(3A) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \overset{T_\lambda}{\mapsto} \begin{pmatrix} x+\lambda y & 0 \\ z & x-\lambda y \end{pmatrix}$

$\mathbb{R}^3 \qquad M(2\times 2, \mathbb{R})$

$m_{can,can}$:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\, e_{11} + 1\, e_{22}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda\, e_{11} - \lambda\, e_{22}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = e_{21}$

M Def: $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$ — in 3B $\begin{pmatrix} 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \lambda & \lambda & 0 \end{pmatrix}$

Ker T_λ: $\begin{cases} x+\lambda y = 0 \\ x-\lambda y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \neq 0: & x = y = z = 0 \quad \text{Ker } T_\lambda = \{0\} \\ \lambda = 0 & x = 0,\ z = 0 \end{cases}$

$\text{Ker } T_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

Im $T_\lambda = \begin{cases} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \beta \end{pmatrix} \right\} & \lambda \neq 0 \\ \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \alpha \end{pmatrix} \right\} & \lambda = 0 \end{cases}$ $\quad (e_{11}, e_{21}, e_{22})$

$\alpha = \alpha$, $x = \beta$, $z = \gamma$ $\Rightarrow \alpha = \beta$ $\quad (e_{11}+e_{22}, e_{21})$

$T_\lambda^{-1} b \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\lambda \neq 0$: $\begin{cases} x+\lambda y = 1 \\ x-\lambda y = 0 \\ z = 1 \end{cases}$ $\quad 2x = 1 \quad x = \frac{1}{2}, \quad \lambda y = \frac{1}{2}$, $z = 1$ $\quad \therefore y = \frac{1}{2\lambda}$

$T_\lambda^{-1} b$: $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2\lambda} \\ z = 1 \end{cases}$ $\qquad \lambda = 0 \quad \begin{matrix} x = 1 \\ x = 0 \end{matrix}$ NO (Chiamo a posteriori.)

$T_0^{-1} b = \emptyset$

$T_1^{-1} b_\mu$: $\begin{cases} \mu \neq 0 & \emptyset \\ \mu = 0, & T_1^{-1} b = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \end{cases}$

ESERCIZI di ELEMENTI DI GEOMETRIA

a.a. 2007/08

Prof. M. Spera

Esercizi d'esame dei corsi di geometria impartiti da M.S. C.L. Ingegneria Gestionale

Università di Padova, Sede di Vicenza

I

Geometria

Ingegneria Gestionale

1ª Prova scritta dell' 8 giugno 1999

Avvertenze.

i) Si svolgano gli esercizi **1** e **4** nel *primo* foglio di bella, gli esercizi **2** e **3** nel secondo foglio di bella.

ii) Per la *seconda prova parziale* è sufficiente risolvere gli esercizi 3 e 4, marcati con $\star$.

1. Si consideri al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ la famiglia di applicazioni lineari $T_\lambda : M(2\times 2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ così definite:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + (b+\lambda c)x + (b-\lambda c)x^2$$

i) Si scriva la matrice di T_λ rispetto alle basi canoniche dei due spazi in questione.

ii) Dire per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ il polinomio $1 + x + 2x^2$ appartiene a $Im\, T_\lambda$, nel qual caso se ne determini successivamente la controimmagine.

iii) Posto $A := \cup_{\lambda\in\mathbb{R}} Ker\, T_\lambda$, determinare $< A >$.

iv) Determinare un complemento diretto di $< A >$ in $M(2\times 2, \mathbb{R})$

2. i) Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia (e_1, e_2, e_3) una sua base. Sia dato poi il polinomio $p = p(\lambda) := -\lambda^2(\lambda+1)$. i) Costruire $T \in End(V)$ *diagonalizzabile* con polinomio caratteristico uguale a p tale che

$$\begin{aligned} T(e_1+e_2) &= 0 \\ T(e_1-2e_2) &= 2e_2 - e_1 \end{aligned}$$

ii) Scrivere la matrice di T rispetto alla base assegnata.

iii) Stessi problemi dei punti i) e ii) con T *non diagonalizzabile*.

3 $\star$. Nello spazio euclideo reale E^3 in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si consideri la retta r di equazione

$$\begin{cases} x+y &= 0 \\ z &= 1 \end{cases}$$

i) Si verifichi che r è parallela al piano π_0 di equazione $z = 0$.

ii) Si determinino i due piani del fascio di asse r che formano con il piano π_0 angoli (convessi) pari a $\frac{\pi}{3}$.

iii) Detta s la retta intersezione di π_0 con uno dei due piani del fascio in questione intersecante il piano $x = 0$ in un punto avente coordinata y *negativa* e dato il punto (appartenente a r) $P = (-2, 2, 1)$, si determini il punto M di s a distanza minima da P.

iv) Si determini il simmetrico Q del punto P rispetto a M e il simmetrico R di Q rispetto al piano π_0.

v) Infine (era ora!) si calcoli l'area del triangolo PQR.

Sugg. Disegnando una figura ci si orienta immediatamente.

4 $\star$. i) Determinare, nel piano euclideo reale $\mathbb{E}^2$, in cui è fissato un riferimento cartesiano, l'equazione dell'iperbole $\mathcal{I}$ avente come asintoti le rette $r : 3x - y - 3 = 0$ e $s : x - 3y - 1 = 0$ e passante per l'origine.

Sugg. Costruire un opportuno fascio di coniche in $\mathbb{P}^2$.

ii) Determinare la forma canonica metrica di $\mathcal{I}$.

iii) Dato il diametro $d : 2x - y - 2 = 0$, si determini il diametro d' ad esso coniugato.

iv) Data, in $\mathbb{R}^3$, la matrice simmetrica

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -3 & 3 & -5 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

se ne determini una base diagonalizzante (X_0, X_1, X_2) (nel senso della congruenza), dove $X_0 = (1, 1, 0)$.

Sugg. Si ricorra all'interpretazione geometrica...

Tempo a disposizione 2h.30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Prova scritta di Geometria 8/6/99

(1) $T_\lambda : \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto a + (b+\lambda c)x + (b-\lambda c)x^2$

i) matrice $M(2\times 2, \mathbb{R})$ base $e_{11}\ e_{12}\ e_{21}\ e_{22}$

$\mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ base $1,\ x,\ x^2$

$m(T_\lambda)$ è 3×4

$e_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto 1 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 1ª col.

$e_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto x + x^2 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2ª col.

$e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \lambda x - \lambda x^2 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ +\lambda \\ -\lambda \end{pmatrix}$ 3ª col.

$e_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto 0$ 4ª col. $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Dunque:

$$m(T_\lambda) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda & 0 \end{pmatrix}$$

osserviamo che

$\operatorname{Ker} T_\lambda = \langle e_{22} \rangle$ se $\lambda \neq 0$

$= \langle e_{21}, e_{22} \rangle$ se $\lambda = 0$

sicché $\operatorname{Im} T_\lambda = \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$ per $\lambda \neq 0$
$(\langle 1, x, x^2 \rangle)$

$= \langle 1, x + x^2 \rangle$ per $\lambda = 0$
$\quad\ \ \shortparallel$
$\quad a + bx + bx^2$

$\Rightarrow \overbrace{1 + x + 2x^2}^{p} \in \operatorname{Im} T_\lambda$ per $\lambda \neq 0$

$\Rightarrow T_\lambda^{-1}(p) = \underset{\text{matrice}}{\tilde{p}} + \underset{\lambda\neq 0}{\operatorname{Ker} T_\lambda} = \tilde{p} + \langle e_{22} \rangle$

ovvero:

$a = 1$

$b + \lambda c = 1 \qquad \lambda \neq 0$

$b - \lambda c = 2$

$2b = 3 \qquad b = \frac{3}{2}$

$\lambda c = 1 - b = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow c = -\frac{1}{2\lambda}$

Dunque $\tilde{p} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2\lambda} & 0 \end{pmatrix}$

e $T_\lambda^{-1}(p) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2\lambda} & \alpha \end{pmatrix}$ $\lambda \neq 0$ con $\alpha \in \mathbb{R}$

Se $\lambda = 0$ $\quad p \notin \operatorname{Im} T_0$

$A = \underset{\lambda\neq 0}{\langle e_{22} \rangle} \cup \underset{\lambda = 0}{\langle e_{22}, e_{21} \rangle}$

$\Rightarrow A = \langle e_{21}, e_{22} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

Compl. diretto Z: $\langle A \rangle \oplus Z = M(2\times 2, \mathbb{R})$

$Z = \langle e_{11}, e_{12} \rangle = \left\{ \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma, \delta \in \mathbb{R} \right\}$

per es:

(2) Sia $v_2 = e_1 + e_2 \xmapsto{T} 0$

$v_3 = e_1 - 2e_2 \xmapsto{T} 2e_2 - e_1 = -v_3$.

Poniamo poi $v_1 = e_3 \xmapsto{T} 0$.

T è diag. e $m_{vv}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 &\xmapsto{T} 0 \\ e_1 - 2e_2 &\longmapsto 2e_2 - e_1 \\ e_3 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

Applicando l'alg. di Gauss è, in coordinate

$$\begin{aligned} e_1 + e_2 &\longmapsto 0 \\ -e_1 + 2e_2 &\longmapsto e_1 - 2e_2 \\ e_3 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3e_2 &\longmapsto e_1 - 2e_2 \\ e_2 &\longmapsto \frac{e_1}{3} - \frac{2}{3}e_2 \\ e_3 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

$$e_1 - e_2 \longmapsto \frac{2}{3}e_2 - \frac{e_1}{3}$$

$$\begin{aligned} e_1 &\longmapsto \frac{2}{3}e_2 - \frac{e_1}{3} \\ e_2 &\longmapsto \frac{e_1}{3} - \frac{2}{3}e_2 \\ e_3 &\longmapsto 0 \end{aligned} \qquad T: \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{diag}}$

T non diag.

$$\begin{aligned} v_1 &\longmapsto v_2 \\ v_2 &\longmapsto 0 \\ v_3 &\longmapsto -v_3 \end{aligned} \qquad m_{vv} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} e_3 &\longmapsto e_1 + e_2 \\ e_1 + e_2 &\longmapsto 0 \\ e_1 - 2e_2 &\longmapsto 2e_2 - e_1 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} e_3 \\ e_1+e_2 \\ e_1-2e_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} e_1+e_2 \\ 0 \\ 2e_2-e_1 \end{array}$$

Gauss...

$$\left[-1 \cdot \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \text{ ok}$$

$$\left[\frac{2}{3} \right. \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

$$-\frac{4}{3} + 2 = \frac{2}{3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \underset{\text{non diag}}{m_{ee}(T)} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

③ $r: \begin{cases} x+y=0 \\ z=1 \end{cases}$

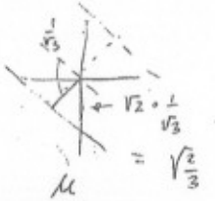
un rag. "intuitivo" fornisce subito $\rightarrow$

$s: \begin{cases} x+y+\sqrt{\frac{2}{3}}=0 \\ z=0 \end{cases}$

operiamo però in modo sistematico

fascio di piani di asse r

(non ortogonale ..)



