Esercizi di geometria proiettiva: fasci di coniche e polarità

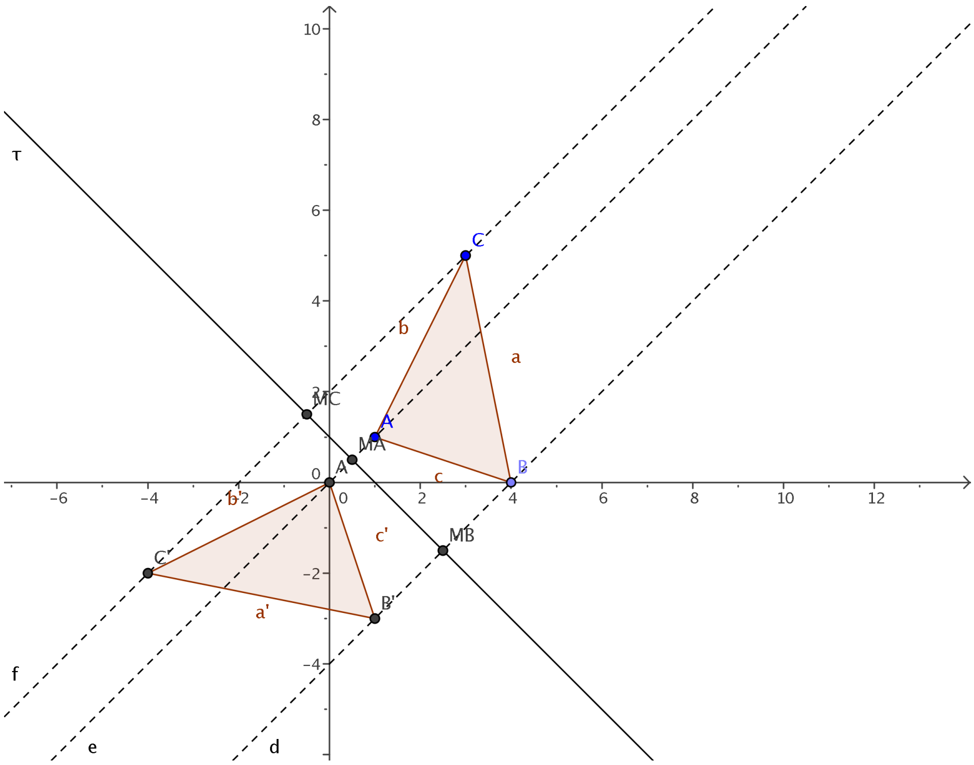
Sansonetto Nicola*

21 gennaio 2010

1 Geometria affine

Esercizio 1. Si consideri nel piano affine $\mathbb{A}2\mathbb{R}$ un riferimento cartesiano, la retta τ di equazione affine $y+x=1$ e il triangolo T di vertici $A:(1,1)$, $B:(4,0)$ e $C:(3,5)$. Determinare il simmetrico di T rispetto alla retta τ nella direzione ortogonale a τ. La trasformazione così ottenuta è una trasformazione affine? È un'affinità? In caso affermativo determinare la forma della trasformazione.

Sol. La direzione ortogonale a τ è data dal sottospazio direttore $n = \langle \eta = (1,1) \rangle$.



Consideriamo il punto A e determiniamone il simmetrico rispetto a τ nella direzione di n. La retta r_A per il punto A e ortogonale a τ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \end{cases}$$

*e-mail: nicola.sansonetto@gmail.com

Il punto $M_A = r_A \cap \tau$ di intersezione tra la retta r_A e la retta τ è ottenuto per il valore $\bar{t} = \frac{1}{2}$ del parametro t. Quindi il simmetrico A' di A è

$$A' = A + 2\bar{t}\,\eta = A + \eta = (0,0)$$

Procedendo in maniera analoga si ottengono i simmetrici dei punti B e C: $B' : (1,-3)$ e $C' : (-4,-2)$.

