s^2 k t}.$$

La soluzione si ottiene antitrasformando:

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{u}_0(s) e^{-4\pi^2 s^2 k t} e^{2\pi i s x}\, dx = u_0 * \left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4kt}}}{\sqrt{4\pi k t}} \right).$$

Esercizio 1. Si determini la soluzione dell'equazione del calore in una sbarra infinita: $\partial_t u = \partial^2_{xx} u$ in $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ con condizione iniziale $u(0, x) = e^{-x^2}$.

Svolgimento. La trasformata di Fourier di $u_0(x) = e^{-x^2}$ è $\hat{u}_0(s) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} e^{2\pi i s x}\, dx = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 s^2}$.

Quindi si ha: $u(t, x) = \sqrt{\pi} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\pi^2(1+4t)s^2} e^{2\pi i s x}\, ds = \frac{1}{1 + 4t}\, e^{-\frac{x^2}{1+4t}}.$

[10] In linea di principio questa uguaglianza è vera solo nel senso di L^2, tuttavia, poiché sinc è regolare e rect è regolare a tratti e in ogni punto assume il valore pari alla media tra il limite destro e sinistro, si può vedere che vale puntualmente.

7. Riassunto

Spazi funzionali:

$$L^1(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < +\infty \right\}, \qquad \|f\|_{L^1} = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx.$$

$$L^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx < +\infty \right\}, \qquad \|f\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx \right)^{1/2}.$$

$$C_0^0(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f : \text{ continua e } \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0 \right\}, \qquad \|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|.$$

Disuguaglianza di Schwarz: per ogni $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|\, dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx \right)$.

Convoluzione: formalmente per ogni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $(f*g)(x) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)|\, dt$. Se $f, g, h \in L^1$ allora $f*g \in L^1$, $(f*g)*h = f*(g*h)$, $(f+g)*h = f*h + g*h$, $f*g = g*f$. Se $f \in C^m$ si ha $\frac{d^m}{dx^m}(f*g) = \frac{d^m f}{dx} * g$.

Trasformata di Fourier: per ogni $f \in L^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ si pone $\hat{f}(\nu) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-2\pi i\nu t}\, dt$. Si ha $\hat{f} \in C_0^0(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ e $|\hat{f}(\nu)| \leq \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|\, d\xi$ per ogni $\nu \in \mathbb{R}$. La trasformata di Fourier è iniettiva.

Lemma di dualità: per ogni $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ vale $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(s) \cdot g(s)\, ds = \int_{\mathbb{R}} f(s) \cdot \hat{g}(s)\, ds$.

Formula di inversione: Sia $f \in L^1$ tale che $\hat{f} \in L^1$, allora $f(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\nu)e^{+2\pi i\nu t}\, d\nu$.

Teorema di Plancherel e teoria in L^2: La trasformata di Fourier per funzioni di L^2 è definita come:

$$\hat{f}(\nu) = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)e^{-2\pi i\nu x}\, dx =: v.p. \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i\nu x}\, dx.$$

Questa definizione si riconduce alla precedente data per funzioni di L^1 nell'intersezione $L^1 \cap L^2$. In L^2 la trasformata è invertibile e l'inversa è data da $v.p. \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)e^{2\pi i\nu x}\, dx$. L'uguaglianza $f = v.p. \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)e^{2\pi i\nu x}\, d\nu$, non vale nel senso puntuale, ma nel senso di L^2, ovvero: $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \left| f(x) - \int_{-R}^{R} \hat{f}(x)e^{2\pi i\nu x}\, d\nu \right|^2 dx = 0$.

Convergenza puntuale: Se $f \in L^2$ ammette derivata destra e sinistra in ogni punto, si ha che, puntualmente, $\dfrac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} = v.p. \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(t_0)e^{2\pi i\nu t_0}\, d\nu$, essendo tale uguaglianza vera in senso puntuale.

Funzione	Trasformata	Funzione	Trasformata
$\mathrm{rect}(t)$	$\mathrm{sinc}(\nu)$	$\mathrm{sinc}(t)$	$\mathrm{rect}(\nu)$
$\dfrac{1}{a^2+t^2}$, $a > 0$	$\dfrac{\pi}{a} e^{-a\|2\pi\nu\|}$	$e^{-a\|t\|}$, $a > 0$	$\dfrac{2a}{a^2 + (2\pi\nu)^2}$
$\Delta(t)$	$\mathrm{sinc}^2(\nu)$	$\mathrm{sinc}^2(t)$	$\Delta(\nu)$
$e^{-\pi t^2}$	$e^{-\pi\nu^2}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2}$

Alcune proprietà della trasformata:

Condizioni	Funzione da trasformare	Funzione trasformata
$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$	$\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)$	$\alpha \hat{f}_1(\nu) + \beta \hat{f}_2(\nu)$
$\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$f(\lambda t)$	$\frac{1}{\lvert\lambda\rvert} \hat{f}\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)$
$t_0 \in \mathbb{R}$	$f(t - t_0)$	$\hat{f}(\nu) e^{-2\pi i t_0 \nu}$
$\nu_0 \in \mathbb{R}$	$e^{2\pi i \nu_0 t} f(t)$	$\hat{f}(\nu - \nu_0)$
$t \mapsto t f(t) \in L^1(\mathbb{R})$	$(-2\pi i t) f(t)$	$\frac{d}{d\nu} \hat{f}(\nu)$
$t \mapsto t^m f(t) \in L^1$, $m \in \mathbb{N}$	$(-2\pi i t)^m f(t)$	$\frac{d^m}{d\nu^m} \hat{f}(\nu)$
$f \in L^1 \cap C^0_0$, f a tratti C^1, $f' \in L^1$.	$f'(t)$	$2\pi i \nu \hat{f}(\nu)$
$f \in L^1 \cap C^{m-1}$, $f^{(m-1)}$ a tratti C^1, $f^{(i)} \in L^1$, $i = 1...m$.	$f^{(m)}(t)$	$(2\pi i \nu)^m \hat{f}(\nu)$
$f, g \in L^1(\mathbb{R})$	$(f * g)(t)$	$\hat{f}(\nu) \cdot \hat{g}(\nu)$
$f, g \in L^2(\mathbb{R})$	$f(t) g(t)$	$(\hat{f} * \hat{g})(\nu)$

Dipartimento di Informatica, Università di Verona

Strada Le Grazie 15 - I-37134 Verona, Italy.
E-mail address: `antonio.marigonda@univr.it`