$x+y+\mu(z-1)=0$

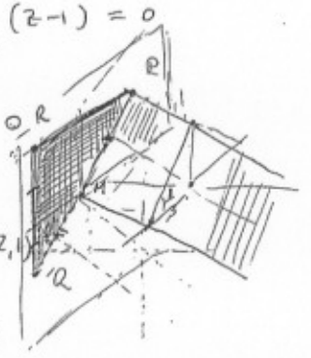
$\cos\varphi = \frac{1}{2} = \frac{\langle \begin{pmatrix}1\\1\\\mu\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\rangle}{\sqrt{2+\mu^2}} = \frac{\mu}{\sqrt{2+\mu^2}}$

$\frac{\mu^2}{2+\mu^2} = \frac{1}{4}$ $\quad 4\mu^2 = 2+\mu^2$ $\quad 3\mu^2 = 2$ $\quad \mu = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

scegliamo, in base alla richiesta del pr. $\mu = -\sqrt{\frac{2}{3}}$ □

la retta s è: $\begin{cases} x+y-\sqrt{\frac{2}{3}}(z-1)=0 \\ z=0 \end{cases}$

ovvero s $\begin{cases} x+y+\sqrt{\frac{2}{3}}=0 \\ z=0 \end{cases}$



prendiamo ora il piano τ per P: (−2, +2, 1)

⊥ a r ; pn. direttore di r

$(1, -1, 0)$

$l \quad m \quad n$

$x+2-(y-2)=0$

$x-y+4=0$

troviamo $M = \tau \cap s$

$\begin{cases} x-y+4=0 \\ x+y+\sqrt{\frac{2}{3}}=0 \\ z=0 \end{cases}$

$2x+4+\sqrt{\frac{2}{3}}=0$

$x = -2-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$y = -x-\sqrt{\frac{2}{3}} = 2+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{2}{3}}$

$= 2-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$

$\Rightarrow M: \left(-2-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}},\ 2-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}},\ 0\right)$ $\quad P = (-2, 2, 1)$

troviamo Q : $\frac{Q+P}{2} = M$ $\quad Q+P = 2M$

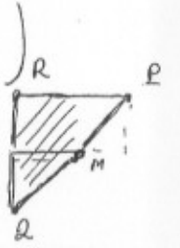
$Q = 2M-P$

$P = (-2, 2, 1)$

$Q = \left(-4-\sqrt{\frac{2}{3}}+2,\ 4-\sqrt{\frac{2}{3}}-2,\ -1\right)$

$Q = \left(-2-\sqrt{\frac{2}{3}},\ 2-\sqrt{\frac{2}{3}},\ -1\right)$

$R = \left(-2-\sqrt{\frac{2}{3}},\ 2-\sqrt{\frac{2}{3}},\ +1\right)$



area $t = \frac{1}{2}\overline{PR}\cdot\underbrace{\overline{RQ}}_{2} = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\sqrt{\frac{2}{3}+\frac{2}{3}}$

$\Delta(PQR)$ è rettangolo in R!

$= \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

(4) $r: \quad 3x - y - 3 = 0$

$$\boxed{y = 3(x-1)}$$

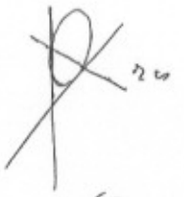
$s: \quad x - 3y - 1 = 0$

$x - 1 = 3y$

$$\boxed{y = \frac{1}{3}(x-1)}$$

$r \cap s = C = (1,0)$

$\Leftrightarrow$ gli assi dell'ip. Σ saranno $y = \pm x$



prendiamo il fascio delle coniche tangenti r e s nei pti di intersezione. Si ha

$$(3x_1 - x_2 - 3x_0)(x_1 - 3x_2 - x_0) + \lambda x_0^2 = 0$$

$$3x_1^2 - x_1x_2 - 3x_0x_1 - 9x_1x_2 + 3x_2^2 + 9x_0x_2 - 3x_1x_0 + x_2x_0 + (3+\lambda)x_0^2 = 0$$

$$(3+\lambda)x_0^2 + 3x_1^2 + 3x_2^2 - 10x_1x_2 - 6x_0x_1 + 10x_0x_2 = 0$$

passaggio per O: $(1,0,0) \Rightarrow \lambda = -3$

$$\Rightarrow \quad 3x_1^2 + 3x_2^2 - 6x_0x_1 + 10x_0x_2 - 10x_1x_2 = 0$$

eq. affine

$$\boxed{\Sigma = 3x^2 - 10xy + 3y^2 - 6x + 10y = 0}$$

$$A: \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -3 & 3 & -5 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

controllo a ritroso dir. asintoti centro

$3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0$

$3x^2 - 10x + 3 = 0$

$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-9}}{3} = \frac{5 \pm 4}{3} \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$

$$(1 \ x \ y)\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -3 & 3 & -5 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 \ x \ y)\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} = -3 + 3x - 5y = 0 \leftarrow (1,0) \text{ ok}$$

$$(1 \ x \ y)\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = 5 - 5x + 3y = 0 \quad \text{ok}$$

passaggio per O: chiaro

Calc. gli autovalori

$$t^2 + \frac{a_{00}\gamma}{a}t + \frac{a_{00}^3}{a^2} = 0$$

$a = \det A = 3 \cdot 25 + 3 \cdot 25 - 3 \cdot 25 - 27 = 25 - 27 = 48$

$\gamma = 6 \qquad a_{00} = 9 - 25 = -16$

$$t^2 + \underbrace{\frac{-16 \cdot 6}{48}}_{-2} t + \frac{(-16)^3}{48^2} = 0$$

$$\frac{-16^3}{16^2 \cdot 3^2} = \frac{-16}{9}$$

$$t^2 - 2t - \frac{16}{9} = 0 \qquad 9t^2 - 18t - 16 = 0$$

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{81+144}}{9}$$

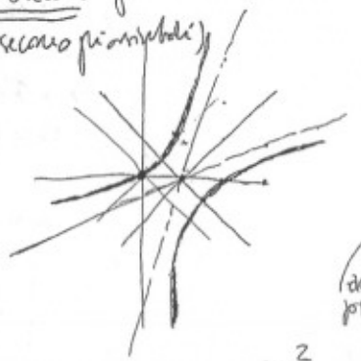
$$t = \frac{9 \pm \sqrt{225}}{9} = \frac{9 \pm 15}{9} \begin{cases} \frac{24}{9} = \frac{8}{3} \\ -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$t = \begin{cases} \frac{8}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$t = \begin{cases} \frac{8}{3} = \frac{1}{\alpha} & \alpha = \frac{3}{8} > 0 \\ -\frac{2}{3} = \frac{1}{\beta} & \beta = -\frac{3}{2} < 0 \end{cases}$$

senza fare calcoli gli assi sono $y = \pm(x-1)$

(infatti bisecano gli asintoti)



l'asse focale è $y = -(x-1)$

$= 1-x$

$\boxed{x+y-1=0}$

(poiché $0 \in \mathcal{X}$)

dobbiamo prendendolo come asse X

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{\frac{3}{8}} \qquad b = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

check: int. $y = 1-x$ in $\mathcal{C}$:

$$3x^2 - 10x(1-x) + 3(1-x)^2 - 6x + 10(1-x) = 0$$

$$3x^2 - 10x + 10x^2 + 3 + 3x^2 - 6x - 6x + 10 - 10x = 0$$

$$16x^2 - 32x + 13 = 0$$

$$\frac{\Delta}{4} = 16^2 - 13 \cdot 16 > 0$$

$$= 16(16-13) = 16 \cdot 3$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{16 \cdot 3}}{16} = \frac{16 \pm 4\sqrt{3}}{16} = \frac{4 \pm \sqrt{3}}{4} = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$y = 1 - x = 1 - \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \mp \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{3}{16} + \frac{3}{16} = \frac{3}{8} \Rightarrow a = \sqrt{\frac{3}{8}}$$

$\frac{24}{9} = \frac{8}{3}$

$\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$

$d = \{2x - y - 2 = 0$

trovare il diametro con.

$y = 2(x-1) = 2x - 2$

$P_\infty(d) = (0, 1, 2)$

$$\text{pol.}(P_\infty) = (1 \ x \ y) \begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -3 & 3 & -5 \\ 5 & -5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$= (1 \ x \ y) \begin{pmatrix} -3 + 10 \\ 3 - 10 \\ -5 + 6 \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 \ x \ y) \begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad \boxed{7 - 7x + y = 0}$$

$y = 7x - 7$

$= 7(x-1)$

$\rightarrow P'_\infty = (0 \ 1 \ 7)$

$\Rightarrow X_0 = (1, 1, 0)$

$X_1 = (0, 1, 2)$

$X_2 = (0, 1, 7)$

Geometria
Ingegneria Gestionale
Prova scritta del 30 giugno 1999

Avvertenza.
Si svolgano gli esercizi 1 e 4 nel *primo* foglio di bella, gli esercizi 2 e 3 nel secondo foglio di bella.

1. Nello spazio euclideo reale $\mathbf{E}^3$ in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si consideri la retta r di equazione

$$r : \begin{cases} x+y &= 0 \\ z &= 1 \end{cases}$$

e il piano π di equazione

$$\pi : x + 2y + 3z = 0$$

i) Determinare la retta s proiezione di r su π.
ii) Dato il punto $P = (-1, 1, 1) \in r$, detto P' il suo simmetrico rispetto a π, e posto $Q := r \cap \pi$, si calcoli il volume del tetraedro $OPQP'$.
iii) Si determini la retta r' simmetrica di r rispetto a π.

2. Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione 3 e sia $e = (e_1, e_2, e_3)$ una sua base *ortonormale*.
i) Verificare che esiste ed è unico, per ogni $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, l'endomorfismo $T = T_{\lambda,\mu}$ definito da

$$\begin{array}{rcl} e_1 + e_2 & \mapsto & \lambda(e_1 + e_2) \\ e_2 - e_1 & \mapsto & e_2 - e_1 \\ e_3 & \mapsto & e_3 + \mu(e_1 - e_2) \end{array}$$

ii) Determinare i valori di λ e μ tali che T risulti *diagonalizzabile*. **Sugg.** Non è necessario scrivere la matrice di T rispetto alla base e ma rispetto a...
iii) Dimostrare che per tali valori T è anche *simmetrico*.
iv) Determinare una trasformazione *ortogonale* che diagonalizzi T.
v) (fac.) Scelta una trasformazione *ortogonale speciale* (ovvero con determinante 1) che diagonalizzi T, se ne determini (alla luce del teorema di Eulero) l'asse e l'angolo (non orientato) di rotazione.

3. Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale di dimensione finita e siano $S, T \in End(V)$.
i) Dimostrare che $\rho(TS) = \rho(S)$ se e soltanto se $Im\, S \cap Ker\, T = \{0\}$. ($\rho$ = rango).
ii) Sia $V = U \oplus W$, con U e W diversi da V e $\{0\}$ e siano $s = s_U^W$ e $p = p_U^W$ (simmetria rispetto ad U lungo W, risp. proiezione su U lungo W). Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false.
- ♡ $\rho(p\,s) = \rho(s)$
- ◇ $\rho(p\,p) = \rho(p)$
- ♣ $\rho(s\,s) = \rho(s)$
- ♠ $\rho(s\,p) = \rho(p)$

4. Sia data, nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui è fissato un riferimento cartesiano, la conica $\mathcal{P}$ di equazione

$$\mathcal{P} : 9x^2 - 6xy + y^2 + 2x + 2y = 0$$

i) Verificare che $\mathcal{P}$ è una parabola.
ii) Determinare la forma canonica metrica di $\mathcal{P}$.
iii) Determinare i diametri di $\mathcal{P}$.
iv) Determinarne l'asse e il vertice.
v) (fac.) Determinare il fuoco e la direttrice di $\mathcal{P}$.