Per vedere se la trasformazione in questione è una trasformazione affine vediamo direttamente se essa può essere posta nella forma $P' = \mathbf{b} + MP$, in cui P e P' sono punti di $\mathbb{A}2\mathbb{R}$, $\mathbf{b}$ è un vettore dello spazio direttore $\mathbb{R}^2$ e M è una matrice 2×2 a coefficienti reali. Sia $P = (x_P, y_P)$ il generico punto di $\mathbb{A}2\mathbb{R}$. La retta r_P per P nella direzione di n ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_P + t \\ y = y_P + t \end{cases}$$

mentre il punto di intersezione tra la retta r_P e la retta τ è individuato per il valore $\bar{t} = \frac{1-x_P-y_P}{2}$ del paramentro t. Quindi il simmetrico P' del punto P rispetto alla retta t nella direzione di n è

$$P' = P + \bar{t}\,\eta$$

Esplicitando le coordinate

$$\begin{cases} x_{P'} = 1 - y_P \\ y_{P'} = 1 - x_P \end{cases}$$

e quindi

$$P' = \mathbf{b} + M\,P$$

in cui $\mathbf{b} = (1,1)$ e $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. E quindi la trasfrmazione in considerazione è affine ed è un'affinità, poiché il rango di M è massimo.[1]

Esercizio 2 (Punti 8). Dire se la matrice

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

è la matrice unificata di una trasformazione affine e in tal caso determinare l'immagine del triangolo di vertici $A(1,1)$, $B(0,1)$ $C(1,0)$.

Esercizio 3. Determinare due matrici A e B diagonalizzabili tali che il loro prodotto AB non sia diagonalizzabile.

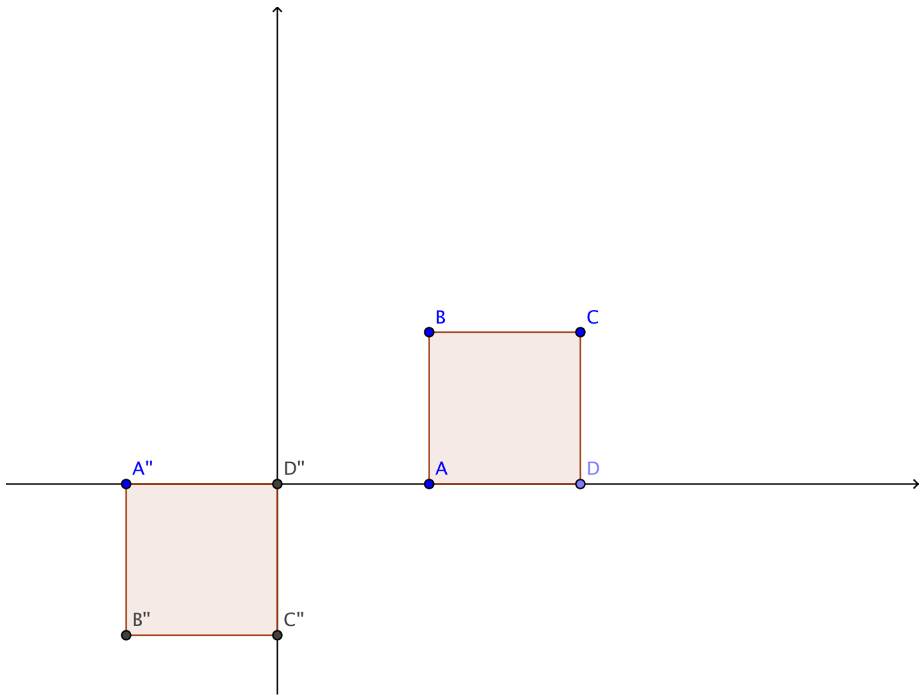
Esercizio 4. Si consideri la mappa

$$\begin{aligned} A(0,0) &\longmapsto A'(-1,0) \\ B(1,1) &\longmapsto B'(-2,-1) \\ C(2,1) &\longmapsto C'(-3,-1) \end{aligned}$$

Determinare in due modi differenti la matrice unificata della trasformazione affine definita dalla mappa precedente.

