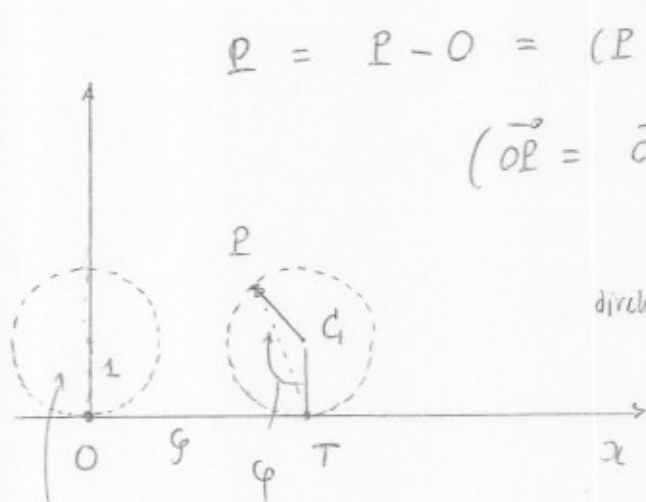


* L'evolvente di una cicloide è una cicloide
(c. Huygens, "Horologium oscillatorium")



rullante
(roulante)

qui $1 = \frac{d}{d\varphi}$

$$Q = P + G \underline{n} =$$

* Centro
di
curvatura

$$P + \frac{\|P'\|^2}{\langle i P', P'' \rangle} \cdot i P'$$

$$P = (\varphi - \sin \varphi) \underline{i} + (1 - \cos \varphi) \underline{j}$$

$$P' = (1 - \cos \varphi) \underline{i} + \sin \varphi \underline{j}$$

$$i P' = (1 - \cos \varphi) \underbrace{i \underline{i}}_{\underline{j}} + \sin \varphi \underbrace{i \underline{j}}_{-\underline{i}}$$

$$= -\sin \varphi \underline{i} + (1 - \cos \varphi) \underline{j}$$

$$= P - T$$

$$(infatti \ P - T = (\varphi - \sin \varphi) \underline{i} + (1 - \cos \varphi) \underline{j} - \varphi \underline{i}$$

$$P = P - O = (P - C) + (C - T) + (T - O) =$$

$$(\vec{OP} = \vec{OT} + \vec{CT} + \vec{CP})$$

direttamente

$$\begin{cases} x = \varphi - \sin \varphi \\ y = 1 - \cos \varphi \end{cases}$$

$$\varphi \in \mathbb{R}$$

formalismo

"misto":

$$i \underline{v}:$$



$$\varphi \underline{i} + \underline{j} \cdot - e^{-i\varphi} \underline{j}$$

attenzione...

