ELEMENTI DI GEOMETRIA

Prof. M. Spera

a.a. 2007/08

Lezione VI

Le coniche

Ci occuperemo soprattutto di coniche reali, lavorando nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che penseremo però complessificato, per poter interpretare più agevolmente talune particolari situazioni geometriche; ma considereremo anche direttamente coniche complesse, in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Conviene però partire in astratto.

Def. Sia V uno spazio vettoriale reale o complesso di dimensione $n+1$, e sia $\mathbb{P}(V)$ il corrispondente spazio proiettivo (di dimensione n). Sia q una forma quadratica su V. Si dice ipersuperficie associata a q l'insieme

$$Q = \{ \langle v \rangle \in \mathbb{P}(V) \mid v \neq \underline{0},\ q(v) = 0 \}$$

$$= \{ \langle v \rangle \in \mathbb{P}(V) \mid v \text{ è isotropo per } q \}$$

ovvero, a parole, un'ipersuperficie consiste nelle generatrici del cono isotropo associato ad una forma quadratica q.

Se $\dim V = 3$ si parla di conica ($\mathcal{C}$)

$\dim V = 4$ si parla di quadrica (Q)

Def. Due coniche (o, più in generale, due ipersuperficie) $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ si dicono proiettivamente equivalenti (e scriviamo) $\mathcal{C}_1 \cong \mathcal{C}_2$ se

$$\boxed{q_1 \approx \rho\, q_2}$$

congruenza di forme quadratiche

per qualche $\rho \neq 0$

(tale definizione va bene sia su $\mathbb{R}$ che su $\mathbb{C}$)

Lavoriamo in coordinate, e poniamo $n = 3$.

Una <u>conica</u> $\mathcal{C}$ è dunque il luogo di punti (contato con le opportune molteplicità, v. oltre) $[x_0, x_1, x_2]$ di $\mathbb{P}^2$ ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) tali che

$$(*) \quad \boxed{X^t A X = 0} \qquad X = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \left(\neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

Dove $A = A^t \neq 0$ è simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} = a_{ji}$$

A: <u>matrice di $\mathcal{C}$</u>

Esplicitamente $(*)$ è $\boxed{\sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = 0}$

La <u>forma quadratica</u> q_A (in $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{C}^3$) definita da

$$q_A(X) = X^t A X$$

e la corrispondente <u>forma bilineare simmetrica</u> polare b_A, $b_A(X;Y) = X^t A Y$ si dicono <u>associate</u> a $\mathcal{C}$

È evidente che l'insieme degli X t.c.

$$(\dagger) \quad X^t A X = 0$$

rappresenta il <u>cono isotropo</u> di q_A

Notiamo come tutto sia <u>invariante</u> per <u>trasformazioni proiettive</u> (indotte da $M \in GL(3, \mathbb{R}/\mathbb{C})$)

Posto infatti $X = MY \qquad M \in GL(3, \mathbb{R}/\mathbb{C})$

si ha:

$$X^t A X = (MY)^t A M Y = Y^t \underbrace{M^t A M}_{\equiv B} Y$$

$$= Y^t B Y$$

sicché q_A è rimpiazzata dalla forma quadratica q_B ad essa congruente; ma è altresì chiaro che, essendo la conica determinata dai vettori isotropi, q_A e $q_{\rho B}$, $\rho \neq 0$ danno luogo alla <u>stessa conica</u> (cf. la (4))

Dunque i) q_A e q_B definiscono la stessa conica (in due riferimenti diversi)

$\iff \quad A \approx \rho B \qquad \rho \neq 0$ per qualche

ii) Utilizzando invece uno stesso riferimento, $\mathcal{C}_A$ e $\mathcal{C}_B$ risultano essere proiettivamente equivalenti

$\iff \quad A \approx \rho B \qquad \rho \neq 0$ per qualche

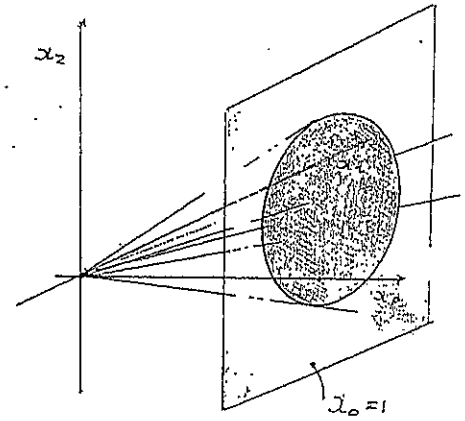
* L'equazione di una conica dipende in modo effettivo da 5 parametri: pertanto 5 pti in posizione generica determinano una e una sola conica.
Cercando poi l'equazione di 2° grado, una retta qualsiasi incontra la conica in due punti (eventualmente complessi coniugati nel caso reale)

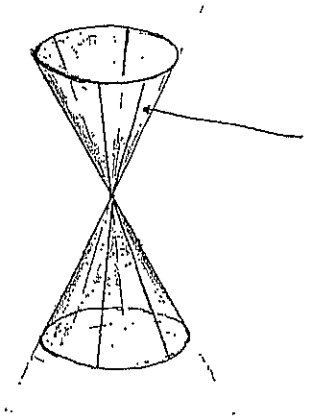
* Commento Si noti come in questo modo apparentemente astratto recuperiamo completamente l'intuizione classica (Apollonio di Perge, 250-190 a.C.):

tutti i tipi di conica si ottengono come sezioni di un singolo cono (doppio)

Già ora, nel nostro caso, si vede come i punti al finito di $\mathcal{C}$ si ottengono

intersecando le generatrici del cono isotropo col piano $x_0 = 1$

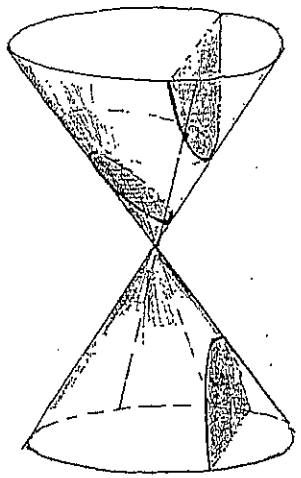




★ retta: $a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 = 0$

luogo degli zeri di una forma lineare nelle var. x_0, x_1, x_2

[pol. omogeneo di 1° grado nelle x_0, x_1, x_2]



★ Conica

luogo degli zeri di una forma quadratica

[pol. omogeneo di 2° grado nelle x_0, x_1, x_2]

Il cono isotropo è l'oggetto intrinseco: l'apparire di sezioni diverse dipende dalla scelta del riferimento proiettivo, che permette di "codificare" le generatrici del cono stesso (i punti della conica) in modi differenti:

★ Classificazione proiettiva delle coniche

approccio algebrico

★ Caso complesso $\quad \mathcal{C} : [X] : \quad \overset{q_A(X)}{\overset{\shortparallel}{X^t A X}} = 0 \quad X \neq \underline{0}$

$A \in M_3(\mathbb{C}) \quad , \quad A = A^t$

Applichiamo a q_A il teorema di diagonalizzazione (su $\mathbb{C}$, algebricamente chiuso) in un opportuno sistema di coordinate, q_A ha la forma

$$\left[q_A(\Xi) = \Xi^t D \Xi = \alpha_0 \xi_0^2 + \alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2 \right] \qquad \Xi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} \alpha_0 & & 0 \\ & \alpha_1 & \\ 0 & & \alpha_2 \end{pmatrix}$$

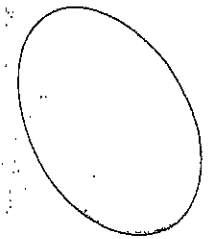
ie $\mathcal{C} : [\Xi] : q_A(\Xi) = \Xi^t D \Xi = 0$

$\Xi \neq 0 \qquad \alpha_0 \xi_0^2 + \alpha_1 \xi_1^2 + \alpha_2 \xi_2^2 = 0$

ove (consideriamo i casi essenzialmente diversi e ricordiamo che il rango è un invariante completo per congruenza ($K = \mathbb{C}$)

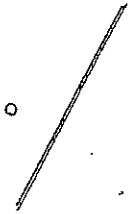
caso complesso

$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_1=1$ $r=3$ (non degenere)	$\alpha_0=0$, $\alpha_1=\alpha_2=1$ $r=2$ (degenere)	$\alpha_0=\alpha_1=0$; $\alpha_2=1$ $r=1$ (degenere)
$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$	$D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$
$\boxed{\xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2=0}$	$\boxed{\xi_1^2+\xi_2^2=0}$	$\boxed{\xi_2^2=0}$
* [conica generale complessa (o irriducibile)]	* [conica riducibile (e spezzata in due rette complesse)]	* [conica riducibile (spezzata in due rette coincidenti)]



$$(\xi_1+i\xi_2)(\xi_1-i\xi_2)=0$$

fattori lineari



Dunque, nel caso complesso (i.e., dal punto di vista proiettivo (o vero, a meno di equivalenza proiettiva) un solo tipo di conica irriducibile.