Esercizio 5. Descrivere, in relazione alla figura, due possibili trasformazioni affini che mandano il quadrato $ABCD$ nel quadrato $A''B''C''D''$.

[1] Nel linguaggio dei gruppi, $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$



Esercizio 6. Determinare il simmetrico del triangolo T di vertici $A(0,1)$, $B(3,0)$ e $C(2,2)$ rispetto alla retta t di equazione $2x+y+1=0$, nella direzione individuata dalla retta r di equazione $x-3y-3=0$.

Esercizio 7. (i) Determinare i simmetrici A' e B' dei punti $A(2,3,1)$ e $B(-1,2,1)$, rispetto al punto $C(1,-1,1)$.

(ii) Determinare l'area del poligono (non convesso) $ABCA'B'$.

Esercizio 8. Esiste una trasformazione affine che mappa un'ellisse in una circonferenza? Giustificare la risposta e trovare un controesempio in caso di risposta negativa, la (eventuale) soluzione generale in caso di risposta affermativa.

2 Geometria affine e metrica dello spazio

Esercizio 9. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}3$ si considerino le rette

$$r : \begin{cases} x-y+z=2 \\ x+z=0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x+2y-z=2 \\ x-z=0 \end{cases}$$

A. Verificare che le rette r e s sono sgembe e calcolarne la mutua distanza. Determinare, inoltre, i punti R e S, rispettivamente su r e s, di minima distanza.

B. Dato $A:(1,0,0)$, scrivere l'equazione della retta h per A e incidente sia r che s.

C. Scrivere l'equazione del cilindro $\mathcal{C}$ avente la retta s come asse e tangente alla retta r. Determinare i punti P e Q di intersezione tra il cilindro e la retta h.

D. Determinare il volume del tetraedro $SPQR$.

Sol. A. In primo luogo scriviamo le equqzioni parametriche di r e s:

$$r : \begin{cases} x=t \\ y=-2 \\ z=-t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \qquad s : \begin{cases} x=u \\ y=1 \\ z=u \end{cases} \quad u \in \mathbb{R}$$

Dalle equazioni paramentriche emerge semplicemente che r e s non sono nè parallele nè incidenti. Non sono parallele perché i loro spazi direttori, $\mathbf{v}_r = (1, 0, -1)$ e $\mathbf{v}_s = (1, 0, 1)$ non sono proporzionali, e non sono incidenti perchṕer alcun valore dei parametri t e u $P_r : (t, -2, -t)$ coincide con $P_s : (u, 1, u)$.

Un altro modo di vedere ciò lo si fa considerando i due vettori direttori $\mathbf{v}_r$ e $\mathbf{v}_s$ di r e s rispettivamente e un qualsiasi vettore con un estremo in r e uno in s e poi vedere se questi tre vettori sono linearmente indipendenti. Prendiamo AB il vettore di estremi $A : (0, -2, 0)$ e $B : (0, 1, 0)$, in r e s rispettivamente. È allora semplice versifica che la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

che ha per colonne i vettori AB, $\mathbf{v}_r$ e $\mathbf{v}_s$ ha rango massimo.

I punti di minima distanza tra le rette r e s sono quei punti R e S tali per cui il vettore RS è ortogonale sia alla retta r che alla retta s:

$$\langle RS, \mathbf{v}_r \rangle = 0$$
$$\langle RS, \mathbf{v}_s \rangle = 0$$

e ciò si ottiene per $t = 0$ e $u = 0$. Per cui $R = (0, -2, 0)$ e $S = (0, 1, 0)$. Infine $d(r, s) = d(R, S) = \|RS\| = 3$

