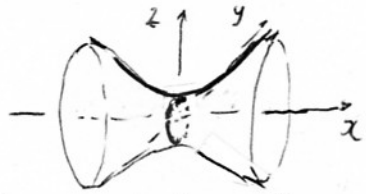
Geometria - Prova scritta del 24/6/2008

(Prof. M. Spera)

(1) Si consideri l'iperboloide a una falda

$$x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0$$

ottenuto ruotando l'iperbole $x^2 - z^2 + 1 = 0$ attorno all'asse x.



Dato $P_0 : (0, 0, 1)$, si calcolino, in tale punto: la prima e la seconda forma fondamentale, la curvatura gaussiana, la curvatura media e le curvature principali. Si determinino le direzioni principali e le direzioni asintotiche, e si abbozzi il grafico dell'indicatrice di Dupin. Si dica, giustificando la risposta, se le linee indicate in figura in grassetto sono geodetiche.

[sugg. utilizzare il calcolo implicito]

(2) Data, in $(0, \pi) \times \mathbb{R}$, la metrica

$$ds^2 = \sin^2 x \, dx^2 + dy^2$$

se ne determini la curvatura gaussiana. Cosa si può concludere? Si determinino, possibilmente in due modi, le geodetiche ad essa relative.

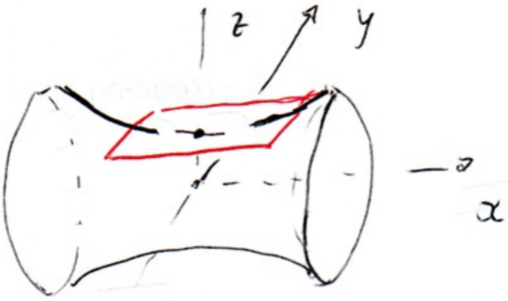
(3) Dato $X = \{ \heartsuit, \diamondsuit, \clubsuit, \spadesuit \}$, $\tau = \{ \phi, X, \diamondsuit \}$
C Q F P

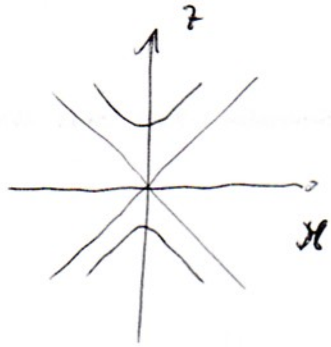
dire se (X, τ) è uno spazio topologico, e, in caso affermativo, se è di Hausdorff. Introdotta la relazione di equivalenza $\sim$ = stesso colore, si descriva la topologia quoziente su $X/\sim = \{ R, N \}$, e si dica se è di Hausdorff. Determinare su X la topologia meno fine (i.e. con meno aperti) tale che la topologia quoziente sia di Hausdorff, e si dica se questa è di Hausdorff.

Tempo a disposizione: 2h. Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

1

Geometria 24/6/2008





$$y^2 + z^2 = 1 + x^2$$

$$\boxed{x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0}$$

iperboloide rigato (a una falda)

(superficie di rivoluzione di $z^2 - x^2 = 1$ attorno all'asse x)

P_0: $(0, 0, 1)$

Calcoliamo la metrica in P_0, nonchè la II^a f. fondamentale.

$$\boxed{f = x^2 - y^2 - z^2 + 1 = 0}$$

Impieghiamo il calcolo implicito

$z = z(x, y)$ $\quad \left(\frac{\partial f}{\partial z} = 2z \neq 0 \text{ in } P: (0,0,1) \right.$

$$x^2 - y^2 - z^2(x, y) + 1 = 0$$

$\frac{\partial}{\partial x}$: $\quad \cancel{2}x - \cancel{2} z z_x = 0$

$\frac{\partial}{\partial y}$: $\quad -\cancel{2}y - \cancel{2} z z_y = 0$

$$K^\circ = \frac{e^\circ g^\circ - f^{\circ 2}}{E^\circ G^\circ - F^{\circ 2}} = \frac{-1}{1} = -1 = K_{P_0} \quad \text{(chiaro)}$$