v. oltre per un'interpretazione geometrica in termini di polarità

◆ caso reale

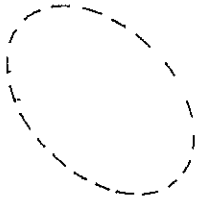
rifacendoci al teorema di Sylvester, si hanno i casi seguenti

[non degenere : $r=3$]
(irriducibile)

$\alpha_0=\alpha_1=\alpha_2=1$

$\boxed{\xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2=0}$

* [conica priva di punti reali]
(si ricordi che $(0,0,0)$ non è soluzione)

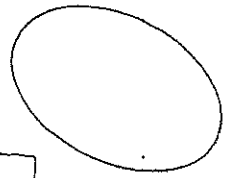


$\alpha_0=-1$ $\alpha_1=\alpha_2=1$

$\boxed{-\xi_0^2+\xi_1^2+\xi_2^2=0}$

* [conica generale (a punti reali)] (irriducibile)

* Signatura : $(2,1)$
oppure $(1,2)$
(si ricordi la def. di equivalenza proiettiva)



[semplicemente degenere : $r=2$]

$\alpha_0=0$, $\alpha_1=\alpha_2=1$

$\xi_1^2+\xi_2^2=0$

un punto: $[1,0,0]$

$\alpha_0=0$, $\alpha_1=1$, $\alpha_2=-1$

$\xi_1^2-\xi_2^2=0$

$(\xi_1+\xi_2)(\xi_1-\xi_2)=0$

coppia di rette

[doppiamente degenere : $r=1$]

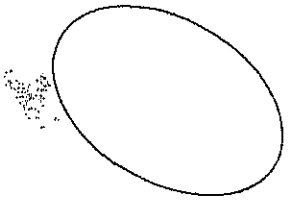
$\alpha_0 = \alpha_1 = 0 \qquad \alpha_2 = 1$

$\xi_2^2 = 0$ coppia di rette coincidenti

Dunque, dal punto di vista proiettivo, nel caso reale esiste, a meno di equivalenza, un solo tipo di conica a punti reali irriducibile

Essa corrisponde ad una segnatura del tipo $(2,1)$ o $(1,2)$

$(x^t A x = 0 \iff x^t (-A) x = 0)$



◆ Sulle coniche degeneri

Si ricorda che $\mathfrak{a} := \det A = 0$ corrisponde ad una conica $\mathcal{C}$ degenere (riducibile) spezzata in due rette.

(potremmo ulteriormente distinguere le coniche degeneri di tipo iperbolico, parabolico, ellittico)

Determiniamo esplicitamente tali rette.
Lavoriamo nel piano affine, ponendo $x_0 = 1$ (per fissare le idee)

Leggendo, per esempio, l'equazione di $\mathcal{C}$ come equazione di 2° grado in x, a coefficienti funzioni di y, la condizione $\mathfrak{a} = 0$ equivale a dire che il discriminante Δ di tale equazione è un quadrato

$(\Delta = (\alpha y + \beta)^2)$ sicché l'equazione di $\mathcal{C}$ si fattorizza come

$$\underbrace{(\alpha' x + \beta' y + \gamma')}_{r'} \underbrace{(\alpha'' x + \beta'' y + \gamma'')}_{r''} = 0$$

$r' r'' = 0$ (simbolicamente) I singoli fattori danno le componenti di $\mathcal{C}$

• Esempio

$\mathcal{C}$: $\quad x_1^2 - x_2^2 + x_1 x_0 + x_2 x_0 = 0$

$\Omega = \det A = 0$ (verificare)

Posto $x_0 = 1$ si

(*) $\quad x^2 - y^2 + x + y = 0$

ovvero

$$(x+y)(x-y) + x + y = 0$$

$$(x+y)(x-y+1) = 0$$

e $\mathcal{C}$: rr' $(=0)$ $\quad r: \; x+y=0$

$r': \; x-y+1=0$

$x = -y$
$x = y-1$

sono le radici di (*) come equazione in x

⚠ fare attenzione all'interpretazione dell'equazione

Se $\sqrt{\ }$ è intesa come estrazione di radice nel campo complesso ("a più valori") si può scrivere $\sqrt{z^2} = \pm z$

La soluzione di $ax^2 + bx + c = 0$ va scritta come

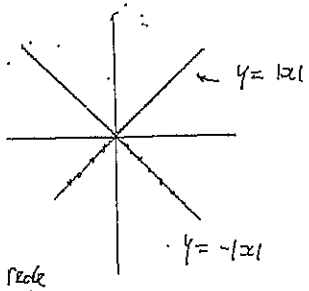
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$ (notare!! si hanno esattamente due radici).

◇ Digressione

$$y = \sqrt{x^2}$$

Interpretazione reale di $\sqrt{\ }$

$y = |x|$



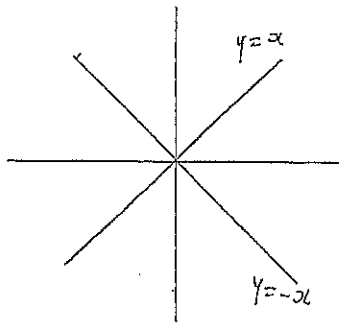
reale

$\pm\sqrt{x^2} = \pm|x|$

Interpretazione complessa di $\sqrt{\ }$

$y = \pm x$

(le due radici complesse di x^2 $(\neq 0)$ sono $\pm x$)



Dunque:

Insiemisticamente si ottiene sempre $(x-y)(y+x)=0$

ma le due interpretazioni sono affatto diverse.

L'interpretazione complessa è quella corretta, nel nostro caso

Tangente ad una conica (proiettiva)

Sviluppiamo un approccio diretto (senza ricorrere all'analisi). Si veda il capitolo sul calcolo differenziale

Sia $\mathcal{C}$ generale (poniamoci nel caso reale, ma il discorso vale anche nel caso complesso); pertanto, se $\mathcal{C}: \; X^t A X = 0$ (scriviamo direttamente così, per evitare pedanterie), è $r(A) = 3$.

Sia $P_0 = [X_0] \in \mathcal{C}$ e sia P_0 proprio, per fissare le idee

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0^0 \\ x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

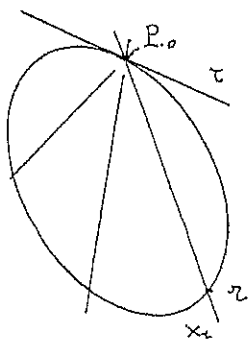
spesso scriveremo semplicemente X al posto di $[X]$ a patto di ricordarsi che si usano coordinate omogenee (sono definite a meno di un fattore di proporzionalità non nullo)

Dunque: $X_0^t A X_0 = 0$

Sia ora r una retta generica passante per X_0; essa avrà equazioni parametriche

$$X = X_0 + \xi L \qquad L = \begin{pmatrix} l_0 \\ l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_0 = x_0^0 = 1 \\ x_1 = x_1^0 + \xi l_1 \\ x_2 = x_2^0 + \xi l_2 \end{cases} \qquad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \xi \in \mathbb{R}$$



tale retta incontrerà $\mathcal{C}$ in X_0 e X_1 (sostituendo nell'equazione della conica, si ottiene un'equazione di secondo grado in ξ che ha una radice $\xi = 0$).

Def. r è tangente a $\mathcal{C}$ in $[X_0]$ se $\xi = 0$ è radice doppia di tale equazione (ovvero, X_1 coincide con X_0).