B. La retta h si ottiene come intersezione di un piano per r e di un piano per s entrambi passanti per il punto A. Consideriamo quindi i fasci di piani $\mathcal{F}_r$ e $\mathcal{F}_s$ di asse r e s, rispettivamente:

$$\lambda(x - y + z - 2) + \mu(x + z) = 0, \qquad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$
$$\alpha(x + 2y - z - 2) + \beta(x - z) = 0, \qquad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

Imponiamo il passaggio per A ottenendo $\mu = \lambda$ e $\alpha = \beta$. Per cui

$$h : \begin{cases} 2x - y + 2z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

C. Il cilindro $\mathcal{C}$ è il luogo geometrico dei punti $X = (x, y, z)$ dello spazio aventi distanza pari a 3[2] dalla retta s

$$d(X, s) = \frac{\|P_s X \times \mathbf{v}_s\|}{\|\mathbf{v}_s\|} = 3$$

in cui $P_s : (u, 1, u)$. Sviluppando si ricava che l'equazione del cilindro $\mathcal{C}$ è

$$(x - z)^2 + 2\,(y - 1)^2 = 18$$

I punti P e Q di intersezione tra il cilindro $\mathcal{C}$ e la retta h sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} (x - z)^2 + 2\,(y - 1)^2 = 18 \\ x = -1 - t \\ y = 4t \\ z = 3t \end{cases}$$

da cui $P : \left(\frac{3-\sqrt{6}}{4}, 1 + \sqrt{6}, \frac{3+3\sqrt{6}}{4}\right)$ e $Q : \left(\frac{3+\sqrt{6}}{4}, 1 - \sqrt{6}, \frac{3-3\sqrt{6}}{4}\right)$

D. Il volume del tetrardro è

$$vol(SPQR) = \frac{1}{6}\,\|\langle SR, SP \times SQ \rangle\| = \frac{3\sqrt{6}}{8}$$

[2]Grazie alla condizione tangenza.

Esercizio 10. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}3$ in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano si considerino il punto $P:(0,0,1)$ e il piano $\pi: \quad 2z-x=0$.

1. Determinare la proiezione ortogonale P' a P su π.
2. Determinare la proiezione M di P su π lungo la direzione $V=\langle \mathbf{v}=(1,1,-1)\rangle$.
3. Calcolare l'area del triangolo $OP'M$, in cui O è l'origine del sistema di riferimento.
4. Detto R il simmentrico di P rispetto a π lungo V, determinare il volume del tetraedro $OPRP'$.

Sol. 1. Determiniamo la retta r per P e ortogonale a π; P' sarà quindi dato dall'intersezione tra tale retta e il piano π. Tale retta ha direzione parallela al vettore $\mathbf{n}_\pi=(1,0,-2)$, e quindi

$$r:\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1-2t \end{cases}$$

Ora $P'=r\cap\pi$ e cioè $t=\frac{2}{5}$ e quindi $P'=\left(\frac{2}{5},0,\frac{1}{5}\right)$.