$$\varphi \underline{i} + \underline{j} (1 - e^{-i\varphi})$$

$$= \varphi \underline{i} +$$

$$\underline{j} (1 - \cos(-\varphi) - i \sin(-\varphi))$$

$$= \varphi \underline{i} +$$

$$\underline{j} (1 - \cos \varphi) +$$

$$- i \underline{j} (-\sin \varphi)$$

$$\underbrace{\underline{j} \underline{j}}_{-\underline{i}} =$$

$$(\varphi - \sin \varphi) \underline{i} +$$

$$(1 - \cos \varphi) \underline{j}$$

si ricordi anche che due

$$z = x_1 + i y_1$$

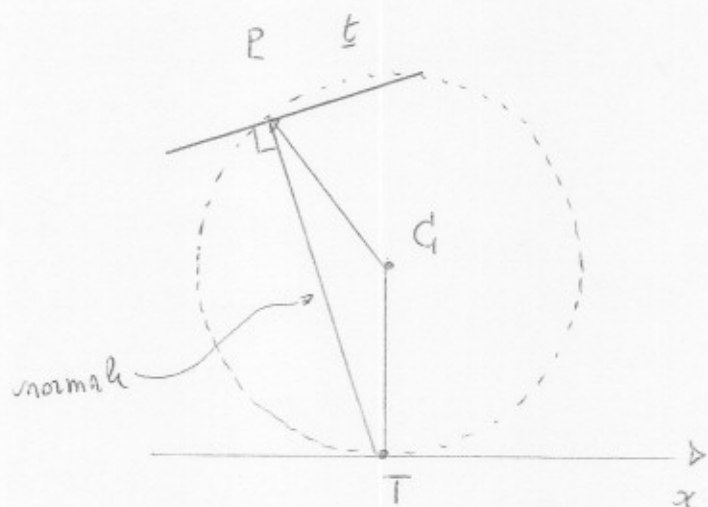
$$w = x_2 + i y_2$$

$$\bar{z} w =$$

$$= (x_1 - i y_1) (x_2 + i y_2)$$

$$= (x_1 x_2 + y_1 y_2) + \text{prod. scalare}$$

$$+ i(x_1 y_2 - x_2 y_1) + \text{area orient.}$$



Proseguiamo:

$$\|P'\|^2 = (1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi$$

$$= 2 - 2 \cos \varphi = 2(1 - \cos \varphi)$$

$$P'' = \sin \varphi \underline{i} + \cos \varphi \underline{j}$$

$$iP' = -\sin \varphi \underline{i} + (1 - \cos \varphi) \underline{j}$$

$$\langle iP', P'' \rangle = -\sin^2 \varphi + \cos \varphi (1 - \cos \varphi) = \cos \varphi - 1$$

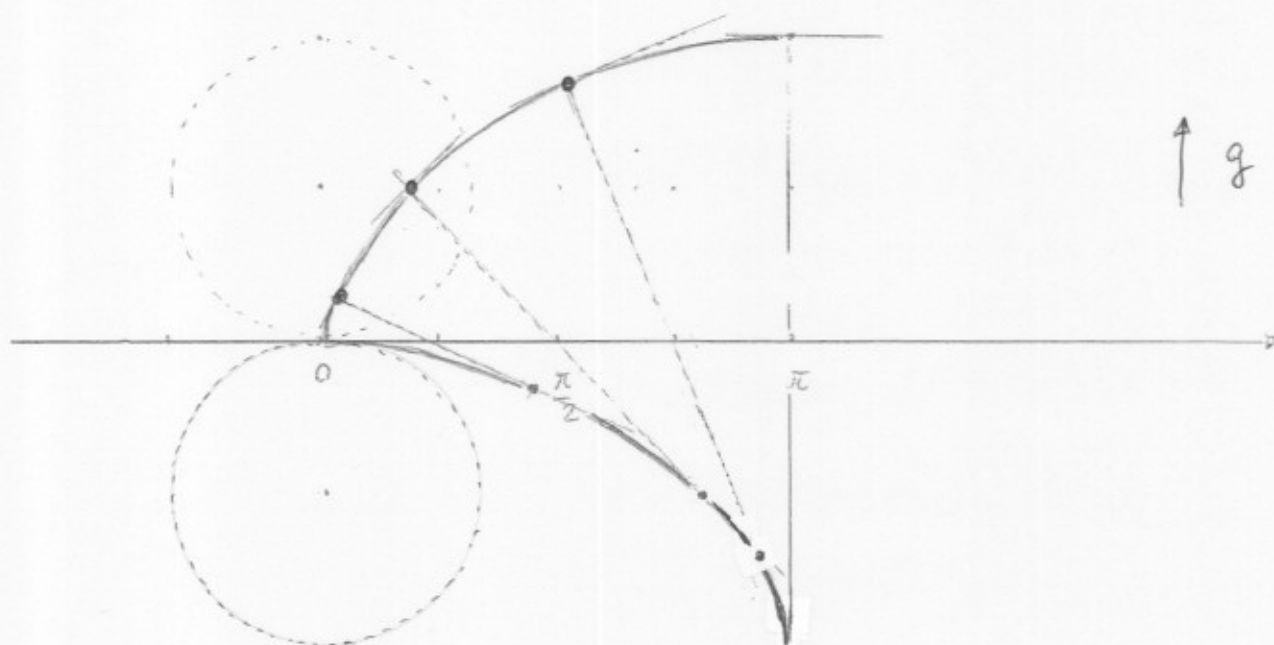
$$\Rightarrow Q = P + 2(T - P) \quad \left[\begin{array}{l} \text{il doppio della} \\ \text{lunghezza della} \\ \text{normale} \end{array} \right]$$