Tempo a disposizione 2h.30m
Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Esam 30/6/99

(1) $r: \begin{cases} x+y=0 \\ z=1 \end{cases}$

$\pi: x+2y+3z=0$

fascio di piani di asse r : $x+y+\lambda(z-1)=0$: π_λ
(non am)

imponiamo $\pi_\lambda \perp \pi$: $1\cdot 1 + 1\cdot 2 + \lambda\cdot 3 = 0$

$\underbrace{1+2}_{3} + 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$

$\Rightarrow \pi_{-1}: x+y-(z-1)=0$

$x+y-z+1=0$

$\Rightarrow s: \begin{cases} x+y-z+1=0 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$
$s = \pi_{-1} \cap \pi$

determiniamo ora $Q = r \cap \pi$: $\begin{cases} x+y=0 \\ z=1 \\ x+2y+3z=0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x+2y+3=0 \end{cases}$

$y=-x$
$x-2x+3=0$
$-x+3=0$
$\boxed{x=3}$
$\boxed{y=-3}$
$\boxed{z=1}$
$Q: (3,-3,1)$

$P=(-1,1,1)$

troviamo ora P'

consideriamo la retta ρ $P+tv$ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

troviamo t t.c. $P+tv \in \pi$: ($v \perp \pi$!)

$P+tv = \begin{pmatrix} -1+t \\ 1+2t \\ 1+3t \end{pmatrix} \in \pi$:

$(-1+t)+2(1+2t)+3(1+3t)=0$

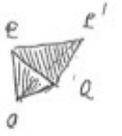
$\underbrace{-1+2+3}_{+4} + \underbrace{(1+4+9)}_{+14}t = 0$

$4+14t=0$
$2+7t=0$
$t=-\frac{2}{7}$

-1-

pertanto P' corr. a $t = \left(-\frac{2}{7}\right)\cdot 2 = -\frac{4}{7}$

$$\Rightarrow P' = \begin{pmatrix} -1 - \frac{4}{7} \\ 1 + 2\left(-\frac{4}{7}\right) \\ 1 + 3\left(-\frac{4}{7}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} -\frac{11}{7} \\ 1 - \frac{8}{7} \\ 1 - \frac{12}{7} \end{pmatrix}$$

volume tetraedro (prendiamo O come pto di rif. !)

$$= \frac{1}{6}\left|\left|\begin{matrix} -1 & -\frac{11}{7} & 3 \\ 1 & -\frac{1}{7} & -3 \\ 1 & -\frac{5}{7} & 1 \end{matrix}\right|\right| =$$

P P'

$$= \frac{1}{6\cdot 7}\left|\left|\begin{matrix} -1 & +11 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 1 \end{matrix}\right|\right| =$$

$$= \frac{1}{6\cdot 7}\left|\left(-1 - 33 + \cancel{15} - 3 - \cancel{15} - 11\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{6\cdot 7}\, 48 = \frac{1}{\cancel{6}\cdot 7}\,\cancel{6}\cdot 8 = \frac{8}{7} \qquad \boxed{V = \frac{8}{7}}$$

La retta r' è $P'Q$ $\qquad P' = \left(-\frac{11}{7}, -\frac{1}{7}, -\frac{5}{7}\right)$

eq. parametriche: $\qquad Q = (3, -3, 1)$

$$\forall P = Q + t(P' - Q) = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t\left(-\frac{32}{7}, +\frac{20}{7}, -\frac{12}{7}\right)^T$$

$$r' \begin{cases} x = +3 - \frac{32}{7}t \\ y = -3 + \frac{20}{7}t \\ z = 1 - \frac{12}{7}t \end{cases}$$

$$-\frac{11}{7} - 3 = -\frac{32}{7}$$
$$-\frac{1}{7} + 3 = \frac{20}{7}$$
$$-\frac{5}{7} - 1 = -\frac{12}{7}$$

Geom. 30/6/99

③ $\rho(S) = \underbrace{\rho(T|_{\mathrm{Im}\,S})}_{\rho(TS)} + \nu(T|_{\mathrm{Im}\,S})$

$\rho(TS) + \nu(T|_{\mathrm{Im}\,S})$

cf. cap 3 delle dispense

$\Rightarrow \rho(S) = \rho(TS) \Leftrightarrow \nu(T|_{\mathrm{Im}\,S}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}\,S \cap \ker T = \{0\}$

φ : FALSO (non mettere dove ipotesi non chiare)

le altre sono tutte VERE

② poniamo $v_1 = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}$

$v_2 = \frac{e_2 - e_1}{\sqrt{2}}$

$v_3 = e_3$

v_1, v_2, v_3 è una base (orton) pertanto T è ben def. (e unico)

si ha perciò

$$m_{vv}(T) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\mu\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

consider. il pol. caratteristico e imponendo $m_g = m_a$

$\Rightarrow$ $\boxed{T \text{ è diag} \Leftrightarrow \mu = 0}$

sicché

$$m_{vv}(T) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 \mapsto \lambda v_1 \\ v_2 \mapsto v_2 \\ v_3 \mapsto v_3 + \mu\sqrt{2}\,\frac{e_1 - e_2}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$-v_2$

ma $v = (v_1\, v_2\, v_3)$ è orton. $\Rightarrow$ T è simmetrico

$\Rightarrow \Omega \in SO(3)$ può essere della forma: $e_1 \mapsto v_1$, $e_2 \mapsto v_2$, $e_3 \mapsto v_3 = e_3$

$$\Omega : \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & +\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Omega^{-1}\, m_{vv}(T)\, \Omega = m_{ee}(T)$$

$\Omega^{-1} = \Omega^t$

asse: $\langle e_3 \rangle$

$\vartheta : \frac{\pi}{4}$ $(\pm)$

④ Geom 30/6/99

$$\mathcal{P}: \quad 9x^2 - 6xy + y^2 + 2x + 2y = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \qquad x^t A x = 0$$

$$S = -3 - 3 - 9 - 1 = -16$$

$\mathcal{P}$ è una parabola: $\quad \mathcal{A} = \det A = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} =$

$= -(1+3) + (-3-9) = -4 - 12 = -16$ (non deg)

$$\mathcal{J} = \operatorname{tr} A_{00} = 10 \qquad \mathcal{A}_{00} = 9 - 9 = 0$$

$$9x^2 - 6xy + y^2 = (3x - y)^2$$

$\Rightarrow$ Diametri: $\quad 3x - y + k = 0$

calcoliamo $p = \sqrt{-\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{J}^3}} = \sqrt{\frac{16}{10^3}} = \frac{4}{10\sqrt{10}} =$

$= \frac{2}{5\sqrt{10}} = \frac{2\sqrt{10}}{5 \cdot 10} = \frac{\sqrt{10}}{25}$

$= \frac{2}{\sqrt{2}\,5\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}$

$$\boxed{p = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}}$$

$\Rightarrow \quad Y'^2 = \frac{2}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}\, X = \underbrace{\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}}}_{2p} X$

asse; prendiamo $P_0 = (0, 1, 3)$

consid. $P_0^\perp : (0, 3, -1)$

$P_0^\perp$ prendiamo la polare di $P_0^\perp$

$$(1 \;\; x \;\; y) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 \;\; x \;\; y) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 27 & +3 \\ -9 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(1 \;\; x \;\; y) \begin{pmatrix} 2 \\ 30 \\ -10 \end{pmatrix} = 0$$

$\frac{1}{10} \quad 2 + 30x - 10y = 0$

a $\boxed{\frac{1}{5} + 3x - y = 0}$ $\quad$ (asse: $k = \frac{1}{5}$)

Vertice: $\quad \mathcal{P} \cap a$

$3x - y = -\frac{1}{5}$

$\left(-\frac{1}{5}\right)^2 + 2x + 2y = 0$

$$\begin{cases} \frac{1}{25} + 2x + 2y = 0 \\ 3x - y = -\frac{1}{5} \end{cases} \qquad y = 3x + \frac{1}{5}$$

$\frac{1}{25} + 2x + 6x + \frac{2}{5} = 0$

$8x + \frac{1+10}{25} = 0 \qquad 8x = \frac{-11}{25}$

$x = -\frac{11}{25 \cdot 8} = \frac{-11}{200}$

$y = \frac{-33}{25 \cdot 8} + \frac{1}{5} = \frac{-33 + 40}{25 \cdot 8} = \frac{7}{200}$

$V = \left(-\frac{11}{200}, \frac{7}{200}\right)$

Sia ora $u = \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3) = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ dir. di a

u : versore

F e H

Sono definite

$$\boxed{p = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{2}{5}}}$$

si ricordi: Ox

$$V \pm \frac{p}{2} u = \begin{pmatrix} -\frac{11}{200} \pm \frac{\sqrt{2}}{10\sqrt{5}} \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{7}{200} \pm \frac{\sqrt{2}}{10\sqrt{5}} \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \quad \frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{5}} \frac{1}{}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{11}{200} \pm \frac{1}{50} \\ \frac{7}{200} \pm \frac{3}{50} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-11 \pm 4}{200} \\ \frac{7 \pm 12}{200} \end{pmatrix} \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \begin{pmatrix} \frac{-7}{200} \\ \frac{19}{200} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{-15}{200} \\ \frac{-5}{200} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{40} \\ -\frac{1}{40} \end{pmatrix}$$

$, \frac{7}{200})$

$\Rightarrow$ 1° sostituendo per ex. $P \cap \{y = 0\}$ asse x

il simmetrico $F: \left(-\frac{3}{40}, -\frac{1}{40}\right)$ $H: \left(-\frac{7}{200}, \frac{19}{200}\right)$

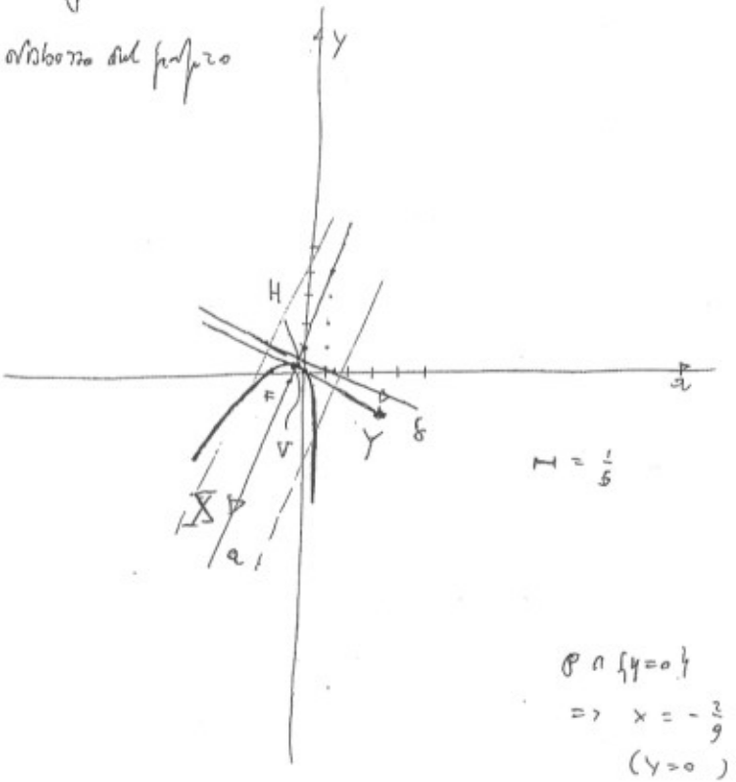
δ: ($\delta \perp$ ad a) $3\left(y - \frac{19}{200}\right) + \left(x + \frac{7}{200}\right) = 0$

$$3y + x - \frac{57}{200} + \frac{7}{200} = 0$$

$$\delta \quad \boxed{3y + x - \frac{1}{4} = 0}$$

P

abbozzo del grafico



$p = \frac{1}{5}$

$P \cap \{y = 0\}$

$\Rightarrow x = -\frac{3}{9}, x = 0$

$(y = 0)$

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 2 settembre 1999

1. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia $e = (e_1, e_2, e_3)$ una sua base.
i) Verificare che esiste ed è unico, per ogni $\mu \in \mathbf{R}$, l'endomorfismo $T = T_\mu$ definito da

$$\begin{array}{ccc} e_1 + e_2 & \mapsto & e_1 - e_2 \\ e_1 - e_2 & \mapsto & e_1 - e_2 \\ e_3 & \mapsto & \mu e_3 + e_1 - e_2 \end{array}$$

ii) Scrivere la matrice di T rispetto alla base e.
iii) Determinare, al variare di μ, una base di $Ker\, T_\mu$ e una base di $Im\, T_\mu$.
iv) Determinare, al variare di μ, la controimmagine di $v = e_1 - e_2 + e_3$.