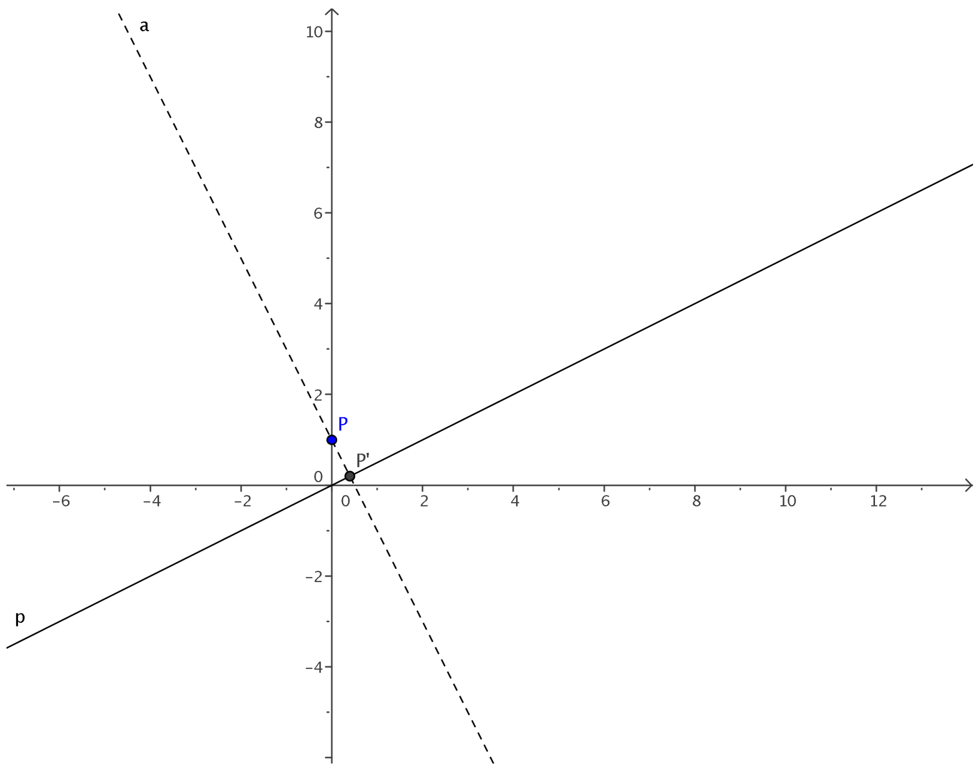


Figura 1: Sezione sul piano (x,z)

2. Consideriamo ora la retta r' per P e nella direzione di $\mathbf{v}$:

$$r':\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1-t \end{cases}$$

Ora $M=\pi\cap r'$ e cioè $t=\frac{2}{3}$ e quindi $M=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

3. A questo punto calcolare l'area del triangolo $OP'M$:

$$S_{OP'M} = \frac{1}{3} \|OP' \times OM\| = \frac{\sqrt{5}}{15}$$

4. Per determinare il volume di $OP'RP$ non è necessario determinare R (vedi figura 2), infatti

$$vol(OP'RP) = vol(OPMP') + vol(OP'MP) = 2vol(OPMP') = 2S_{OP'M}\,PP' = \frac{4}{45}$$

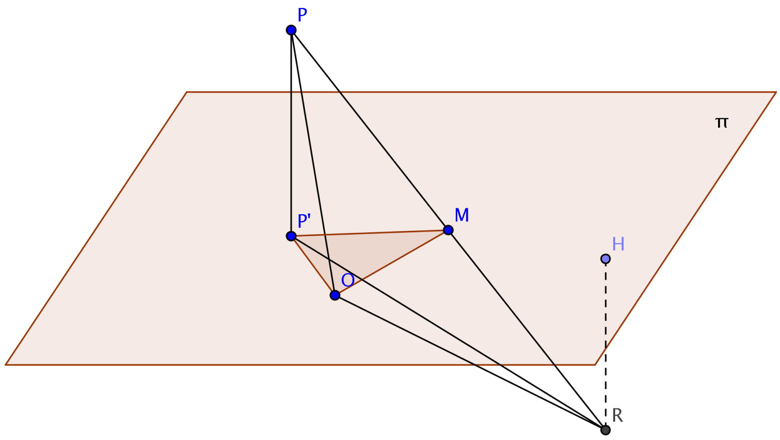


Figura 2: Tetraedro $OP'RP$

Esercizio 11. Nello spazio euclideo reale $\mathbb{E}3$ in cui sia fissato un sistema di riferimento cartesiano si considerino la retta di equazioni parametriche

$$r: \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

e il piano $\pi: \quad x + y = 0$.

1. Determinare la retta p proiezione di r su π lungo la direzione $W = \langle \mathbf{w} = (0, 1, 1) \rangle$.

2. Sia π' il piano individuato da r e da p. Si considerino i due piani del fascio di asse $p$che formano con π' ungoli di $\frac{\pi}{3}$.