(punto iperbolico)

$$H^\circ = \frac{1}{2}\,\frac{e^\circ G^\circ - 2F^\circ f^\circ + E^\circ g^\circ}{E^\circ G^\circ - F^{\circ 2}} = \frac{1}{2}\,\frac{-1+1}{1} = 0$$

k_1, k_2

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

$$k^2 - 1 = 0 \qquad k_i = \pm 1$$

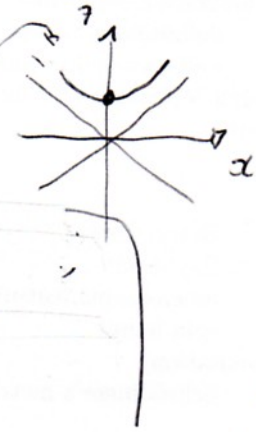
k_1, k_2 si potevano anche calcolare subito così:

$k_1 = -1$:

$\quad \| $

z°_{yy}

circonferenza di raggio 1 sul piano (y, z)

$k_2 = +1$: curvatura di  in P°

$\quad \| \; z^\circ_{xx}$

si ricordi $\quad k = \dfrac{f''}{(1+f'^2)^{3/2}}$

$x^2 - z^2 + 1 = 0$

$x - zz' = 0$

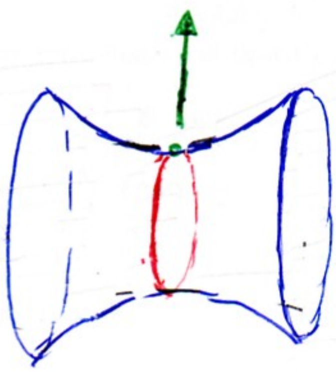
$1 - z'^2 - zz'' = 0$

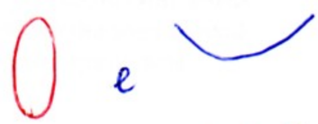
$\Rightarrow \; z''(0) = 1$

$k = \dfrac{1}{(1+0)^{3/2}} = 1$

si prende

$(k_1 < k_2)$





sono geodetiche:

perché è un meridiano

e perché $\langle N, b \rangle \equiv 0$ sulla curva

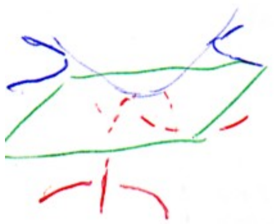
Direzioni asintotiche

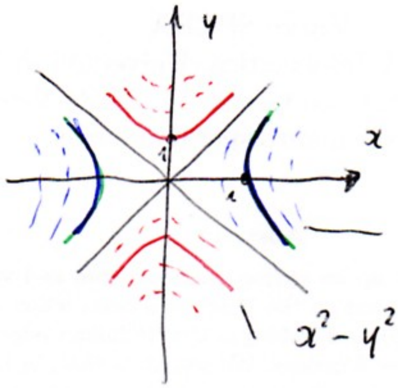
$$e^0 x^2 + 2f^0 xy + g^0 y^2 = 0$$

$$+x^2 - y^2 = 0$$

$$x^2 - y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \pm x$$

le rette $\begin{cases} x = t \\ y = \pm t \\ z = c \end{cases}$ giacciono interamente sulla superficie (che è rigata): sono i suoi regoli in P^0





$x^2 - y^2 = 1$

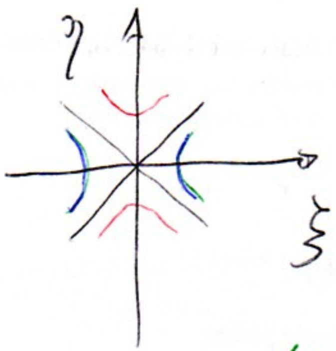
$x^2 - y^2 = -1$

$$x^2 - y^2 = \pm 1$$

indicatrice di Dupin

$$k_1 \xi^2 + k_2 \eta^2 = \pm 1$$

$$\xi^2 - \eta^2 = \pm 1$$



gli assi principali corrispondono agli assi x e y

Geometria 24/6/2008

(2) $$ds^2 = \underbrace{\sin^2 x}_{E} \underbrace{dx^2}_{u} + \underbrace{1}_{G} \underbrace{dy^2}_{v}$$ $(x, y) \in (0, \pi) \times \mathbb{R}$