Esplicitamente, si ha (con le notazioni precedenti)

$$0 = (X_0 + \xi L)^t A (X_0 + \xi L) =$$

$$= \underbrace{X_0^t A X_0}_{=0} + \xi \left[L^t A X_0 + X_0^t A L \right] + \xi^2 L^t A L =$$

$$= \left[\text{osservato che } L^t A X_0 = b_A(L, X_0) = b_A(X_0, L) = X_0^t A L \right]$$

$$= 2\xi X_0^t A L + \xi^2 \underbrace{L^t A L}_{\neq 0} \quad (\diamond \text{ vedi oltre})$$

La richiesta testè formulata conduce a

$$X_0^t A L = 0$$

e quindi

a

$$X_0^t A (X - X_0) = 0$$

ovvero

$$X_0^t A X = 0$$

[equazione della retta tangente alla conica $\mathcal{C}$ in $[X_0] \equiv P_0$]

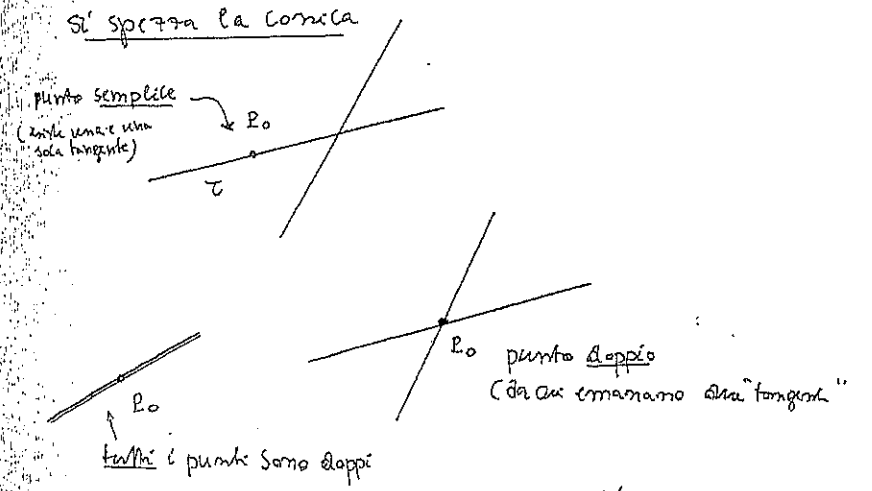
(versione intrinseca $b(X_0, X) = 0$)

(☆) Si osservi che deve aversi

$$L^t A L \neq 0$$

poiché, in caso contrario, la retta τ sarebbe interamente contenuta in $\mathcal{C}$, ovvero, τ costituirebbe una delle due rette, eventualmente coincidenti, in cui si spezza la conica

(X_0, L)



☆ Polarità definita da una conica generale

Consideriamo ancora l'equazione

$$\boxed{X_0^t A X = X^t A X_0 = 0}$$

ma con $P_0 = [X_0]$ arbitrario, in $\mathbb{P}^2$.

Essa rappresenta l'equazione di una retta p_0, detta polare di P_0 rispetto a $\mathcal{C}$

Si noti che, dal punto di vista vettoriale, stiamo determinando $\langle X_0 \rangle^{\perp_A}$ (spazio A-ortogonale di $\langle X_0 \rangle$)

È chiaro che $P_0 \in p_0 \iff p_0$ è tangente a $\mathcal{C}$ in P_0.

Importantissimo è il

☆ Teorema di reciprocità Siano $P_0, P_1 \in \mathbb{P}^2$, e siano p_0, p_1 le rispettive polari rispetto ad una stessa conica (irriducibile) $\mathcal{C}$.

Allora $P_0 \in p_1 \iff P_1 \in p_0$

Dim. Immediata da $0 = X_0^t A X_1 = X_1^t A X_0$ (si ricordi che $A^t = A$)

Il principio di reciprocità ha la seguente notevolissima conseguenza

Teorema: Sia data in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}/\mathbb{C})$ una conica generale $\mathcal{C}$. Sia $P \notin \mathcal{C}$. Detti $P_1, P_2 \in \mathcal{C}$ i punti di contatto delle tangenti condotte da P a $\mathcal{C}$ [nel caso reale, essi possono risultare complessi coniugati, e in tal caso il punto viene detto interno a $\mathcal{C}$]. Allora $p = P_1P_2$ polare di P

(Se $P \in \mathcal{C}$, $p = \tau$, tangente a $\mathcal{C}$ in P.)

Osservazione. Per determinare le tangenti ad una conica condotte da $\mathcal{C}$ si può pertanto o, direttamente, scrivere l'equazione del fascio di rette di centro P e imporre che i punti di intersezione di tale retta con $\mathcal{C}$ coincidano: si ottengono infatti due soluzioni, risolvendo un'equazione di secondo grado in un parametro affine (non omogeneo) λ descrivente il fascio, che esprime precisamente l'annullarsi del discriminante dell'equazione

in λ ottenuta da

$$\begin{cases} X^t A X = 0 \\ \Lambda^t (X - X_P) = 0 \end{cases} \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

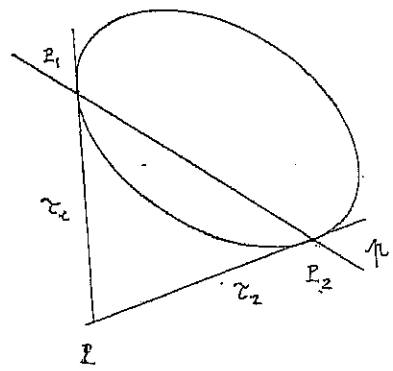
(per es. se P è proprio, si può, per fissare le idee porre $\Lambda = (t, 1, \lambda)$ ..) $\lambda = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

⚠ Se l'equazione si abbassa di grado una soluzione è la retta "mancante" del fascio, descritto dal parametro affine.

Oppure, si può calcolare p e determinare i punti di intersezione di questa con $\mathcal{C}$.

Vedremo in seguito un terzo metodo, più elegante, che ci consentirà di scrivere una formula chiusa.

Dim. del teorema



Si osservi che $P \in r_1 = p_1$

$P \in r_2 = p_2$

$\Rightarrow$ (principio di reciprocità)

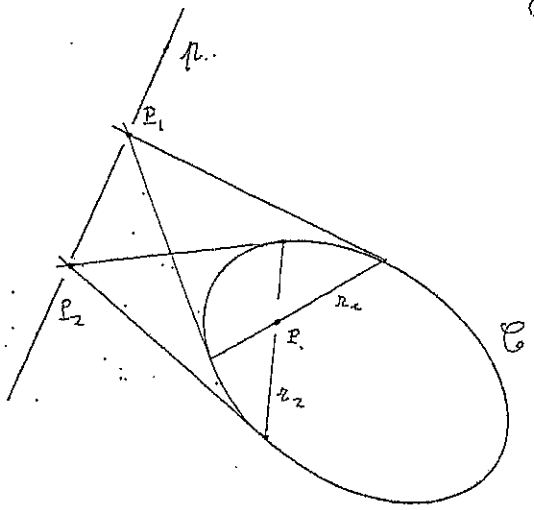
$P_1 \in p$

$P_2 \in p$

$\Rightarrow$ (essendo $P_1 \neq P_2$) $p = P_1P_2$

Osservazione i) Se P' descrive p^*, la polare corrispondente, p', descrive il fascio di rette di centro P (Chiaro dal principio di reciprocità.

ii) Se P è interno a $\mathcal{C}$ ((caso reale). vale a dire le tangenti sono complesse coniugate), la polare p si può determinare tracciando due rette distinte per P, e condurre dai rispettivi pti di intersezione le tangenti a $\mathcal{C}$. Queste si incontreranno in punti distinti, che, congiunti, determineranno p. (ancora, si applica il principio di reciprocità)

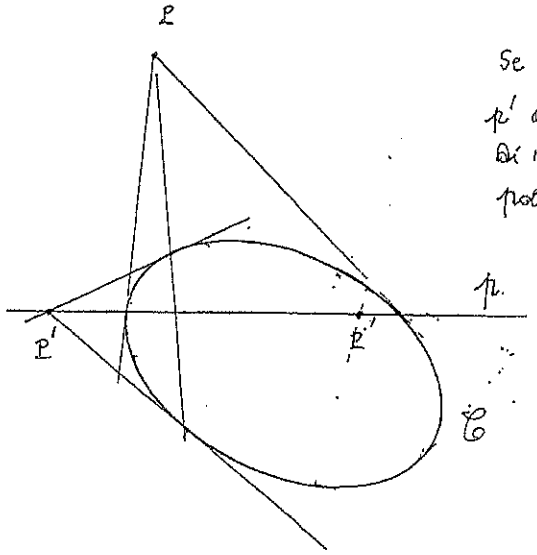


Costruzione della polare di P, interno a $\mathcal{C}$

r_1, r_2 arbitrarie.