$$Q = (\varphi - \sin \varphi) \underline{i} + (1 - \cos \varphi) \underline{j} + 2(\sin \varphi \underline{i} + (\cos \varphi - 1) \underline{j})$$

$$= (\varphi + \sin \varphi) \underline{i} - (1 - \cos \varphi) \underline{j}$$

che traccia una cicloide (v. figura)

Le proprietà evidenziate agevolano il tracciamento della curva $\rightarrow$

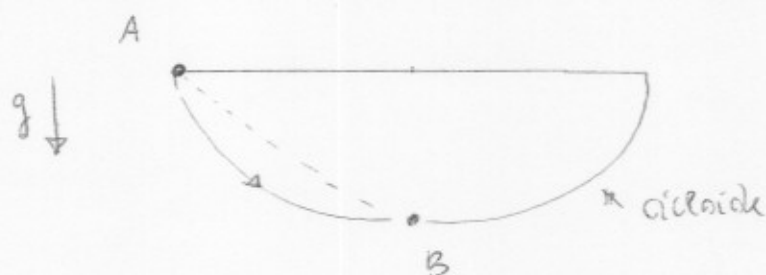


* così funziona il pendolo cicloide (si rovesci la figura)

[le oscillazioni sono isocrone]. Per questo

la cicloide è detta tautochrone, ed è anche

brachistocrone: una pallina pesante
impiega il minor tempo per andare da A a B
lungo una cicloide



L'equazione differenziale della cicloide

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$dx = \overbrace{(1 - \cos t)}^y dt \quad y \geq 0$$

$$dy = \sin t dt$$

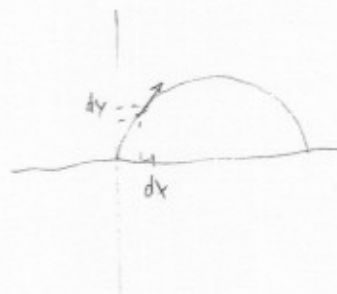
da $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ si ha, successivamente,

$$\sin^2 t = 1 - \cos^2 t = (1 - \cos t)(1 + \cos t)$$

$$\text{e } \overbrace{(1 - \cos t)}^y + (1 + \cos t) = 2$$

$$\Rightarrow \sin^2 t = y(2 - y)$$

$$\sin t = \pm \sqrt{y(2 - y)}$$



$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \pm \sqrt{\frac{y(2 - y)}{y^2}} = \pm \sqrt{\frac{2 - y}{y}}$$

$y \neq 0$

$$\boxed{dx = dy \sqrt{\frac{y}{2 - y}}}$$

(Segno +)

◇ L'evolvente (o involuta) di una catenaria è una trattrice

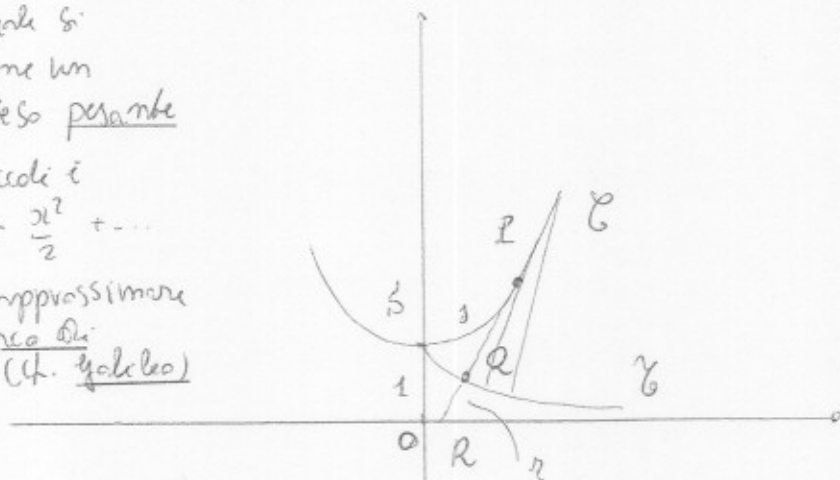
* catenaria: γ $y = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