Calcoliamo K

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{E}}\left(\frac{E_v}{\sqrt{E}}\right)_v = 0$$

($\Rightarrow$ loc. isometrica alla metrica standard)
[c'era da aspettarselo...]

geodetiche

metodo rapido : sia $d\xi = \sin x \, dx$
$= - d \cos x$

$$\begin{cases} \xi = -\cos x \\ y = y \end{cases} \quad \rightsquigarrow \quad d\tilde{s}^2 = d\xi^2 + dy^2$$

geodetiche di $d\tilde{s}^2$: rette: $a\xi + by + c = 0$ $(a,b) \neq (0,0)$

$\Rightarrow$ geod di ds^2 :

$$a(-\cos x) + by + c = 0$$

$$A \cos x + By + C = 0$$

cosinusoidi, rette orizz: $A = 0$
$B = 0 \Rightarrow$ pti

2° metodo utilizziamo il metodo di Lagrange

$$\mathcal{L} = \sin^2 x \cdot x'^2 + y'^2 \qquad ' = \frac{d}{ds}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} = c$$

$$\Rightarrow \quad 2y' = c \qquad y' = D \quad \text{nuova cost.}$$

$$y = Ds + E$$

★ imponiamo la conservazione dell energia $\sin^2 x\, x'^2 + y'^2 = 1$ si ha

$g_{ij} x_i' x_j' \equiv 1$ $\qquad \sin^2 x \cdot x'^2 = 1 - y'^2 = 1 - c \equiv c$

nuova cost, $A^2 > 0$

$$\Rightarrow \quad \sin x \cdot x' = A$$

$$-\frac{d(\cos x)}{ds} = A$$

$$\begin{cases} \cos x = Bs + G \\ y = Ds + E \end{cases}$$

$$\cos x = B\,\frac{y - E}{D} + G$$

se $D \neq 0$

ecc. : è l'eq. precedente.

(3) $X = \{ \overset{C}{\heartsuit}, \overset{Q}{\diamondsuit}, \overset{F}{\clubsuit}, \overset{P}{\spadesuit} \}$ $\qquad \tau = \{ \emptyset, X, \diamondsuit \}$

è una topologia

$\sim$: stesso colore

$\boxed{\text{Geometria 24/6/2008}}$

τ non è di Hausdorff

ad esempio, l'unico intorno di $\spadesuit$ è X, sicché $\spadesuit$ e $\diamondsuit$ non possono essere separati da intorni disgiunti

$X/_\sim = \{ R, N \}$

$\pi^{-1}\{R\} = \{ \heartsuit, \diamondsuit \} \notin \tau$

$\Rightarrow$ $\{R\}$ non è aperto in $\tau_\sim$

$\pi^{-1}\{N\} = \{ \clubsuit, \spadesuit \} \notin \tau \Rightarrow \{N\}$ non è aperto

$\Rightarrow$ $\tau_\sim$ = top. banale (non è di Hausdorff)

Se vogliamo $X/_\sim$ di Hausdorff, dobbiamo dotarlo della topologia discreta. La topologia meno fine (con meno aperti) su X che la induce si ottiene prendendo

$\pi^{-1}\{R\} = \{ C, Q \}$
$\pi^{-1}\{N\} = \{ F, P \}$

(e ovviamente X e $\emptyset$)

Questa topologia non è di Hausdorff, C e Q, e F e P non si possono separare.

Dunque $\tau = \{\emptyset, X, \{c, e\}, \{F, E\}\}$

che non è di Hausdorff.