Risulta

$r_i = p_i \quad i=1,2.$



Se P' descrive p^*, p' descrive il fascio di rette di centro P, polo di p

✱ Inciso

Consideriamo ancora, in $\mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$), l'equazione

$$(\star) \qquad ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0$$

Si ha, successivamente

$$(\star\star) \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Poniamo per $x \neq 0$ $\quad x = \frac{1}{y}$, sicché

$(\star\star)$ diviene

è una trasformazione di Möbius!

$$1 + \frac{b}{a}y + \frac{c}{a}y^2 = 0$$

ovvero

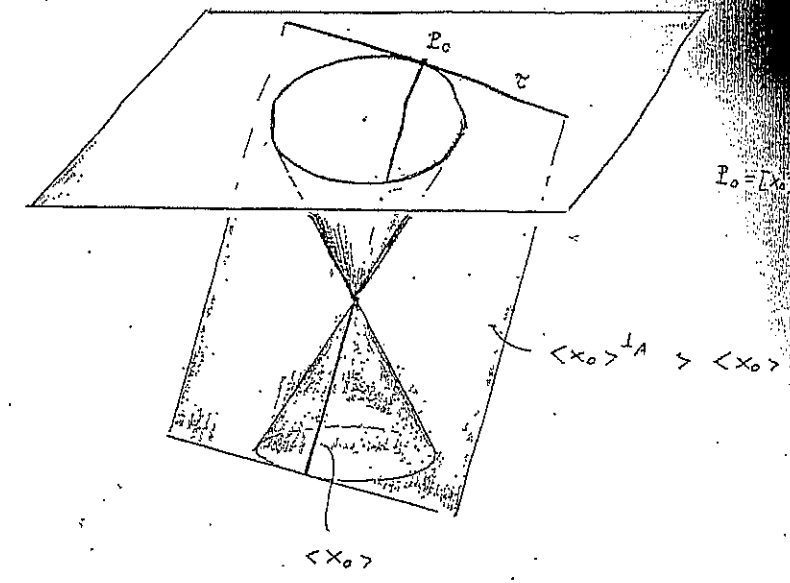
$$(\text{se } b \neq 0) \qquad \frac{a}{b} + y + \frac{c}{b}y^2 = 0$$

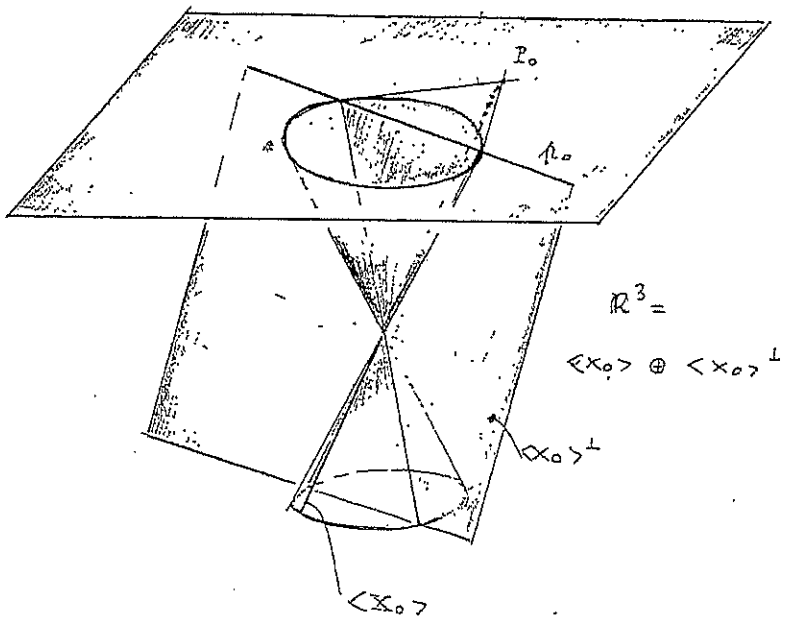
Se ora $a \to 0$, le radici tendono a

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = -\frac{b}{c} \end{cases} \qquad \text{ovvero} \qquad \begin{cases} x = \infty \\ x = -\frac{c}{b} \end{cases} \qquad (b \neq 0)$$

ovvero, considerando direttamente $(\star)$ rimane appunto solo $x = -\frac{c}{b}$: l'altra radice è "andata all'infinito".

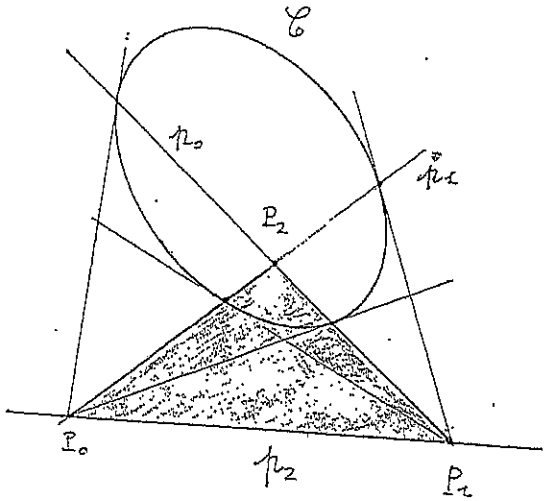
interpretazione vettoriale





◇ Classificazione proiettiva delle coniche

• approccio geometrico (interpretazione geometrica del teorema di Sylvester e, più in generale, del teorema di diagonalizzazione delle forme quadratiche)



Consideriamo $\mathcal{C}$ generale. Sia $P_0 \notin \mathcal{C}$ (ciò corrisponde a considerare, in $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{C}^3$, un vettore non isotropo.

Sia $P_1 \in r_0$ (*). Consideriamo r_1, e successivamente $P_2 = r_1 \cap r_2$. È allora chiaro che $P_0P_1 = r_2$ (polare di P_2)

(*) $P_1 \notin \mathcal{C}$

Def. Il triangolo $P_0P_1P_2$ è detto autopolare per $\mathcal{C}$: ogni vertice è polo del lato opposto

Per costruzione si ha (si lavora in coordinate)

$$\boxed{X_i^t A X_j = 0} \qquad P_i = [X_i] \qquad X_i = \begin{pmatrix} x_0^i \\ x_1^i \\ x_2^i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$i = 0,1,2$ $\quad j = 0,1,2$ $\qquad i \neq j$

Ma allora, leggendo il tutto vettorialmente, posto $e_i = \begin{pmatrix} x_0^i \\ x_1^i \\ x_2^i \end{pmatrix}$,

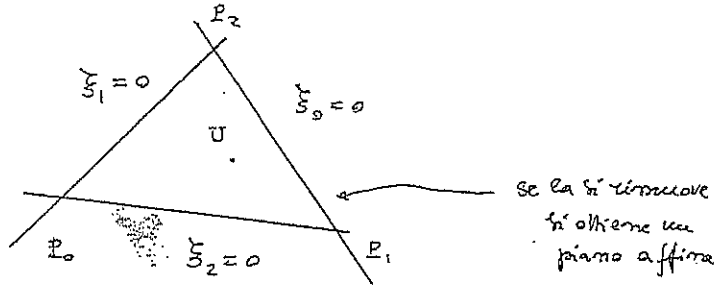
* (e_0, e_1, e_2) è una base che diagonalizza q_A

Dal punto di vista proiettivo si è costruito un nuovo riferimento in cui

$P_0 = (1,0,0)$
$P_1 = (0,1,0)$ e, * restringendo la forma quadratica nel modo visto si fissa anche il punto unità $U = (1,1,1)$
$P_2 = (0,0,1)$

Osserviamo che la richiesta $P_0 \notin \mathcal{C}$ ecc. corrisponde, algebricamente, alla scelta di un vettore non isotropo (cf. il lemma 1, 2) precedenti la dimostrazione del teorema di diagonalizzazione di una forma quadratica

Se definiamo $P_1 P_2$ retta impropria (e la rimuoviamo) otteniamo un piano affine, con coordinate $\xi = \frac{\xi_1}{\xi_0}$, $\eta = \frac{\xi_2}{\xi_0}$



Fasci di coniche in $\mathbb{P}^2$

Siano date, in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C}, \mathbb{R})$ due coniche distinte $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}''$

$$\mathcal{C}' : \quad X^t A' X = 0 \qquad A' = (a'_{ij})$$
$$\mathcal{C}'' : \quad X^t A'' X = 0 \qquad A'' = (a''_{ij})$$

Si consideri $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ e

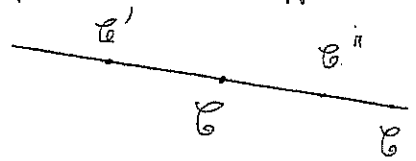
$$\mathcal{C} : \quad X^t \underbrace{(\lambda A' + \mu A'')}_{A} X = 0$$

(eq: $\lambda X^t A' X + \mu X^t A'' X = 0$)

simbolicamente: $\mathcal{C} = \lambda \mathcal{C}' + \mu \mathcal{C}''$ e l'eq. si può scrivere $\lambda \mathcal{C}' + \mu \mathcal{C}'' = 0$