curva lungo
la quale si
dispone un
filo teso pesante

$$y' = \sinh x$$

per x piccoli i
 $y = 1 + \frac{x^2}{2} + \dots$

e si può approssimare
con un arco di
parabola (H. Galileo)



$$P = x \underline{i} + \cosh x \underline{j}$$

$$P' = \underline{i} + \sinh x \underline{j}$$

* importante anche
per gli sviluppi
successivi

(* pseudosfera di Beltrami)

* lunghezza d'arco della catenaria

$$s = l(PS) = \int_0^x \sqrt{1 + \sinh^2 t} dt = \int_0^x \cosh t dt = \sinh x$$

$$Q = P + (Q - P) = P - \underbrace{\sinh x}_s \frac{dP}{ds} = P - \sinh x \frac{dP}{dx} \frac{dx}{ds}$$

$$= P - \underbrace{\frac{\sinh x}{\cosh x}}_{\tanh x} \frac{dP}{dx} = x \underline{i} + \cosh x \underline{j} + (-\tanh x)(\underline{i} + \sinh x \underline{j})$$

$$= (x - \tanh x) \underline{i} + \left(\cosh x - \frac{\sinh^2 x}{\cosh x} \right) \underline{j} =$$

$$= (x - \tanh x) \underline{i} + \frac{\overbrace{\cosh^2 x - \sinh^2 x}^1}{\cosh^2 x} \underline{j}$$

$$= (x - \tanh x) \underline{i} + \underbrace{\frac{1}{\cosh x}}_{\text{sech } x} \underline{j} \quad \leftarrow \underline{\underline{\gamma_{zattice}}}$$

posto $x=t$

$$\text{cf } \Rightarrow \begin{cases} x = t - \tanh t \\ y = \text{sech } t \end{cases}$$

eq parametriche della
trattice discusse in precedenza

Osservazioni [qui $x \equiv t$]

1. Si trova, per la curvatura di γ ,

$$K(x) = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\delta_{\text{cat}}} = \frac{1}{\sinh x}$$

Si vede $\nearrow$ girando

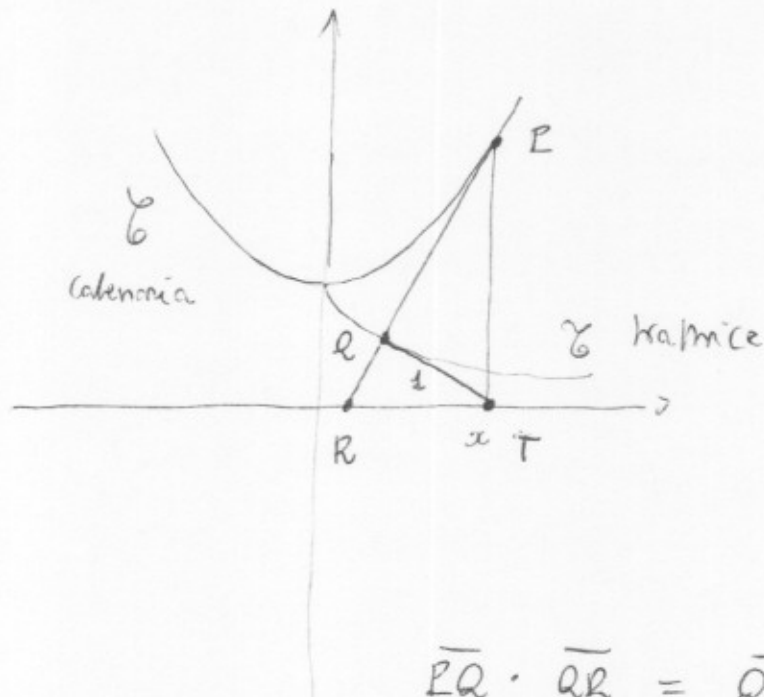
$$K = \left| -\tan x = \frac{1}{\sinh x} \right|$$