2. Sia V uno spazio euclideo reale di dimensione 3 e sia $e = (e_1, e_2, e_3)$ una sua base *ortonormale*. Si consideri l'endomorfismo p la cui matrice, rispetto alla base data, sia

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

i) Verificare che p è una *proiezione ortogonale*.
ii) Determinare una base ortonormale di $U := Im\, p$.
iii) Riguardando V come spazio affine, e posto $P_0 = (0,0,1)$, $\mathcal{V} := P_0 + U$, $P = (1,1,1)$, determinare il punto $P' \in \mathcal{V}$ a distanza minima da P.

3. Sia data, in $\mathbf{R}^3$ (visto come spazio vettoriale euclideo rispetto al prodotto scalare standard) la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

rappresentante una forma quadratica q_A rispetto alla base canonica.
i) Determinare la forma canonica metrica e la forma canonica affine (di Sylvester) di q_A.
ii) Posto $U := < (1,1,3) >$, determinare $U^{\perp_A}$. È vero che $U + U^{\perp_A} = U \oplus U^{\perp_A} = \mathbf{R}^3$?
iii) Posto $W := < (0,1,3) >$, determinare $W^{\perp_A}$. È vero che $W + W^{\perp_A} = W \oplus W^{\perp_A} = \mathbf{R}^3$?
iv) (fac.) Interpretare i risultati precedenti in termini di geometria proiettiva (Sugg. cf. es.4)

4. i) Determinare, nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui è fissato un riferimento cartesiano, l'equazione della conica $\mathcal{C}$ tangente alle rette $r : y = 2x + 1$ e $r' : y = 2x - 1$ nei punti $P_1 : (1,3)$ e $P_2 : (-1,-3)$ e passante $P : (1,2)$. **Sugg.** Costruire un opportuno fascio di coniche in $\mathbf{P}^2$.
ii) Determinare la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$.
iii) Dopo aver verificato che la retta $d : y = 3x$ è un diametro di $\mathcal{C}$, se ne determini il diametro coniugato d', procedendo possibilmente per via *sintetica* (ovvero...senza fare calcoli!).

Tempo a disposizione 2h.30m
Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

geometria 2/9/99

(1.)

$$T_\mu : \begin{array}{ccc} e_1 + e_2 & \mapsto & e_1 - e_2 \\ e_1 - e_2 & \mapsto & e_1 - e_2 \\ e_3 & \mapsto & \mu e_3 + e_1 - e_2 \end{array}$$

base $\Rightarrow$ T_μ è ben definito (e unico)

$M_{ee}(T)$. applicando, per ex, l'alg. di Gauss i

$2e_1 \longmapsto 2(e_1 - e_2)$ $\qquad e_1 \mapsto e_1 - e_2$

$2e_2 \mapsto 0$ $\qquad e_2 \longmapsto 0$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} e_1 \longmapsto e_1 - e_2 \\ e_2 \mapsto 0 \\ e_3 \mapsto \mu e_3 + e_1 - e_2 \end{bmatrix} \star$$

$$M_{ee}(T) : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$$

Sia $\mu = 0$ $\qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\rho(T_0) = 1$ $\qquad$ base : $(1,-1,0) \equiv e_1 - e_2$

$\nu(T_0) = 2$ $\qquad$ base : $(e_2, e_1 - e_3)$

Chiamo da $\star$ ma proc. anche analiticamente

(infatti $e_1 - e_3 \mapsto 0$..)

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$x + z = 0 \qquad z = -x$

$\Rightarrow \quad (\alpha, \beta, -\alpha)$

$\alpha e_1 + \beta e_2 - \alpha e_3 = \alpha(\underbrace{e_1 - e_3}) + \beta \underbrace{e_2}$

$\mu \neq 0 \qquad \rho(T_\mu) = 2$

base (per es. $(e_1 - e_2,\ e_3)$)

$\nu(T_\mu) = 1 \qquad$ base: (e_2)

Sia ora $v = e_1 - e_2 + e_3 \qquad v: (1, -1, 1)$

Se $\mu = 0 \qquad T_0^{-1} v = \phi$

$$\begin{pmatrix} +1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\mu \neq 0$

$x + z = 1$

$\cancel{-x - z = -1}$

$\mu z = 1$

$z = \frac{1}{\mu}$

$x = 1 - z = 1 - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu - 1}{\mu}$

$T_\mu^{-1} v = \left\{\left(\frac{\mu-1}{\mu}, \underset{\text{arb.}}{\beta}, \frac{1}{\mu}\right)\right\} =$ per es.

$\boxed{\underbrace{\left(\frac{\mu-1}{\mu}, 0, \frac{1}{\mu}\right)}_{v_0 \text{ sol particolare}} + \langle e_2 \rangle}$

(2) $\quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad e = (e_1\ e_2\ e_3)$ ortonormale

$P = P^t$ (chiaro)

e inoltre $P^2 = P$: infatti

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \underbrace{\frac{9}{16} + \frac{3}{16}}_{\frac{3}{4}} & \underbrace{\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}}_{\frac{\sqrt{3}}{4}} \\ 0 & \underbrace{\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{\sqrt{3}}{16}}_{\frac{\sqrt{3}}{4}} & \underbrace{\frac{3}{16} + \frac{1}{16}}_{\frac{1}{4}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = P$$

$\operatorname{Im} P = \operatorname{Ker} P - 1$

$$0 = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{3}{4} \end{pmatrix}}_{P-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{y}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} z \\ \frac{\sqrt{3}}{4} y - \frac{3}{4} z \end{pmatrix}$$

$-\frac{y}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} z = 0 \qquad y = \sqrt{3} z$

(molt. per $-\sqrt{3}$ ottengo la 2° eq.) $\Rightarrow \operatorname{Im} P = \left\{\begin{pmatrix} \alpha \\ \sqrt{3}\beta \\ \beta \end{pmatrix}\right\}$

base orto

$$\mathrm{Imp} = \{ \alpha e_1 + \beta [\sqrt{3} e_2 + e_3] \}$$

$$v_1 = e_1 \qquad v_2 = \frac{\sqrt{3} e_2 + e_3}{\|\sqrt{3} e_2 + e_3\|} = \frac{\sqrt{3} e_2 + e_3}{\underbrace{\sqrt{\underbrace{3+1}_{4}}}_{=2}} =$$

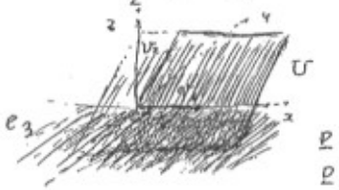
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3$$

base ortonorm.

$v = (v_1, v_2)$

$v_1 = e_1$

$v_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} e_2 + \frac{1}{2} e_3$



$\underline{P} = (1, 1, 1)$

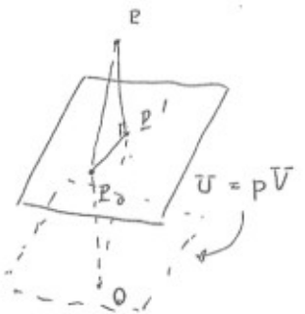
$\underline{P}_0 = (0, 0, 1)$

Det. $\underline{P}'$. Consid. $\underbrace{\underline{P} - \underline{P}_0}_{w} = (1, 1, 0)$

Si ha subito, in base al th. della pr. ortogonale

$$\underline{P}' = \underline{P}_0 + P\bar{w} =$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\underline{P}_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{w}$$



$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{\sqrt{3}+4}{4} \end{pmatrix} \equiv \underline{P}'$$

* Eq. di U come s. sp. affine $z = \alpha y$ $\quad \frac{1}{2} = \alpha \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$z = \frac{\sqrt{3}}{3} y$

altro metodo

U ha eq. $\quad z = \frac{\sqrt{3}}{3} y \qquad z - \frac{\sqrt{3}}{3} y = 0$

$\underline{P}_0 = (0, 0, 1)$

V ha eq. $\quad z - 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} y = 0$

$$\boxed{-\frac{\sqrt{3}}{3} y + z - 1 = 0}$$

consid. la retta r per $\underline{P}'$ $\perp$ V : $\underline{P} = (1, 1, 1)$

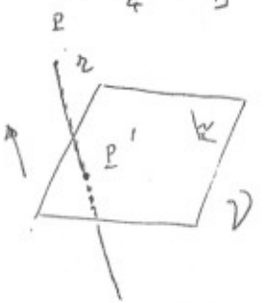
$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) t \\ z = 1 + t \end{cases} \qquad \text{calc. } r \cap V$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} t\right) + \cancel{1} + t - \cancel{1} = 0$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{t}{3} + t = 0$$

$$-\sqrt{3} + 4t = 0 \qquad t = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\Rightarrow \underline{P}' : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \frac{1}{4} \\ 1 + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{4+\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{\text{ok}}} \quad \square$$



③

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

0, 1)

Possiamo ass. A come operatore simmetrico : q_A è la f. quadratica ad esso associata : $q_A = \langle \cdot | A \cdot \rangle$

1, 1) Det. la forma can. metrica : basta det. gli autospazi di A e i corr. autovalori . Pertanto troviamo certamente

$\lambda = -1 \quad e \quad V_{-1} = \langle e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rangle$

in x punto t, da: $\begin{vmatrix} 13-\lambda & -5 \\ -5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (13-\lambda)(2-\lambda) - 25 = 0$

$$26 - 2\lambda - 13\lambda + \lambda^2 - 25 = 0$$

$$\lambda^2 - 15\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = \frac{15 \pm \sqrt{225-4}}{2} = \frac{15 \pm \sqrt{221}}{2} \begin{cases} \equiv \lambda_+ \\ \equiv \lambda_- \end{cases}$$

(corr. positivi)

$$\Rightarrow \quad q_A(\xi) = -\xi_0^2 + \lambda_+ \xi_1^2 + \lambda_- \xi_2^2$$

forma can. affine (di Sylvester) $\quad -\Xi_0^2 + \Xi_1^2 + \Xi_2^2$

tipo $(2, 1)$ $\quad$ quadr. corrispondente ad una conica quadr. a livello proiettivo

segnatura $\quad$ (ad un'ellisse a livello affine e metrico, v. oltre)