Le coniche $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(\lambda,\mu)}$ descrivono il fascio di coniche determinato da $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$:

In sostanza, esse si riguardano come punti di una retta proiettiva (determinata da due punti distinti appartenenti ad essa

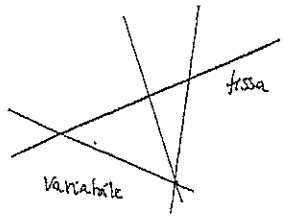


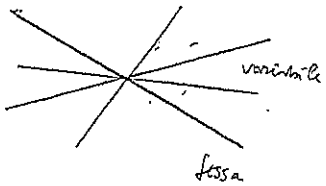
(infatti $(\lambda, \mu) \neq (0,0)$ è definita a meno di una costante di prop. non nulla

Le coniche degeneri (riducibili) si ottengono (dopo aver posto, per esempio $\lambda \neq 0$, $k = \frac{\mu}{\lambda}$) risolvendo l'equazione (di 3° grado, in generale)

$$(*) \qquad \det\left(A' + kA''\right) = 0$$

Se $(*)$ è identicamente soddisfatta, le coniche sono tutte degeneri

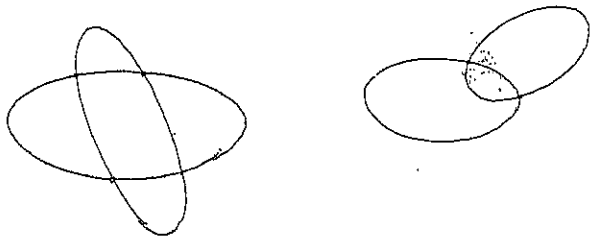




Nel caso generale vi sono perciò 3 coniche degeneri, di cui (se abbiamo coefficienti reali ma, come di consueto, pensiamo il piano complessificato) almeno una reale.

In tal caso (sempre ragionando nel piano proiettivo reale complessificato, oppure nel piano proiettivo complesso) si hanno

4 punti base (punti per i quali passano tutte le coniche del fascio



[Nota $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$ sono di 2° grado
(grado di una curva ≡ numero di intersezioni con una retta (contando le molteplicità, e, se nel caso reale, lavorando nella complessificazione)

Il numero di punti di intersezione è $2 \times 2 = 4$
(caso particolare del teorema di Bezout)

Ricordiamo che l'equazione di una conica dipende in modo effettivo da 5 parametri, sicché 5 punti in posizione "generale" determinano una

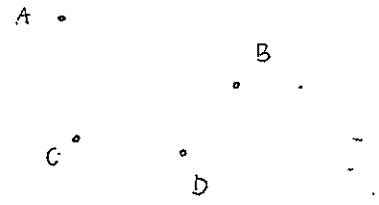
è una sola conica.

Il metodo dei fasci di coniche permette di trattare rapidamente ed elegantemente il problema di individuare una conica a partire da condizioni note (si veda oltre).

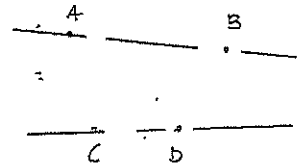
Assolutamente sconsigliabile è, in generale, sostituire le coordinate dei punti direttamente nell'equazione, perché spesso inefficace (precisamente, nel caso di condizioni di tangenza, e, comunque, più lungo e poco elegante.

Esaminiamo ora i vari casi che si possono presentare (si lavora nel piano proiettivo complesso, o nel piano reale complessificato.

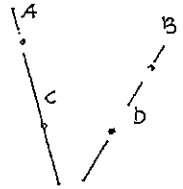
$\boxed{1^\circ \text{ caso}}$ 4 punti distinti (a tre a tre non allineati, per evitare che tutte le coniche del fascio siano degeneri



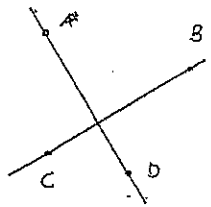
Le coniche degeneri sono



(AB, CD)

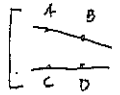
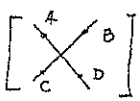


(AC, BD)



(AD, BC)

Il fascio si può pensare generato da due di tali coniche.

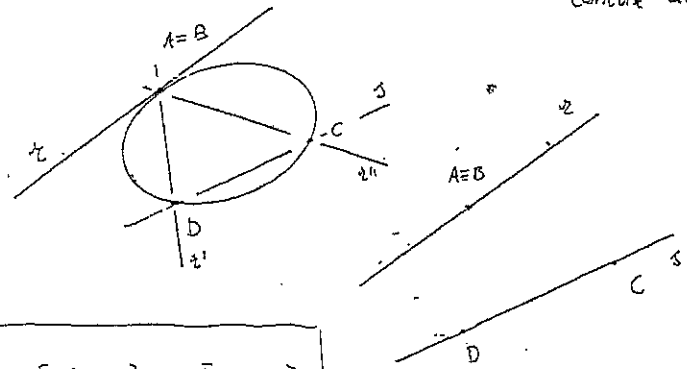
ex: $\mathcal{C} = \lambda$ [] $+ \mu$ []

Gli altri casi sono deducibili dal primo tramite opportune considerazioni di limite

$\boxed{2^\circ \text{ caso}}$ $A = B$, C, D distinti (tra loro, e da $A=B$).

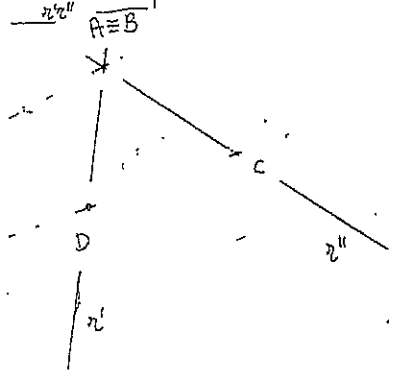
fascio di coniche tangenti (ad una retta data) in A e passanti per C e D

coniche degeneri



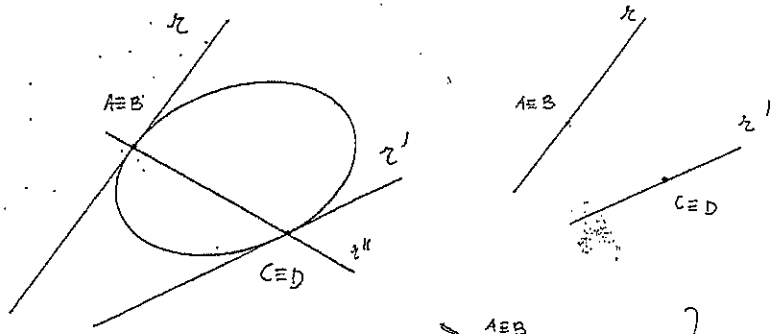
$$\mathcal{C} = \lambda \left[\frac{A=B}{D} \frac{C}{} \right] + \mu \left[\frac{A\equiv B}{D} \frac{C}{} \right]$$

rs $\quad$ $r'r''$

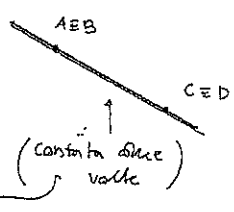


$\boxed{3^\circ \text{ caso}}$ $A = B$; $C = D$

fascio di coniche bitangenti in A e C (molto importante nelle applicazioni) (a due rette date r, r';



$$\mathcal{C} = \lambda \left[\frac{}{rr'} \right] + \mu \left[\frac{}{r''^2} \right]^2$$

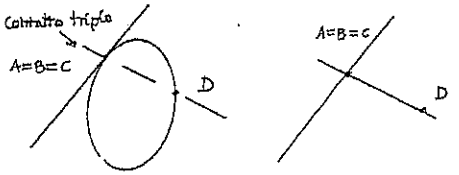


(contata due volte)

doppia

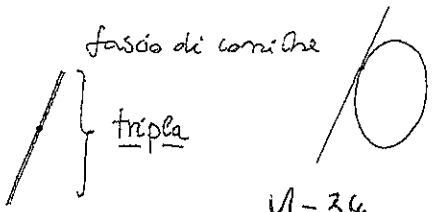
necessitano di una definizione specifica della procedura di limite

$\boxed{4^\circ \text{ caso}}$ $A \equiv B \equiv C$; D fascio di coniche osculantisi in A e passanti per D



tripla

5° caso $A \equiv B \equiv C \equiv D$ fascio di coniche iperosculantisi in A



tripla

Problema 1 già accennato in parte)

◈ Determinare (analiticamente) le equazioni delle rette tangenti ad una conica (generale) $\mathcal{C}$ da $P \notin \mathcal{C}$ (si lavora nel piano proiettivo reale complessificato),

[P si dirà esterno alla conica $\mathcal{C}$ se esse sono reali e distinte, interno se sono complesse coniugate. $P \in$ alla conica $\Leftrightarrow$ esse sono reali e coincidenti]

1° metodo

Si considera il fascio di rette di centro P e si impone intersezione doppia con $\mathcal{C}$ (si ottengono due soluzioni).