* Controllo (V. V. 18)

$$\tan x = \frac{\text{sech } x}{-\tanh x} = -\frac{1}{\cancel{\cosh x}} \frac{\cancel{\cosh x}}{\sinh x} = -\frac{1}{\sinh x} \quad \checkmark$$

In definitiva, abbiamo determinato K in due
modi diversi, evitando il calcolo diretto

2. Si noti la configurazione seguente



$$\overline{EQ} \cdot \overline{QR} = \overline{QT}^2 = 1$$

di cruciale importanza per il seguito !!

Esempi

P: $y^2 = 2px$

$\mathcal{E}_p$ $py^2 = 8(x-p)^3$ parabola
semicubica

$\mathcal{E}_y$ $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\mathcal{E}_y$ $\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} \pm \left(\frac{by}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ astroide

$c = a^2 \mp b^2$

γ trallrice

$\mathcal{E}_\gamma$ catenaria

$\mathcal{C}$ cicloide

$\mathcal{E}_\mathcal{C}$: cicloide

* Teorema ("Umlaufsatz" di Hopf)

Sia γ ($\alpha: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$) liscia, regolare
semplice, chiusa. Allora

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^l K ds = \pm 1$$

a seconda dell'orientamento
 (antiorario: + ; orario: -)

K = curvatura (con segno)

Commento

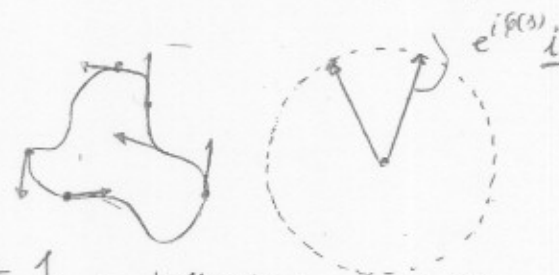
$$K = \frac{d\varphi}{ds}$$

rischi

(supp. $K > 0$)

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{d\varphi}{ds} ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = +1$$

bolle: $\text{prg } \sqrt{-28}$

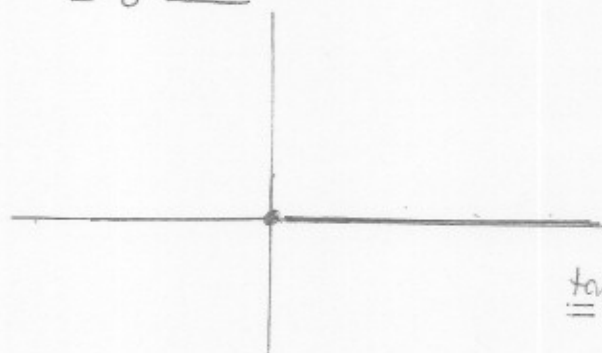


φ : funzione angolo

(non è def su tutta $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$
 in modo continuo)

$$\text{loc: } \varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

Digressione:

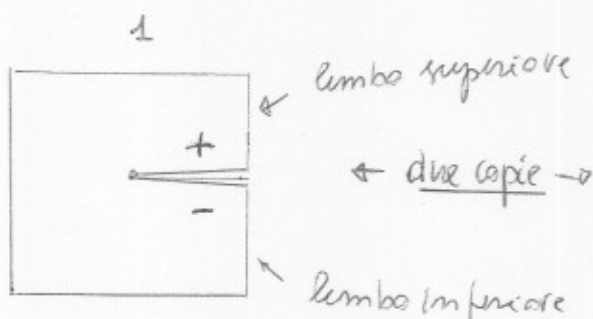


tagliare:

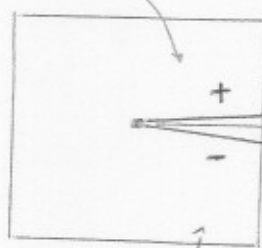
$\varphi \in [0, 2\pi)$

pu renderla
 continua se

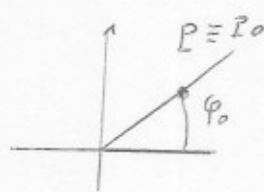
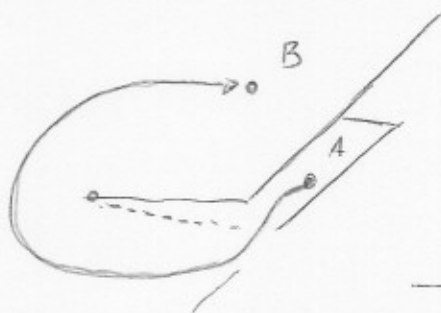
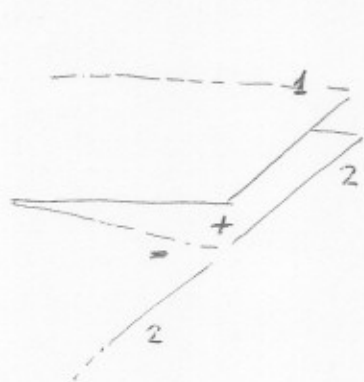
costruisce un'opportuna



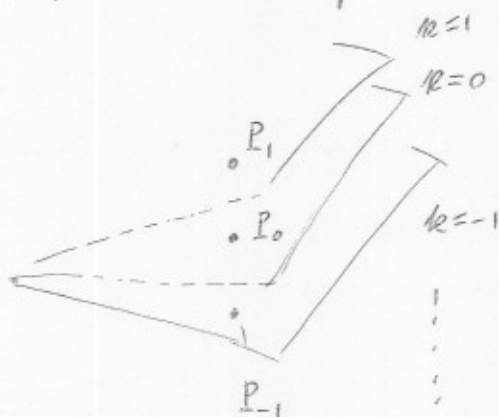
2 * superficie di Riemann



Si faccia ora coincidere il limbo inferiore di
 1 (-) col limbo superiore di 2 (+)



diverse determinazioni di φ ($= \varphi_0 + 2k\pi$)
 $\leadsto$ diversi "fogli" della superficie di Riemann



Sia $z \in \mathbb{C}^* \equiv \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\log z = \log |z| e^{i\varphi} = \overset{\text{log reale}}{\log |z|} + \overset{\text{formalmente}}{\log e^{i\varphi}} = \log |z| + i\varphi$$

logaritmo complesso

$$\log(z_1 z_2) = \log z_1 + \log z_2 \dots$$

$\frac{1}{2} \log(x^2 + y^2) + i \arctan \frac{y}{x}$
 $\downarrow$
 $\log$

$\log$ risulta polidroma (cioè "a più valori")

diviene monodroma (cioè è ben definita, ad un solo valore
 come dev'essere per una funzione!) sull'appropriata

superficie di Riemann

Si assume che $d \log z = \frac{dz}{z} = \frac{\bar{z} dz}{|z|^2} = \frac{(x-iy)(dx+idy)}{x^2+y^2} =$

$\frac{x dx + y dy}{x^2+y^2} + i \left(\frac{x dy - y dx}{x^2+y^2} \right) = \frac{1}{2} \frac{d(x^2+y^2)}{x^2+y^2} + i d\varphi$

$\frac{x dx + y dy}{x^2+y^2} = d \log \sqrt{x^2+y^2}$ (forma esatta)
 $\frac{x dy - y dx}{x^2+y^2} = d\varphi$ (forma chiusa ma non esatta in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$)

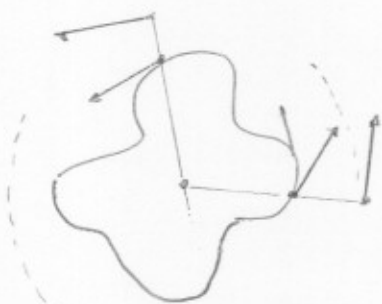
V-27

Il teorema è ovvio per una circonferenza.