Sia $U = \langle \underbrace{(1, 1, 3)}_{u} \rangle$; det $U^{\perp_A}$

$$x^t A u = 0 \qquad (x, y, z) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} -1 \\ \underbrace{13-15}_{-2} \\ \underbrace{-5+6}_{1} \end{pmatrix} = 0$$

$$(x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -x - 2y + z = 0$$

per ex. $\quad z = x + 2y$

$$\Rightarrow \quad U^{\perp_A} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \alpha + 2\beta \end{pmatrix} \right\}$$

(bidimensionale)

sostituisco l'eq. proiettiva cf. ex 4
$x \to x_0$, $y \to x_1$, $z \to x_2$ $\quad -x_0 - 2x_1 + x_2 = 0$
dal pto dell'iperp. affine si ha: $\boxed{y = 2x + 1}$
che corrisponde con l'ex. 4

Si osservi che u è isotropo, sicché $U < U^{\perp_A}$

Se ora $W = \langle \underbrace{(0, 1, 3)}_{w} \rangle$

$$(x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$$= (x \quad y \quad z) \begin{pmatrix} 0 \\ \underbrace{13-15}_{-2} \\ \underbrace{-5+6}_{1} \end{pmatrix} = 0 \qquad -2y + z = 0$$

$$z = 2y$$

proiettivamente è $x_2 = 2x_1$
e, dal pt. dell'iperp. affine $\boxed{y = 2x}$
in accordo con l'ex. 4

$$\Rightarrow \quad W^{\perp_A} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ 2\beta \end{pmatrix} \right\}$$

w non è isotropo e $W + W^{\perp_A} = W \oplus W^{\perp_A} = \mathbb{R}^3$

oppure, se $(x, y, z) \to (x_0\ x_1\ x_2)$

abbiamo calcolato la tangente alla conica $\mathcal{C}$ rapp. da A

in $\begin{array}{ccc} x_0 & x_1 & x_2 \\ (1, & 1, & 3) \end{array}$ $\rightsquigarrow$ $\begin{array}{cc} x & y \\ (1, & 3) \end{array}$

coord. omogenee

e la polare del pto improprio $(0, 1, 3)$,

cioè un diametro. V. anche es. 4

(4) r: $y = 2x+1$ $\quad P_1 = (1, 3)$

r': $y = 2x-1$ $\quad P_2 = (-1, -3)$

Consideriamo il fascio di coniche: passanti per $P: (1,2)$

nella P_1P_2: $y = 3x$

$$(y-2x-1)(y-2x+1) + \lambda(y-3x)^2 = 0$$

$$[(y-2x)^2 - 1] + \lambda(y-3x)^2 = 0$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 - 1 + \lambda(y^2 - 6xy + 9x^2) = 0$$

$$(9\lambda+4)x^2 + (1+\lambda)y^2 + [-4-6\lambda]xy - 1 = 0$$

imp. il passaggio per $P: (1,2)$

$$9\lambda + 4 + 4(1+\lambda) + 2[-4-6\lambda] - 1 = 0$$

$$9\lambda + \underbrace{\cancel{4} + \cancel{4}}_{8} + 4\lambda \cancel{-8} - 12\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda - 1 = 0 \qquad \boxed{\lambda = 1}$$

$$\mathcal{C}: \quad 13x^2 + 2y^2 - 10xy - 1 = 0$$

pr.

$$\mathcal{C}: \quad 13x_1^2 + 2x_2^2 - 10x_1x_2 - x_0^2 = 0$$

$$X^tAX = 0$$

$$A: \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 13 & -5 \\ 0 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

(guardia caso!)

È una conica a centro e $C = (0,0)$ (Chiaro)

det. la f. cor. metrica

$$a = \det A = -(26-25) = -1$$

$$a_{00} = \det A_{00} = 26 - 25 = 1 \ : \ \text{ellisse}$$

$$y = \operatorname{tr} A_{00} = 13 + 2 = 15$$

Ris.

$$t^2 + \frac{a_{00}\, y}{a}\, t + \frac{a_{00}^3}{a^2} = 0$$

$$t^2 - 15t + 1 = 0$$

Radici $\lambda_\pm = \dfrac{15 \pm \sqrt{221}}{2} > 0$ ovviamente

$\lambda_+ > \lambda_-$ $\quad \lambda_+ = \dfrac{1}{b^2}$

$\Rightarrow \underbrace{\dfrac{1}{\lambda_+}}_{b^2} < \underbrace{\dfrac{1}{\lambda_-}}_{a^2}$ $\quad \lambda_- = \dfrac{1}{a^2}$

semiassi: $a = \sqrt{\dfrac{1}{\lambda_-}}$

$b = \sqrt{\dfrac{1}{\lambda_+}}$

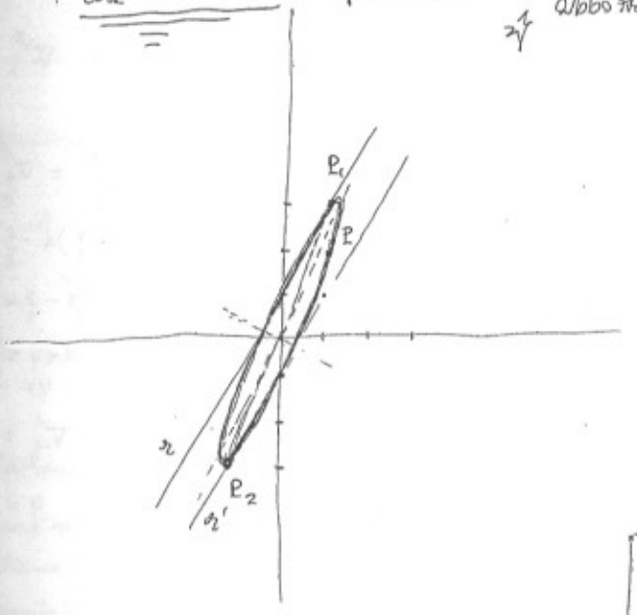
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$y = 3x$ è un diametro → infatti passa per il centro; il diametro coniugato d' è per ragioni geometriche $y = 2x$

infatti $y = 3x$ congiunge P_1 e P_2 in cui $y = 2x \pm 1$ sono tangenti

COSE NON RICHIESTE esplicitamente

abbozzo del grafico



$\sqrt{1+x} \sim 1 + \frac{x}{2} + \dots$

Direzioni degli assi (non richieste)

$$\nabla_{\lambda_\pm} \qquad \begin{pmatrix} 13-\lambda_\pm & -5 \\ -5 & 2-\lambda_\pm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$(13-\lambda_\pm)x - 5y = 0 \qquad \boxed{y = \frac{13-\lambda_\pm}{5} x}$$

$$\frac{13-\lambda_\pm}{5} = \frac{13 - \frac{15 \pm \sqrt{221}}{2}}{5} = \frac{26 - 15 \mp \sqrt{221}}{10} = \frac{11 \mp \sqrt{221}}{10}$$

calcoli approssimativi:

$$\sqrt{221} = \sqrt{225-4} = \sqrt{225\left(1-\frac{4}{225}\right)} = 15\sqrt{1-\frac{4}{225}} \sim$$

$$15\left(1 - \frac{1}{2}\frac{4}{225}\right) = 15\left(1 - \frac{2}{225}\right) = 15 - \frac{2}{15}$$

$$\frac{11 \mp \sqrt{221}}{10} = \frac{11}{10} \mp \frac{\sqrt{221}}{10} \sim \frac{11}{10} \mp \frac{1}{10}\left(15 - \frac{2}{15}\right)$$

$$= \frac{11}{10} \mp \frac{3}{2} \pm \frac{2}{150}$$

$$= 1 \mp \frac{3}{2} + \frac{1}{10} \pm \frac{1}{75}$$

$$\sim -\frac{1}{2}$$

$$\sim \frac{5}{2} > 2 \qquad \text{(ragionevole ....)}$$

$$\lambda_\pm = \frac{15 \pm \sqrt{221}}{2} \sim \frac{15 \pm \left(15 - \frac{2}{15}\right)}{2}$$

$$\sim \frac{1}{2}\left(30 - \frac{2}{15}\right) = 15 - \frac{1}{15} \sim 15$$

$$\sim \frac{1}{2}\frac{2}{15} = \frac{1}{15}$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{\lambda_-}} \sim \sqrt{15} \sim 4$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{\lambda_+}} \sim \frac{1}{\sqrt{15}} \sim \frac{1}{4}$$

Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 21 settembre 1999

1. Siano date, in $\mathbf{R}^3$ (visto come spazio vettoriale euclideo rispetto al prodotto scalare standard) le matrici simmetriche

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

i) Verificare che A e B *non sono* simili.
ii) Dimostrare che A è congruente a ρB per qualche $\rho \neq 0$.
iii) Verificare che le coniche corrispondenti $\mathcal{I}_A : X^t A X = 0$ e $\mathcal{I}_B : X^t B X = 0$, $X^t = (x_0, x_1, x_2)$, sono, viste in $\mathbf{E}^2$, *iperboli* aventi lo stesso centro e gli stessi asintoti.
iv) Dimostrare che $\mathcal{I}_A$ e $\mathcal{I}_B$ *non sono* metricamente equivalenti.

2. Sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione 3 e sia $e = (e_1, e_2, e_3)$ una sua base *ortonormale*. Si consideri l'endomorfismo T la cui matrice rispetto alla detta base sia

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

i) Determinare una base ortonormale tale che la corrispondente matrice di T divenga *diagonale*.
ii) Determinare un endomorfismo S avente lo *stesso* rango di T ma tale che la matrice A *non lo rappresenti rispetto ad alcuna base*.

3. Nello spazio euclideo reale $\mathbf{E}^3$ in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si considerino il punto $P : (0, 0, 1)$ e il piano π di equazione

$$\pi : 2x - x = 0$$

i) Determinare il punto P' ottenuto proiettando ortogonalmente P su π.
ii) Determinare M, proiezione di P su π lungo la direzione $v = (1, 1, -1)$.
iii) Calcolare l'area del triangolo $OP'M$.(O è l'origine).
iv) Detto R il simmetrico di P rispetto a π lungo la direzione $v = (1, 1, -1)$, si calcoli il volume del tetraedro $OPRP'$. **Sugg.** Risolto iii), semplici considerazioni geometriche conducono rapidamente al risultato.

4. i) Determinare, nel piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$, in cui è fissato un riferimento cartesiano, l'equazione dell'iperbole $\mathcal{I}$ tangente alla retta $r : y + x - 2\sqrt{2} = 0$ nel punto $P : (\sqrt{2}, \sqrt{2})$, con asintoto $a : y = 2x$ e con centro nell'origine. **Sugg.** Costruire un opportuno fascio di coniche in $\mathbf{P}^2$.
ii) Determinare l'altro asintoto e gli assi di $\mathcal{I}$.
iii) Determinare la forma canonica metrica di $\mathcal{I}$.