2° metodo

Si determina la polare p di P e i suoi punti di intersezione P_1 e P_2 con $\mathcal{C}$. È allora $\tau_1 = PP_1$, $\tau_2 = PP_2$.

3° metodo

(più rapido ed elegante, ci si riferisca alla figura)

Consideriamo le conica degeneri $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ formate da τ_1 e τ_2 (simbolicamente)

$\mathcal{C}_1 : \quad \tau_1 \tau_2 = 0$

e, rispettivamente, da $p = P_1 P_2$ contata due volte $\mathcal{C}_2 : p^2 = 0$

$\mathcal{C}, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ appartengono allo stesso fascio di coniche bitangenti, pertanto

$$\mathcal{C}_1 = k\,\mathcal{C}_2 + \mathcal{C} \qquad (k \text{ parametro affine})$$

Analiticamente:

$$0 = \tau_1 \tau_2 = k\,(X_P^t A X)^2 + X^t A X$$

Ponendo $X = X_P$, e osservato che $X_P^t A X_P \neq 0$ per ipotesi, è $k\,(X_P^t A X_P)^2 + X_P^t A X_P = 0$

$\Rightarrow \quad k = -(X_P^t A X_P)^{-1}$ e pertanto

$$0 = \tau_1 \tau_2 = \underbrace{(X^t A X)}_{\mathcal{C}}\underbrace{(X_P^t A X_P)}_{q_A(P)} - \underbrace{(X_P^t A X)}_{p}{}^2$$

Il complesso delle rette tangenti cercate è fornito pertanto da

$$\boxed{\underbrace{(X^t A X)}_{q_A(X)}\underbrace{(X_P^t A X_P)}_{q_A(X_P)} - \underbrace{(X_P^t A X)^2}_{b_A(X,X_P)^2} = 0}$$

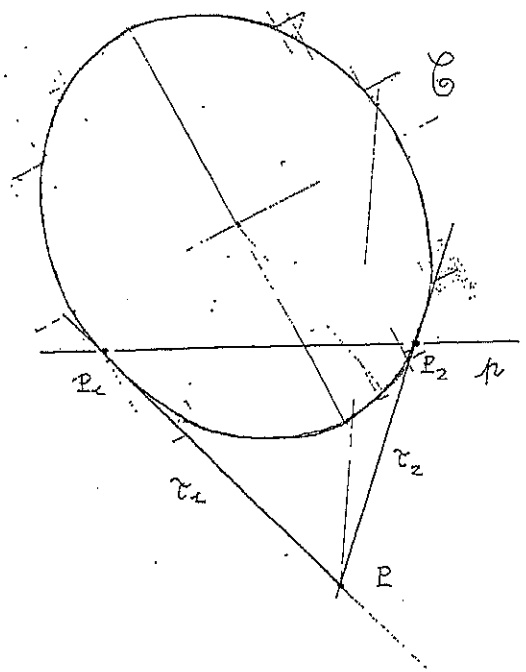
$\neq 0$

forma polare

in forma più compatta

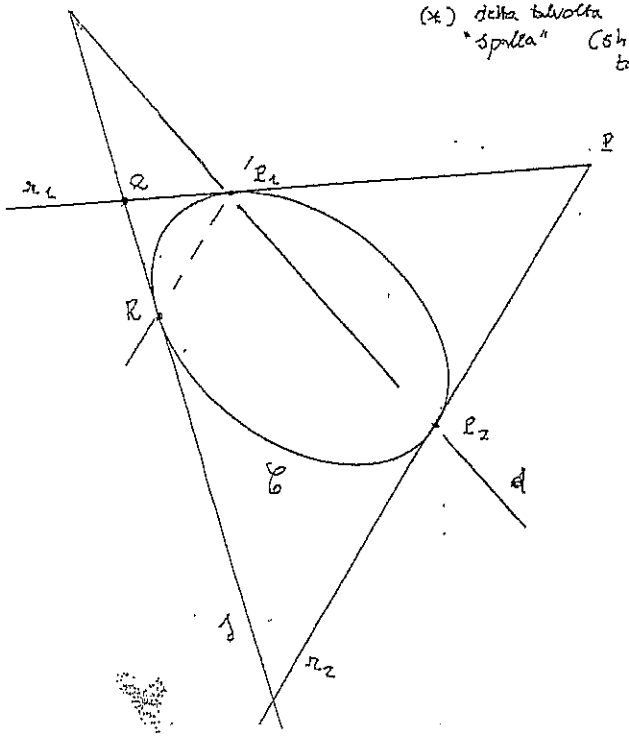
$$q_A(X)\,q_A(X_P) - b(X,X_P)^2 = 0$$

☆ Si osservi che se $P \in \mathcal{C}$ si ottiene l'eq. della tangente, contata due volte.



* <u>Problema</u>. Determinare la conica $\mathcal{C}$ tangente a r_1 in P_1, a r_2 in P_2 e alla retta s (*)

(*) detta talvolta tangente di "spalla" (shoulder tangent)



<u>Soluzione</u>: Sia $d = P_1P_2$

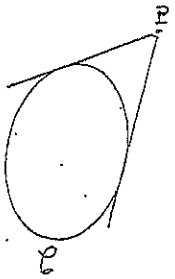
Si consideri il fascio di coniche bitangenti

$$\lambda\, r_1 r_2 + \mu d^2 = 0 \qquad (\lambda, \mu) \neq (0,0)$$

Si considerino le tangenti da Q a $\mathcal{C} = \mathcal{C}_{(\lambda,\mu)}$: <u>queste sono note</u>: l'equazione che le descrive deve coincidere, a meno di un fattore di proporzionalità $\rho \neq 0$ con l'equazione delle tangenti da Q a $\mathcal{C}_{(\lambda,\mu)}$ (incognita)

Si ricordi infatti che

$$(X^t A X)\cdot(X_P^t A X_P) - (X_P^t A X)^2 = 0$$



Ma ciò determina univocamente $\mathcal{C}$.

molto utile in pratica

Oppure, si interseca $\mathcal{C}_{(\lambda,\mu)}$ con s e si richiede un'intersezione doppia: concretamente si ottiene un'eq. di secondo grado in una delle due variabili affini e si impone $\Delta = 0$ (Δ = discriminante)

Esempio (generale) Sia data $\mathcal{C}: \; -x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$

$P: [1, 0, 2]$. Determiniamo in tre modi le equazioni delle tangenti a $\mathcal{C}$ condotte da P.

[Osserviamo che, facendo uso di considerazioni metriche, il problema risulterebbe completamente elementare, ma prescindiamo da ciò]

Eq. affine $\mathcal{C}: \; x^2 + y^2 - 1 = 0$

$P: (0, 2)$. Fascio di rette di centro P (eccettuata $x = 0$) $\quad y - 2 = mx$

Intersechiamo con $\mathcal{C}$:

$$x^2 + (2 + mx)^2 - 1 = 0$$

$$(m^2+1)x^2 + 4mx + 3 = 0$$

$\Delta = 0 \Rightarrow \quad 4m^2 - 3(m^2+1) = 0$

$$m^2 - 3 = 0 \qquad m = \pm\sqrt{3}$$

$\Rightarrow$ le tangenti cercate sono $\quad y = 2 \pm \sqrt{3}\, x$

2° modo Determiniamo p.

$$(x_0 \;\; x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \;\; x_1 \;\; x_2) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$-x_0 + 2x_2 = 0 \qquad p: \; y = \frac{1}{2}$

$p \cap \mathcal{C} \qquad x^2 + \frac{1}{4} - 1 = 0 \qquad x^2 - \frac{3}{4} = 0$

$x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad P_1: \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

$P_2: \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$

le rette P_1P e P_2P sono quelle già trovate

3° metodo $\quad 0 = (-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2)\cdot(-1+4) - (-x_0 + 2x_2)^2$

$$3(x^2 + y^2 - 1) - (2y - 1)^2 = 0$$

$$3x^2 + 3y^2 - 3 - 4y^2 + 4y - 1 = 0$$

$$3x^2 - y^2 + 4y - 4 = 0$$

$$3x^2 - (y-2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad y - 2 = \pm\sqrt{3}\, x$$

★ Trasformazioni proiettive (cenno)

$A \in GL(n+1, \mathbb{R})$

★ retta: $\begin{pmatrix} \rho x_0' \\ \rho x_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$

$\rho X' = A X$

$[X'] = \pi_A [X]$

π_A è det. da $[X'] = \pi_A [X]$

$2 \times 2 - 1 = 4 - 1 = 3$ condizioni

$\Rightarrow$ 3 punti (distinti)

★ piano $\begin{pmatrix} \rho x_0' \\ \rho x_1' \\ \rho x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

π_A è determinata da $3 \times 3 - 1 = 9 - 1 = 8$ cond.