Ora, una curva liscia, regolare, semplice e chiusa C è omotopa ad una circonferenza C_1 (percorsa una volta nel senso antiorario, per es., fissando un opportuno orientamento) vale a dire, esiste una famiglia continua di curve C_σ , $\sigma \in [0,1]$ tale che $C_0 = C$, $C_1 = C_1$

$$\text{e } C_0 = C \neq \rho = \rho(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi)$$

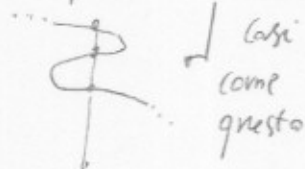
per $0 \leq \sigma \leq 1$ poniamo $C_\sigma: \varphi \mapsto \sigma(R - \rho(\varphi)) + \rho(\varphi)$



$$\sigma = 0 \Rightarrow \varphi \mapsto \rho(\varphi)$$

$$\sigma = 1 \Rightarrow \varphi \mapsto R$$

ammettiamo di poterla descrivere in coordinate polari escludendo



caso come questo

questi si possono comunque

"riaggiustare" operando con deformazioni continue...

$$\text{l'integrale } \frac{1}{2\pi} \int_0^l R \, ds = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = I \in \mathbb{Z} \quad \sim \quad \{ \}$$

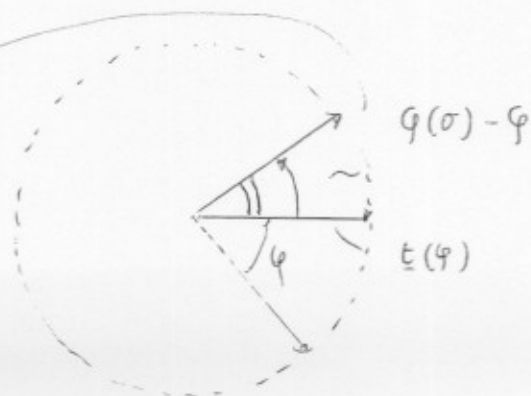
$$\text{ma } [0,1] \ni \sigma \mapsto I_\sigma \in \mathbb{Z}$$

$\times$ I relativo a C_σ

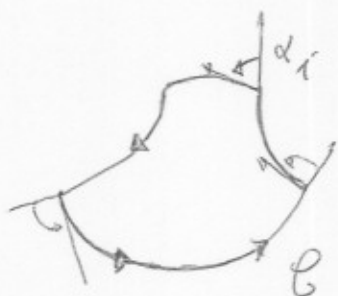
è senz'altro una funzione continua, a valori interi e pertanto è necessariamente costante.

(l'immagine di $[0,1]$ è connessa, pertanto si riduce ad un singolo pts!) Ma per la circonferenza data $I_1 = +1$, da cui l'asserto.

l'angolo tra le rispettive tangenti non è mai superiore a 2π , in modulo



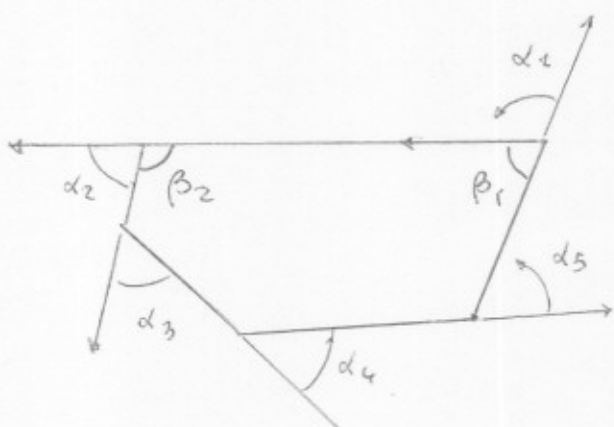
Se $\mathcal{C}$ è regolare a tratti, il teorema di Hopf
diviene