Tempo a disposizione 2h.30m
Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Geometria 21/9/99

(1) Calc. gli autospazi e ed autovalori
comunque per rispondere subito vediamo che $\mathbb{R}^{1*}$

$\langle e_1 \rangle = V_2^A = V_{-2}^B$

$$0 = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - \frac{25}{4} = 0$$

$$(2-\lambda)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 0$$

$$\left(2-\lambda+\frac{5}{2}\right)\left(2-\lambda-\frac{5}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{9}{2} \qquad \lambda = -\frac{1}{2}$$

$V_{\frac{9}{2}}^A = V_{\frac{9}{2}}^B$

$\left(2-\frac{9}{2}\right)x - \frac{5}{2}y = 0$

$-\frac{5x}{2} - \frac{5}{2}y = 0$

$x + y = 0$

$y = -x$

$\Rightarrow V_{-\frac{1}{2}}^A = V_{-\frac{1}{2}}^B$

$y = x$

A : tipo $(2,1)$

B : tipo $(1,2)$

consideriamo $-B = \rho B$ con $\rho = -1$

τ $-B$: tipo $(2,1)$ $\Rightarrow$ $A \approx -B$ □

$\mathcal{A} = \det A = \cancel{2} \cdot \frac{9}{\cancel{2}} \cdot -\frac{1}{2} = -\frac{9}{2}$

$\mathcal{B} = \det B = +\cancel{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot +\frac{1}{\cancel{2}} = \frac{9}{2}$

$\mathcal{A}_{00} = \mathcal{B}_{00} = 4 - \frac{25}{4} = \frac{16-25}{4} = -\frac{9}{4} < 0$ iperbole

$\mathcal{I}_A = \mathcal{I}_B = 4$

$\mathcal{I}_A$ e $\mathcal{I}_B$ hanno centro in 0 (ovvio!)

è chiaro che possiedono gli stessi asintoti.

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$$0 = (x \quad y)\begin{pmatrix} 2x - \frac{5}{2}y \\ -\frac{5}{2}x + 2y \end{pmatrix} = x\left(2x - \frac{5}{2}y\right) + y\left(-\frac{5}{2}x + 2y\right) =$$

$$2x^2 - \frac{5}{2}xy - \frac{5}{2}xy + 2y^2 = 0$$

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0$$

poniamo $y = mx$ $\quad x \neq 0$; div. per $x^2 > 0$:

$$2 - 5m + 2m^2 = 0$$

$$m^2 - \frac{5}{2}m + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \quad m_1 = 2 \qquad \left(s = \frac{5}{2} \; ; \; p = 1\right)$$
$$m_2 = \frac{1}{2}$$

gli asintoti sono (per intersezione) $y = 2x$ e $y = \frac{1}{2}x$

osserviamo che gli assi sono $y = \pm x$ (bisettrici gli asintoti)

Chiamo anche dal calcolo di $V_{\frac{2}{2}}$ e $V_{-\frac{1}{2}}$.

Completiamo il calcolo della f. cor. metrica

$$t^2 + \frac{a_{00}\,\gamma}{a}t + \frac{a_{00}^3}{a^2} = 0 \qquad \text{e con } B.$$

A: $$t^2 + \frac{+\frac{9}{4}\cdot 4}{+\frac{4}{2}}t + \frac{\left(-\frac{9}{4}\right)^3}{\left(\frac{9}{2}\right)^2} = 0$$

$$t^2 + 2t - \frac{9}{4^3}\cdot 4 = 0$$

iperboli $$t^2 + 2t - \frac{9}{16} = 0 \quad \begin{cases} \frac{1}{4} \\ -\frac{9}{4} \end{cases} \qquad s = -2 \quad p = -\frac{9}{16}$$

controllo: $16t^2 + 32t - 9 = 0$

$$t = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 144}}{16} = \frac{-16 \pm \sqrt{400}}{16} = \frac{-16 \pm 20}{16} \begin{cases} \frac{1}{4} \\ -\frac{36}{16} = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

B: $$t^2 - 2t - \frac{9}{16} = 0 \qquad s = 2 \; ; \; p = -\frac{9}{16}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{9}{4}, \quad t = -\frac{1}{4}$$

$y = 0$

$= 0$

0

x

$V_{-\frac{1}{2}}$

x

$x + 2y) =$

I_A : $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{4}$ $\quad \alpha = a^2 = 4$ $\quad \boxed{a = 2}$

$\frac{1}{\beta} = -\frac{9}{4}$ $\quad \beta = -\frac{4}{9} = -b^2 \Rightarrow \boxed{b = \frac{2}{3}}$

I_B : $a = \frac{2}{3}$
$b = 2$

I_A : $(y - 2x)(2y - x) + 2 = 0$

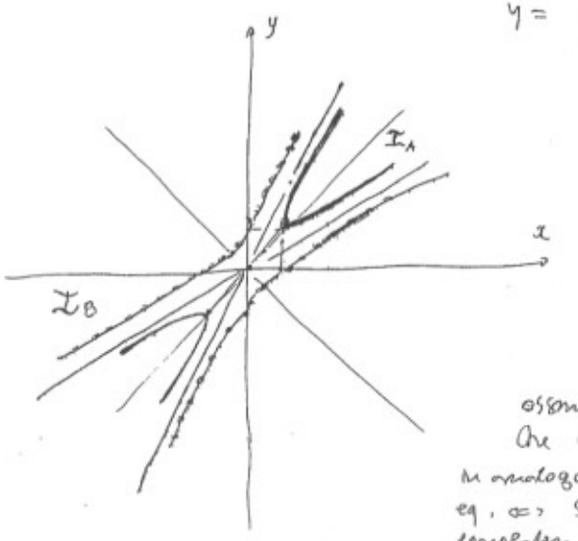
I_B $(y - 2x)(2y - x) - 2 = 0$

$I_A \cap \{y = x\}$ $\quad -x \cdot x + 2 = 0$ $\quad x^2 = 2$ $\quad x = \pm\sqrt{2}$, $y = \pm\sqrt{2}$

$I_B \cap \{y = -x\}$ $\quad (-3x)\cdot(-3x) - 2 = 0$

$9x^2 = 2$ $\quad x = \pm\sqrt{\frac{2}{9}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$

$y = \mp\frac{\sqrt{2}}{3}$



$I_B \cap \{y = 0\}$

$-2x(-x) - 2 = 0$

$2x^2 - 2 = 0$

$x^2 = 1$

$x = \pm 1$

osserviamo in gen. che due iperboli in analogia pos sono indis. eq. $\Leftrightarrow$ sono unicamente equivalenti, e pertanto $a = b$

(2) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

A è simmetrica ; cal. pli autospazi: intanto $\langle e_1 \rangle = V_2 \overset{\text{III}}{\langle b_0 \rangle}$

$$0 = \begin{vmatrix} \frac{3}{4} - \lambda & \frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4} - \lambda \end{vmatrix} = \left(\frac{3}{4} - \lambda\right)\left(\frac{1}{4} - \lambda\right) - \frac{3}{16} = 0$$

$$\cancel{\frac{3}{16}} - \frac{\lambda}{4} - \frac{3}{4}\lambda + \lambda^2 - \cancel{\frac{3}{16}} = 0$$

$$\lambda^2 - \lambda = 0 = \lambda(\lambda - 1) \quad \begin{matrix} \lambda = 1 \\ \lambda = 0 \end{matrix}$$

Calcoliamo V_0: $\frac{3}{4}x + \frac{\sqrt{3}}{4}y = 0$

$y = -\sqrt{3}x \qquad V_0 : \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix} \right\rangle$

$\Rightarrow V_0 = \langle e_1 - \sqrt{3} e_2 \rangle = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}}_{b_1} \right\rangle$

$\Rightarrow V_1 = \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}_{b_2} \right\rangle$

* $b = (b_0, b_1, b_2)$ base ortonormale. Diagonalizzando rende $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Definiamo per 1x. $\mathcal{S}$ cost: $M_{bb}(S) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

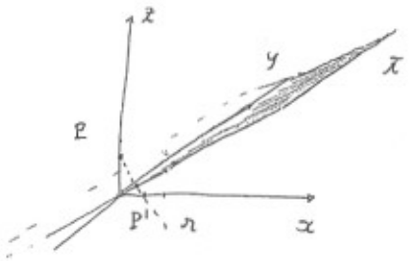
Allora $P_c^{\mathcal{S}} \neq P_c^T$ sicchè S e T non sono simili

e ciò basta per concludere.

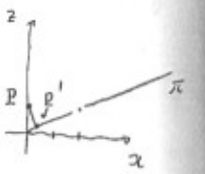
(3) $P : (0,0,1) \qquad \pi \quad 2z - x = 0 \qquad x - 2z = 0$

$x = 2z$

$z = \frac{1}{2}x$



1x Zione:



Calcoliamo P' sia r passante per P e $\perp \pi$:

$$\begin{cases} x = t \cdot 1 = t \\ y = t \cdot 0 = 0 \\ z - 1 = t \cdot (-2) = -2t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \qquad (l, m, n) = (1, 0, -2)$$

$\Rightarrow (t) - 2(1 - 2t) = 0$

$t + 4t - 2 = 0$

$5t - 2 = 0 \qquad t = +\frac{2}{5}$

$$\Rightarrow P' : \left(\overbrace{+\frac{2}{5}}^{t}, \overbrace{0}^{0}, \underbrace{-2\overbrace{\left(+\frac{2}{5}\right) + 1}^{1-2t}}_{-\frac{4}{5} + 1 = +\frac{1}{5}} \right)$$

$P' = \left(+\frac{2}{5}, 0, +\frac{1}{5} \right)$

controllo $P' \in \pi$? sì.

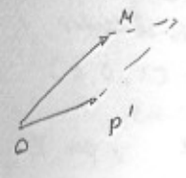
Def. M: Sia r': $\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z - 1 = -t \end{cases} \qquad z = 1 - t$

$\Rightarrow 2(1 - t) - t = 0 \qquad 2 - 2t - t = 0 \qquad 2 - 3t = 0$

$t = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow \quad M = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \underbrace{1-\frac{2}{3}}_{\frac{1}{3}}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Area $OP'M$ $= \frac{1}{2}\left\| \vec{OP'} \times \vec{OM} \right\| =$



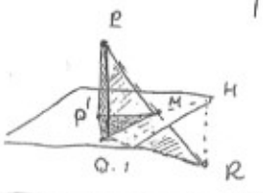
$$\frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ +\frac{2}{5} & 0 & +\frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\begin{vmatrix} 0 & +\frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}\right)^2 + \underbrace{\left(\begin{vmatrix} +\frac{2}{5} & +\frac{1}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{vmatrix}\right)^2}_{=0} + \left(\begin{vmatrix} +\frac{2}{5} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{vmatrix}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{2}{15}\right)^2 + \left(\frac{4}{15}\right)^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{4+16}}{15} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}\sqrt{5}}{15} = \frac{\sqrt{5}}{15}$$

Non è necessario calcolare R (comunque lo faremo dopo)



$RH = PP'$

Stessa base, stessa altezza

$$\text{vol}(OP'PR) = \text{vol}(OP'PM) + \text{vol}(OP'MR) =$$

$$2\,\text{vol}(OP'PM) = 2 \cdot \frac{1}{3}\,\text{area}(OP'M) \cdot PP'$$

Osserviamo che $PP' = \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\underbrace{1-\frac{1}{5}}_{\frac{4}{5}}\right)^2} = \frac{\sqrt{4+16}}{5}$

$P = (0,0,1)$ $P' = \left(+\frac{2}{5}, 0, +\frac{1}{5}\right)$

Si ricordi

$$\Rightarrow \quad \text{vol}(OP'PR) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{5}}}{15} \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} = \frac{\sqrt{20}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{4}{45} \qquad \boxed{\text{vol} = \frac{4}{45}}$$