$\Rightarrow$ 4 pti (ognuno dà due cond. (siamo nel piano))

in posizione generale (i.e. a tre a tre non allineati)

★ in generale: $(n+1)^2 - 1$ condizioni

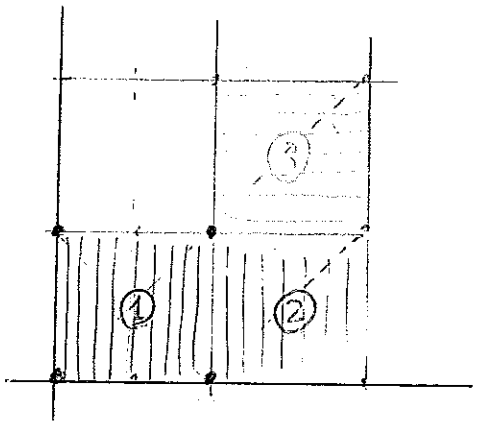
$= (n+2) \cdot n$

$\Rightarrow$ necessari $n+2$ punti! (ognuno impone n condizioni)

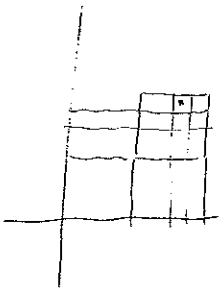
in "posizione generale"

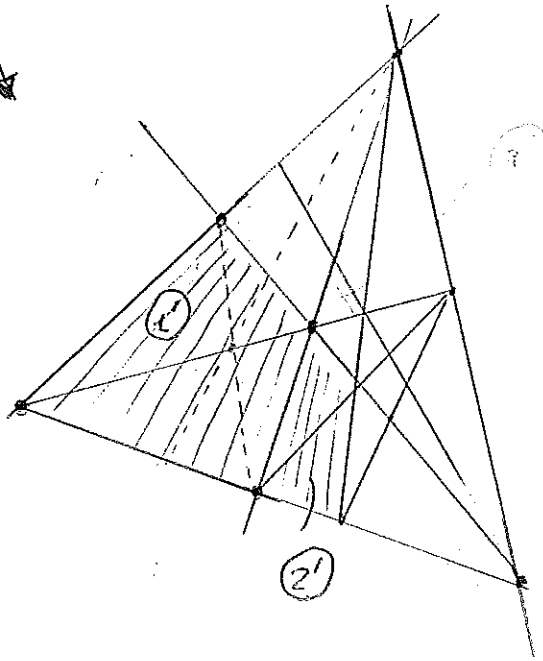
(base $\underset{P_0}{[e_0]} \dots \underset{P_n}{[e_n]}$ di V, e $U = [e_1 + e_2 + \dots e_n]$ pto unità)

★ Esempio: le immagini di quattro punti (i vertici del quadrato ①, per fissare le idee) determinano le immagini di qualsiasi altro punto



la costruzione può essere effettuata graficamente utilizzando intersezioni successive.





← immagine di r_∞

★ Le trasformazioni affini (affinità) sono precisamente le trasformazioni (proiettività) proiettive che lasciano invariato (globalmente, non punto per punto!) l'"iperpiano improprio" $x_0 = 0$

Aff è sottogruppo di $PGL(n+1, \mathbb{R})$

★ Esempio, le trasf. affini del piano (affine) si identificano con le trasf. proiettive del piano (proiettivo!) che lasciano fissa (globalmente) la retta impropria $x_0 = 0$, vale a dire:

$$\begin{pmatrix} \rho x_0' \\ \rho x_1' \\ \rho x_2' \end{pmatrix} = \underset{\substack{\rho \neq 0 \\ \cap \\ GL(n+1, \mathbb{R})}}{\begin{pmatrix} & \hat{A} & \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

pti impropri rimangono impropri ($\Leftrightarrow$ rette // rimangono //)

$$\rho x_0' = a_{00} x_0 + a_{01} x_1 + a_{02} x_2$$

$$\boxed{x_0 = 0 \longrightarrow x_0' = 0 \Leftrightarrow a_{01} = a_{02} = 0}$$

$\Rightarrow$ passando in coordinate non omogenee $\hat{A}$ si può scrivere così

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & & \\ b_2 & & A \end{pmatrix}$$

$A \in GL(n, \mathbb{R})$

★ Si ricorda, è il modo con cui abbiamo rappresentato la trasf. $x \mapsto Ax + b$ ora capiamo perché!!

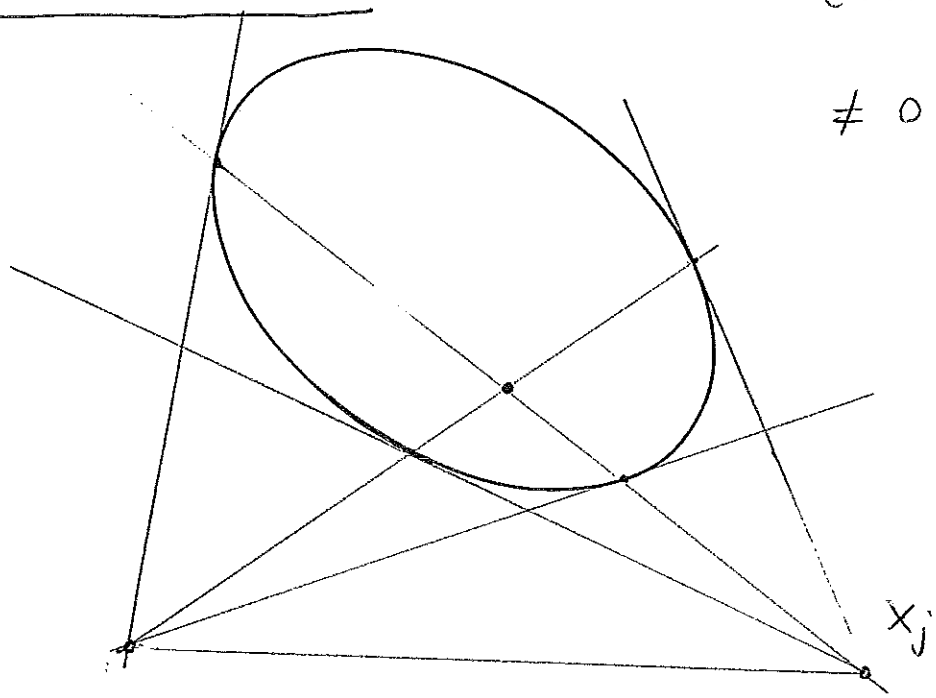
★ Riprendiamo la costruzione di triangoli autopolari (assumiamo $\det A \neq 0$)

$$(★)\quad X_i^t A X_j = \delta_{ij}\beta_j$$

(dove $\beta_j := X_j^t A X_j \neq 0$ poiché $[X_j] \notin \mathcal{C}$

$i = 1,2,3$

Approccio geometrico al teorema di Sylvester



Si ha $\quad X_j = M E_j$

base canonica

con M

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ X_1 & X_2 & X_3 \end{pmatrix}$$

è $\det M \neq 0$ [gli $[X_i]$ non sono allineati]

Poniamo $D = \begin{pmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{pmatrix}$

Allora (★) diviene

$$(★★)\quad \boxed{M^t A M = D}$$

$(\Rightarrow \quad A \approx D \qquad \approx$: congruenza è una relazione di equivalenza

inoltre, poiché $[x_j] = [\underset{\neq 0}{\rho_j} x_j]$

si può far sì che $\beta_j = \pm 1$

Notiamo altresì che, se $\mathcal{C}$ è reale, i β_i non hanno tutti lo stesso segno

Se così fosse $Y^t D Y$ risulterebbe sempre > 0 o sempre < 0 $\forall Y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$.

Ma, da $Y^t M^t A M Y = \underbrace{(MY)^t}_{\overset{|||}{X^t}} A \underbrace{(MY)}_{X}$

seguirebbe che $X^t A X \neq 0$ $\forall X \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\underline{0}\}$, e ciò è assurdo, essendo $\mathcal{C}$ reale.