$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \kappa ds + \sum \alpha_i = \pm 1$$

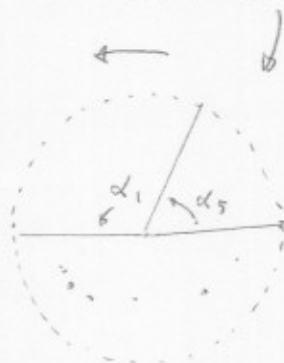
angoli
esterni

(nell'esempio viene $+1$)



Corollario: la somma
degli angoli esterni di
un poligono convesso
vale 2π

dim. diretta...



... e, pertanto, la somma
degli angoli interni vale $(n-2)\pi$

dim.: Si ha $\alpha_i + \beta_i = \pi$

$$\Rightarrow \sum_i \beta_i = \sum_i (\pi - \alpha_i) = n\pi - \underbrace{\sum_i \alpha_i}_{2\pi} = (n-2)\pi.$$

* II teorema dei quattro vertici

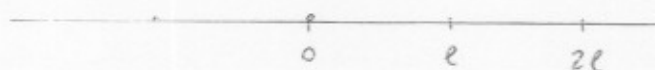
Sia C una curva liscia, semplice, chiusa, convessa
(ipotesi di comodo)

Allora essa possiede almeno 4 vertici ($\equiv$ pli in cui $R' = 0$)

(punti critici della curvatura)

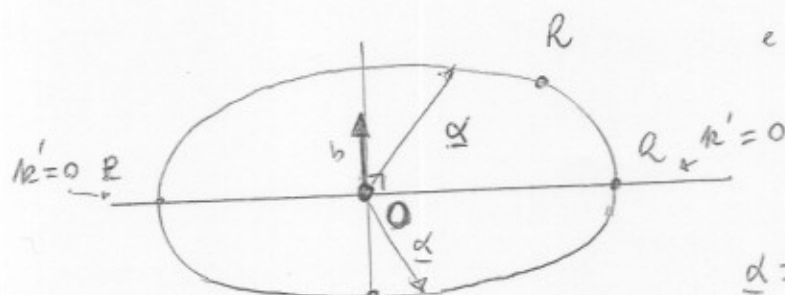
Dim. $R: [0, l] \ni s \rightarrow R(s) \in \mathbb{R}$

γ liscia, $R(0) = R(l)$ [γ liscia come f. periodica ...



In $[0, l]$ ammette max e minimo assoluti, che possiamo supporre distinti (altrimenti C sarebbe una circonferenza...)

e interni a $[0, l]$. Tracciamo RQ , e sia $\underline{b} \perp RQ$,



$\|b\| = 1$
e siamo p.a. $R \in Q$
per una vertice

$$\underline{\alpha} = \underline{\alpha}(s)$$

Osservazione cruciale $\rightarrow$

Si può supporre (v. figura)
(che $\langle \underline{\alpha}, \underline{b} \rangle \geq 0$ dove $K' \geq 0$)

$$\begin{aligned} \text{ora } \int_0^l R'(s) \underline{\alpha}(s) ds &= \int_0^l \underbrace{(R \underline{\alpha})'}_{=0} ds - \int_0^l R(s) \underbrace{\underline{\alpha}'(s)}_{=\underline{t}(s)} ds \\ &= \int_0^l \underline{R}'(s) ds = 0 \end{aligned}$$

ma, per come è stato orientato $\underline{b}$, l'integrandò
è ≥ 0 (e non è id. nullo). Ciò porta ad una
contraddizione. Quindi deve esistere almeno
un vertice R . Ma allora, se due archi
contigui (dei tre individuati da P, Q, R), ne ha
lo stesso segno. Ragionando come prima, si conclude
che ciò è assurdo. Deve pertanto esistere un quarto vertice. $\square$