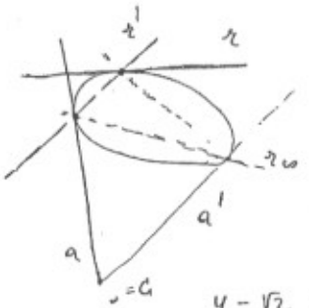
Calcoliamo le coord di R, anche se non serve

$$2M = P + R \quad \Rightarrow \quad R = 2M - P$$

$$= \left(\frac{4}{3} - 0, \frac{4}{3} - 0, \frac{1}{3} - 1\right) = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

$$R : \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

(4)



I appartiene al fascio di coniche bitangenti ad a e r in (0,1,2) e (1, √2, √2)

Det. r' : ha la dir di a (r' ∥ ad a) e passa per (√2, √2):

$$y - \sqrt{2} = 2(x - \sqrt{2})$$

$$y - \sqrt{2} - 2x + 2\sqrt{2} = 0$$

$$r': \quad y - 2x + \sqrt{2} = 0$$

L'eq del fascio è pertanto

$$\underbrace{(x+y-2\sqrt{2})}_{r}\underbrace{(y-2x)}_{a} + \lambda \underbrace{(y-2x+\sqrt{2})^2}_{r'} = 0$$

(due volte)

$$xy + y^2 - 2\sqrt{2}y - 2x^2 - 2xy + 4\sqrt{2}x$$

$$+ \lambda(y^2 + 4x^2 + 2 - 4xy + 2\sqrt{2}y - 4\sqrt{2}x) = 0$$

$$(4\lambda - 2)x^2 + (\lambda+1)y^2 + (-1-4\lambda)xy$$

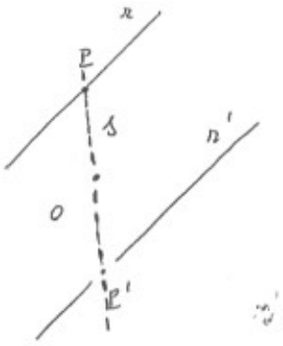
$$+ 2\sqrt{2}(-1+\lambda)y + (+1-\lambda)4\sqrt{2}x + 2\lambda = 0$$

=> poiché I ha centro in O, deve essere $\boxed{\lambda = 1}$

=> $I = 2x^2 + 2y^2 - 5xy + 2 = 0$

=> $I = I_A$ (l'ho fatto apposta!)

Altro metodo



$P' = [1, -\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$

simmetrico di P rispetto al centro $O = [1, 0, 0]$

$r' \parallel r$, per P'

$r': \; x + y + 2\sqrt{2} = 0$

$s: \; y = x$

fascio di coniche bitangenti

$$rr' + \lambda s^2 = 0$$

$$(x+y-2\sqrt{2})(x+y+2\sqrt{2}) + \lambda(y-x)^2 = 0$$

$$(x+y)^2 - 8 + \lambda(y-x)^2 = 0$$

$$\lambda(x^2+y^2-2xy) + (x^2+y^2+2xy) - 8$$

$$(\lambda+1)x^2 + (\lambda+1)y^2 + 2(1-\lambda)xy - 8 = 0$$

$y = mx$ $\qquad 1+\lambda + (\lambda+1)m^2 + 2(1-\lambda)m = 0$

$m = 2$ è radice $\qquad 1 + \lambda + (\lambda+1)\cdot 4 + 4(1-\lambda) = 0$

$$5(\lambda+1) + 4 - 4\lambda = 0$$

$$\lambda + 9 = 0 \qquad \lambda = -9$$

$-8x^2 - 8y^2 + 10xy - 8 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{2x^2 + 2y^2 - 5xy + 2}$

Calcoliamo l'eq. Dall'altro vertice:

o proc. ... Direttamente o facciamo così, per es:

$$(y-2x)(y-\alpha x) = \rho\,(2x^2+2y^2-5xy)$$

$\neq 0$ NOTARE!

$$y^2 - 2xy - \alpha xy + 2\alpha x^2$$

$$2\alpha x^2 - (2+\alpha)xy + y^2$$

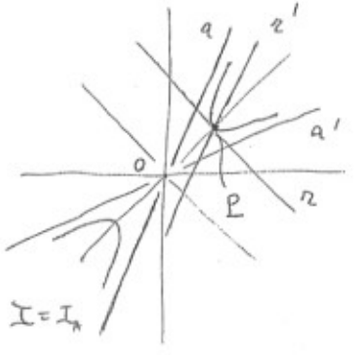
$$2\alpha = 2\rho \qquad \boxed{\rho = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \tfrac{1}{2}}$$

$$1 = 2\rho$$

$$2+\alpha = 5\rho \qquad \left(2+\tfrac{1}{2} = \tfrac{5}{2} \text{ ok}\right)$$

$\Rightarrow a' : \; y = \frac{1}{2}x \qquad \Rightarrow$ asse: $y = \pm x$

Per la forma canonica si fa. es 1.



Geometria

Ingegneria Gestionale

Prova scritta del 24 gennaio 2000

1. Nello spazio vettoriale $\mathbf{R}^3$ (visto come spazio affine) siano dati il piano $U : x - 3y + 2z = 0$ e la retta per l'origine di direzione $W =< (1,2,1)^t >$.
i) Determinare la matrice A (rispetto alla base canonica) di p_U^W, proiezione su U lungo W.
ii) Determinare una base in cui p_U^W abbia la forma canonica.
iii) *Partendo* dalla matrice A determinata in i), dopo aver verificato che essa rappresenta una proiezione p, si *ricostruiscano* U e W (ovvero $p = p_U^W$).

2. Nello spazio euclideo reale $\mathbf{E}^3$ in cui sia fissato un riferimento cartesiano, si considerino la retta r di equazione

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

e il piano $\pi : x + y = 0$.
i) Determinare la retta p proiezione di r su π lungo la direzione $W =< (0,1,1)^t >$.
ii) Detto π' il piano individuato da r e p, si determinino i due piani del fascio di asse p che formano con il piano π' angoli (convessi) pari a $\frac{\pi}{3}$.
iii) Detti λ e μ i due piani determinati in ii), si determinino i loro piani bisettori.

3. Si consideri l'applicazione lineare $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^{\leq 2}[x]$ così definita:

$$T : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto a + (b+c)x + (b-c)x^2$$

i) Si scriva la matrice di T rispetto alle basi canoniche dei due spazi in questione.
ii) Dire se il polinomio $(1+x)^2$ appartiene a $Im\,T$, nel qual caso se ne determini successivamente la controimmagine S.
iii) Posto $U := \langle S \rangle$, determinare una base ortonormale di $U^\perp$ (l'ortogonalità è definita rispetto al prodotto scalare standard di $\mathbf{R}^4$).

4. Sia data, nel piano proiettivo reale $\mathbf{P}^2$, la conica $\mathcal{E}$ di equazione $X^tAX = 0$, dove A è la matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

i) Determinare la forma canonica metrica di $\mathcal{E}$.
ii) Dopo aver verificato che la retta $d : x + y + 1 = 0$ (equazione affine) è un diametro di $\mathcal{E}$, se ne determini il diametro coniugato d'.
iii) Determinare un riferimento affine in cui $\mathcal{E}$ abbia la forma canonica affine.
iv) Determinare un riferimento cartesiano in cui $\mathcal{E}$ abbia la forma canonica metrica.

Tempo a disposizione 2h.30m
Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

Pertanto

$$P_U^W \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$P_U^W \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ +1 - 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$P_U^W \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 + \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Sicchè

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & -1 & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} & -1 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \end{array}$$

Si osserva che per ex $-c_1 - 2c_2 = c_3$

e che c_1 e c_2 sono lin. indip. ($\Rightarrow$ base di U $= \operatorname{Im} P_U^W$)

Consideriamo

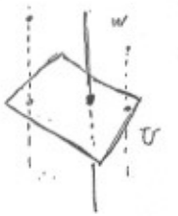
$$b = (\underbrace{c_1, c_2}_{\text{base di } U}, w) \qquad \text{con} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

base di $W = \operatorname{Ker} P_U^W$

Questa è una base tale che

$$m_{bb}(P_U^W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1 Geometria 24/1/2000

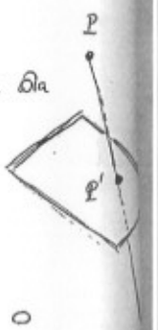


$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$U = \{ x - 3y + 2z = 0 \}$$

Det. la matrice A di P_U^W rispetto alla base canonica. Sia $P = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. La retta r_P^W passante per P, di direzione W ha eq. parametriche

$$r_P^W : \begin{cases} x = a + t \\ y = b + 2t \\ z = c + t \end{cases}$$



Det. l'intersezione $P' = U \cap r_P^W$ è data da

$$\overbrace{a+t}^{x} - 3\overbrace{(b+2t)}^{y} + 2\overbrace{(c+t)}^{z} = 0$$

vale a dire:

$$(a - 3b + 2c) + \overbrace{(1 - 6 + 2)}^{-3} t = 0$$

$$a - 3b + 2c - 3t = 0$$

$$t = \frac{a - 3b + 2c}{3}$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dà $t = \frac{1}{3}$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $=$ $t = -1$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $=$ $t = \frac{2}{3}$

Det. U

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u\, c_1 + v\, c_2 \qquad : \text{eq. parametriche}$$

W
P

$$\begin{cases} x = u\,\frac{4}{3} + v \\ y = u\,\frac{2}{3} + v \\ z = u\,\frac{1}{3} + v \end{cases}$$

Eq. cartesiana:

$$\begin{array}{c} \\ c_1 \rightarrow \\ c_2 \rightarrow \end{array} \begin{vmatrix} x & y & z \\ \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

ovvero

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 4 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$x\,(2-1) - y\,(4-1) + z\,(4-2) = 0$$

$$x - 3y + 2z = 0 \qquad \square$$

In generale, basta prendere una base di U e una di W

☆ Viceversa, data A, ricostruiamo U e W.