Pertanto i β_i sono: due pos uno neg o due neg uno pos

È chiaro che tale risultato non dipende dalla scelta del triangolo autopolare [ad esempio, per ragioni di continuità]

I due casi sono discriminati dal segno di $\det A$; in virtù di

$$\underbrace{(\det M)^2}_{>0} \det A = \det D = \beta_1 \beta_2 \beta_3$$

(che segue subito dalla (**))

In altre parole, la <u>segnatura</u> di A è $(2,1)$ o $(1,2)$ (per le coniche <u>reali</u>) a seconda che $\det A < 0$ o $\det A > 0$

Questo è un caso particolare del <u>teorema</u> di <u>Sylvester</u>

Ogni matrice $A = A^t \in M_n(\mathbb{R})$ è congruente ad una matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix}$. possono essere scelti in modo che $\beta_i = \pm 1$ o $\beta_i = 0$

cioè, ad es.

$$D = \begin{pmatrix} I_p & & 0 \\ & -I_q & \\ 0 & & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

$p = \#\{\beta_i > 0\}$

$q = \#\{\beta_i < 0\}$

$= r - p$

r = rango di A

$n - r = \nu$ nullità di A

la coppia (p, q) è detta segnatura di A e non dipende dal "cambiamento di base" M utilizzato e risulta essere un <u>invariante</u> <u>completo</u> per <u>congruenza</u> ovvero $A \approx B \iff (p_A, q_A) = (p_B, q_B)$

Si ha anche $p = \#\{\lambda_i > 0\}$ $\quad q = \#\{\lambda_i < 0\}$

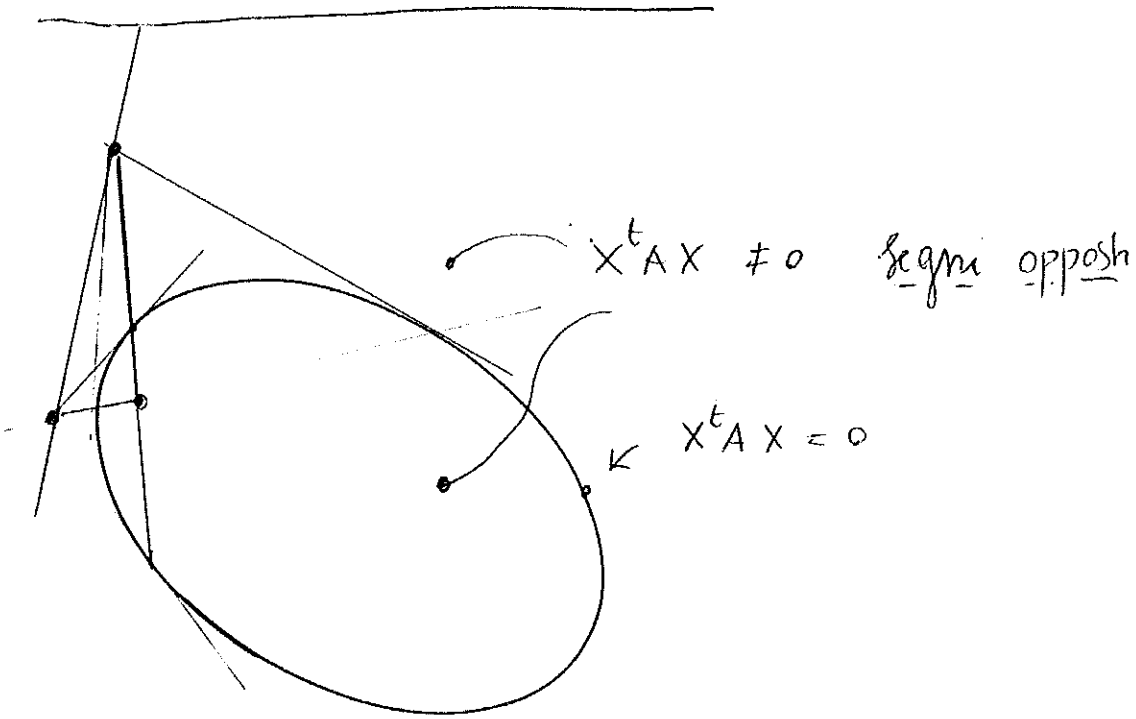
$\nu = \#\{\lambda_i = 0\}$ $\quad \lambda$: <u>autovalori</u>.

Due coniche $\mathcal{C}_A$ e $\mathcal{C}_B$ si dicono <u>proiettivamente</u> equivalenti se

$$A \approx \rho B \quad \text{per qualche } \rho \neq 0$$

Il teorema di Sylvester ci dice che

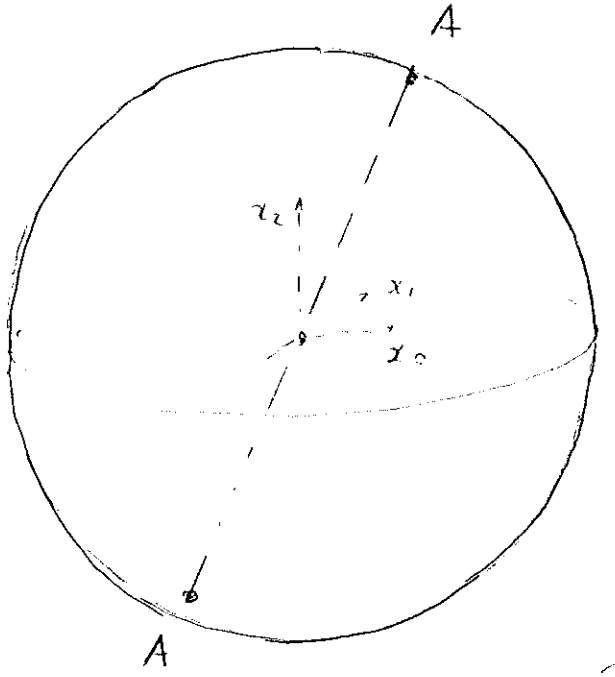
esiste un solo tipo proiettivo di conica <u>reale</u>, corrispondente alle segnature $(2,1)$ o $(1,2)$

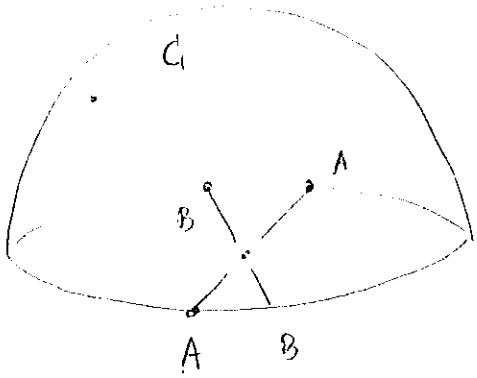


Nella rappresentazione data, uno dei lati del triangolo autopolare è sempre "infinito" ... ma attenzione, il piano proiettivo è in realtà uno spazio "compatto" (nel senso della topologia)

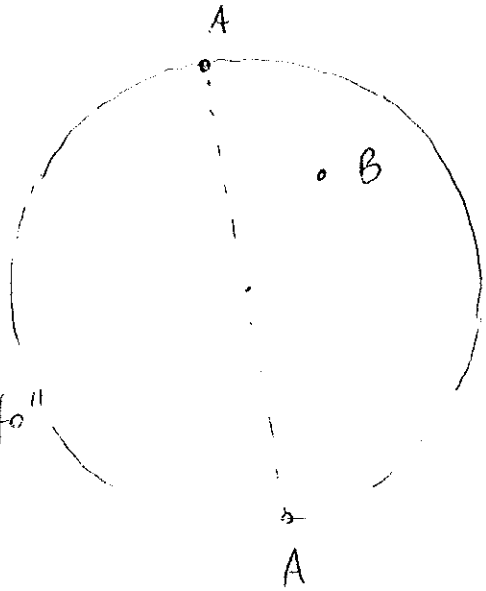
★ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ i punti antipodali di una sfera vanno identificati

Inciso:
la "topologia" di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

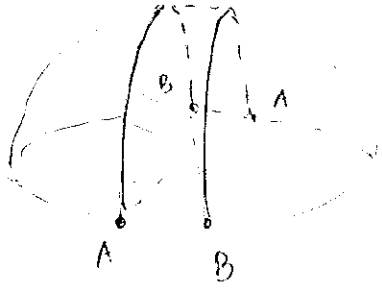




$\approx$
"omeomorfo"



$\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ contiene nastri di Möbius



è una "varietà non orientabile"