Prima di tutto è $A^2 = A$ (calcolo diretto)

$W = \operatorname{Ker} A \quad , \quad U = \operatorname{Im} A$

$\downarrow$ Det. W.

$$\begin{cases} \frac{4}{3}x - y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x - y + \frac{4}{3}z = 0 \\ \frac{1}{3}x - y + \frac{5}{3}z = 0 \end{cases}$$

basta cancell. la prima due equazione

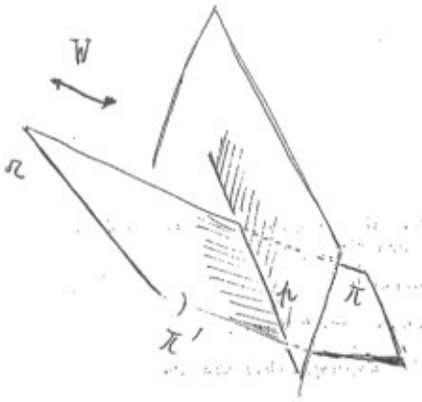
$$4x - 3y + 2z = 0 \qquad 4x - 3y = -2z$$
$$2x - 3y + 4z = 0 \qquad 2x - 3y = -4z$$

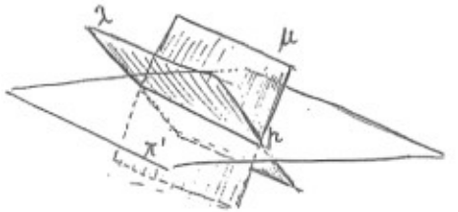
$$2x = 2z \qquad x = z$$

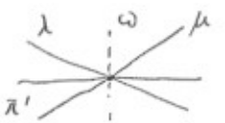
$$2z - 3y = -4z \qquad 3y = 6z \qquad y = 2z$$

$$\Rightarrow W = \left\{ \begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} \right\} \equiv \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

(2)







retta r: eq. parametriche $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$

direzione $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

π: $x + y = 0$

Determ. p: proiezione di r su π lungo W

Scriviamo l'eq. del fascio di piani per r, $\mathcal{F}$

da $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$ si ha, elim. t tra 1 e 2 e 2 e 3, per ex.

$$r: \begin{cases} 2y - 3z = 0 \\ x = 1 + \frac{y}{3} \end{cases}$$

$$3x = 3 + y$$

$$3x - y - 3 = 0$$

$$\boxed{r: \begin{cases} 2y - 3z = 0 \\ 3x - y - 3 = 0 \end{cases}}$$

Il fascio $\mathcal{F}$ descritto da:

$$\xi \cdot (2y - 3z) + \eta (3x - y - 3) = 0$$

$$(\xi, \eta) \neq (0,0)$$

ovvero:

$$3\eta x + (2\xi - \eta) y + (-3\xi) z - 3\eta = 0$$

☆ imponiamo il $\parallel$ con $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ovvero

$$3\eta \cdot 0 + (2\xi - \eta) \cdot 1 - 3\xi \cdot 1 = 0$$

$$2\xi - \eta - 3\xi = 0$$

$$-\eta - \xi = 0$$

$$\eta + \xi = 0$$

$\Rightarrow$ basta prendere $\begin{cases} \xi = 1 \\ \eta = -1 \end{cases}$

: 2 e 3

il piano π' (v. fig.) ha eq. $\begin{pmatrix} \xi = 1 \\ \eta = -1 \end{pmatrix}$

$$-3x + (2+1)y - 3z + 3 = 0$$

$$-3x + 3y - 3z + 3 = 0$$

$$x' : \boxed{x - y + z - 1 = 0}$$

eq. affine

$$p = \pi' \cap \pi \qquad \begin{cases} x' : & x - y + z - 1 = 0 \\ x : & x + y = 0 \end{cases}$$

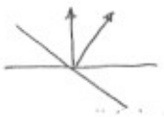
y': fascio per p: $\xi(x+y) + \eta(x - y + z - 1) = 0$

t (0,0) $\Rightarrow (\xi+\eta)x + (\xi-\eta)y + \eta z - \eta = 0$

☆ piano a parte $\eta = 1$ $\quad (\xi+1)x + (\xi-1)y + z - 1 = 0$

(eq. non omogenea)

0 impariamo la condizione $\left[\cos(\pi, \pi') = \frac{1}{2}\right]$



☆ Troviamo necess.: 2 piani, λ, μ v. figura

$$\frac{(\xi+1) - (\xi-1) + 1}{\sqrt{(\xi+1)^2 + (\xi-1)^2 + 1}\ \sqrt{1+1+1}} = \frac{1}{2}$$

$\pi' : (1, -1, 1)$

il di y' $(\xi+1, \xi-1, 1)$

avremo:

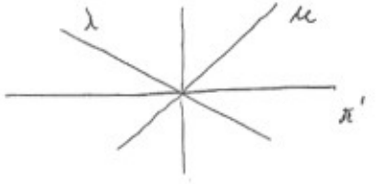
$$\frac{\cancel{3}^{\sqrt{3}}}{\cancel{\sqrt{3}}\sqrt{2\xi^2+3}} = \frac{1}{2}$$

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2\xi^2+3}$$

$$2\xi^2 + 3 = 4 \cdot 3 = 12$$

$$2\xi^2 = 9 \qquad \xi^2 = \frac{9}{2} \qquad \xi = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$\lambda \quad \mu$



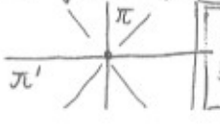
piani bisettori: π' stesso e il piano di y' ad esso $\perp$:

$$(\xi+1) - (\xi-1) + 1 = 0$$

$$3 = 0 \quad !$$

Cosa significa?

Che il piano cercato si ottiene ponendo $\boxed{\eta = 0}$ (e $\xi \neq 0$, $\xi = 1$ per ex.) $\Rightarrow$ $x + y = 0$, cioè il π



Nota: un'occhiata all'eq. di π bastava per concludere subito

③

$$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^{\leq 2}[x]$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto a + (b+c)x + (b-c)x^2$$

$1, x, x^2$

matrice risp. alle basi can.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & +1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$r(T) = \max = 3$

$\nu(T) = 1$

$(r(T) + \nu(T) = 4 = \dim \mathbb{R}^4)$

troviamo $\underbrace{T^{-1}(p)}_{S}$ $\quad p = (1+x)^2 = 1 + 2x + x^2$

Deve essere:

$a = 1$ $\quad a = 1$

$b + c = 2$ $\quad 2b = 3$ $\quad b = \frac{3}{2}$

$b - c = 1$

d arb. $\quad c = 2 - b = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

$c = \frac{1}{2}$

d arbitrario

$$S \equiv T^{-1}(p) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ d \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle}_{W}$$

Determiniamo $\langle S \rangle$

Dato che $Z := \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ e W

sono tali che $Z \cap W = \{0\}$,

si $\underbrace{\langle S \rangle}_{U} = Z + W = Z \oplus W$

$U = \langle S \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$ con $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Determiniamo $S^\perp = \langle S \rangle^\perp = U^\perp$ $\quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

risp. al prod. scal. standard.

Dato che $\langle u_1 | u_2 \rangle = 0$, si sup. determinare

$\mathbb{R}^3 \supset S'^\perp$, con $S' = \left\langle \overbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}}^{u'} \right\rangle$

Eq. cartesiane di $S'^\perp$: $\quad x + \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = 0$

base: sia per es. $x = 1$, $y = 0$, $z = -2$

poniamo $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

prendiamo per ex

$$e_2 = \frac{e_1 \times u'}{\|e_1 \times u'\|} = \frac{e_1 \times u'}{\|e_1\| \, \|u'\|} = \frac{e_1 \times u'}{\|u'\|}$$

sono ortog.

$$\|u'\| = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{1 + \frac{5}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

$$e_1 \times u' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left[3\underline{i} - \underline{j}\left(\frac{1}{2} + 2\right) + \underline{k} \cdot \frac{3}{2} \right] =$$

$$= \left(3\underline{i} - \frac{5}{2}\underline{j} + \frac{3}{2}\underline{k}\right) \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$e_2 = \left(3\underline{i} - \frac{5}{2}\underline{j} + \frac{3}{2}\underline{k}\right) \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{\frac{2}{7}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{35}} \begin{pmatrix} 3 \\ -\frac{5}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

con $\tilde{e}_1 = \begin{pmatrix} e_1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\tilde{e}_2 = \begin{pmatrix} e_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow S^{\perp} = \langle \tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \rangle$$

④ $\mathcal{E}: \quad x^t A x = 0$

$$A: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

tipo di conica: $\mathfrak{a} = \det A = 10 - 18 - 1 = -9$ (Sarrus) (Conica generale)

$$\mathfrak{a}_{00} = \underbrace{\det A_{00}}_{} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 1 = 9 \quad \text{(ellisse)}$$

$$\mathfrak{y} = \operatorname{tr} A_{00} = 5 + 2 = 7$$

forma canonica metrica: risolviamo

$$t^2 + \frac{\mathfrak{a}_{00}}{\mathfrak{a}} \mathfrak{y}\, t + \frac{\mathfrak{a}_{00}^3}{\mathfrak{a}^2} = 0$$

$$t^2 + \frac{9 \cdot 7}{-9} t + \frac{9^3}{9^2} = 0$$

$$t^2 - 7t + 9 = 0$$

$$t = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 36}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{2} \begin{cases} \equiv \lambda_+ > 0 \\ \vee \\ \equiv \lambda_- > 0 \end{cases}$$

semiassi

$$a = \frac{1}{\sqrt{\lambda_-}} \qquad b = \frac{1}{\sqrt{\lambda_+}}$$

s. asse maggiore s. asse minore

ma il centro C di $\mathcal{E}$

, i punti impropri $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$:

dalle loro polari darà C

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{polare di } (0,1,0)$$

$$1)\ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2x_1 - x_2 \qquad \boxed{2x_1 - x_2 = 0}$$

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$2)\ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = 3x_0 - x_1 + 5x_2 \qquad \boxed{3x_0 - x_1 + 5x_2 = 0}$$

$= 1$

$y = 0$ $\qquad$ $y = 2x$

$x + 5y = 0$ $\qquad$ $3 - x + 10x = 0$

$9x + 3 = 0$ $\qquad$ $x = -\frac{1}{3}$, $y = -\frac{2}{3}$

$-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$

$C : [1, -\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}]$

La retta $d : x + y + 1 = 0$ passa per C ed è perciò un diametro. Il pt. all'infinito D_∞ di d è $[0, 1, -1]$ (attenzione!)

d' sarà la polare di D_∞ (reciproità)

$$(x_0 \ \ x_1 \ \ x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$(x_0 \ \ x_1 \ \ x_2)\begin{pmatrix} -3 \\ \overbrace{2+1}^{3} \\ \overbrace{-1-5}^{-6} \end{pmatrix} = 0$$

$$-x_0 + x_1 - 2x_2 = 0$$

poniamo $x_0 = 1$ $\qquad$ $-1 + x - 2y = 0$

$$\boxed{d' : \ x - 2y - 1 = 0}$$

(C, d, d') costituisce un rif. affine di cui $\mathcal{E}$ ha la f. canonica affine

possiamo porre per ex.

$X = x + y + 1 = 0$

(d: asse Y)

$Y = x - 2y - 1 = 0$

(d' asse X)

Si osservi che con la pos. fatta

2i $\quad x^2+y^2=1$

riflettendo otteniamo l'eq. di E

In generale (C, d_1, d') diamo un rif. affine canonico

Riguardo alla forma cart. metrica, gli assi sono le rette per C aventi la direzione degli autospazi di A_{00}.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \text{da'}$$

$$(2-\lambda)(5-\lambda) - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 7\lambda + 9 = 0 \quad \Rightarrow \text{sol } \lambda_+, \lambda_- \quad \left(\text{stessa eq. di prima}\right)$$

autovettori:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_\pm \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

si considera solo la 1ª eq.

$$2x - y = \lambda_\pm x$$

$$y = \underbrace{(2-\lambda_\pm)}_{\equiv\, m_\pm} x \quad \Rightarrow \quad \text{l'eq. degli assi è}$$

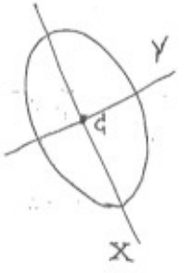
$$y - \underbrace{y_C}_{\frac{2}{3}} = m_\pm (x - \underbrace{x_C}_{\frac{1}{3}})$$

$$y = -\frac{2}{3} + m_\pm\left(x + \frac{1}{3}\right) \quad \text{assi.}$$

l'asse magg. corr all'autovalore minore

asse X : $y = -\frac{2}{3} + m_-\left(x + \frac{1}{3}\right)$ dir. asse maggiore

asse Y : $y = -\frac{2}{3} + m_+\left(x + \frac{1}{3}\right)$ dir. asse minore



i diametri non sono "coniugati" (rispetto a $\frac{y}{a}$) in questa posizione