3. Detti λ e μ i piani di cui al punto 2., determinare i loro piani bisettori.

Sol. 1. In primo luogo osserviamo che la retta r e il piano π non sono paralleli, infatti $\mathbf{v}_r = (1, 3, 2)$ e $\mathbf{n}_\pi = (1, 1, 0)$, che non sono ortogonali. Scriviamo l'equazione del fascio di piani $\mathcal{F}_r$ di asse r. Scriviamo delle equazioni affini per r

$$r : \begin{cases} 3 - y - 3 = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

da cui il fascio $\mathcal{F}_r$ è dato da

$$\xi\,(2y - 3z) + \eta\,(3x - y - 3) = 0$$

Consideriamo ora il piano π' del fascio che sia parallelo ala direzione $\mathbf{w} = (0, 1, 1)$. Tale piano è individuato dalla condizione

$$\langle \mathbf{w}, \mathbf{n}_{\mathcal{F}} \rangle = 0$$

che porge $\eta = -\xi$. Prendendo $\eta = -1$ e quindi $\xi = 1$ si ottiene l'equzione di π'

$$\pi' : \; x - y + z - 1 = 0$$

Per cui la retta $p = \pi' \cap \pi$ proiezione di r su π è definita da

$$p : \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

2. Consideriamo ora il fascio $\mathcal{F}_p$ di asse p, $\lambda(x - y + z - 1) + \mu(x + y) = 0$, $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$. I piani cercati sono quelli per cui

$$\cos(\mathcal{F}_p, \pi') = \frac{\langle \mathbf{n}_{\mathcal{F}_p}, \mathbf{n}_{\pi'} \rangle}{\|\mathbf{n}_{\mathcal{F}_p}\|\,\|\mathbf{n}_{\pi'}\|} = \frac{1}{2}$$

Sostituendo si ricava l'equazione

$$\frac{3\lambda}{\sqrt{3\lambda^2 + 2\mu^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Sicuramente deve essere $\lambda \neq 0$, allora dividiamo tutto per λ e poniamo $\kappa^2 = \frac{\mu^2}{\lambda^2}$, da cui si ricava $\kappa = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ oppure $\kappa = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$. I due piani cercati sono quindi

$$\lambda : x - y + z - 1 + \frac{3\sqrt{2}}{2}(x + y) = 0$$
$$\mu : x - y + z - 1 - \frac{3\sqrt{2}}{2}(x + y) = 0$$

3. Ovviamente π' biseca λ e μ. L'altro piano è il piano del fascio $\mathcal{F}_p$ ortogonale a π' che π.

Esercizio 12. 1. Scrivere l'equazione affine del piano π ortogonale al piano π' di equazione affine $x - y + 2z = 0$ e contenente la retta

$$r : \begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

2. Scrivere le equazioni parametriche di r.

3. Determinare i punti di che hanno distanza $\sqrt{6}$ dalla retta $s = \pi \cap \pi'$.

4. Scrivere le equazioni di π nel sistema di riferimento determinato dai punti $Q_0 : (1, 1, 0)$, $Q_1 : (2, 0, 2)$, $Q_2 : (1, 3, 1)$ e $Q_3 : (6, 2, -2)$.

SOL. 1. Il piano π è parallelo alla direzione $\mathbf{n}_{\pi'} = (1, -1, 2)$ ortogonale a π'. Inoltre π è un piano del fascio di piani $\mathcal{F}_r$ di asse r di equazione $x(\lambda + \mu) + 2\lambda y - \mu z - (3\lambda + \mu) = 0$. Quindi π è li piano del fascio la cui direzione ortogonale $\mathbf{n}_\pi$ é ortogonale a $\mathbf{n}_{\pi'}$

$$\langle(\lambda + \mu, 2\lambda, -\mu), \mathbf{n}_{\pi'}\rangle = 0$$

Da cui si ricava $\lambda = -\mu$. Prendendo $\lambda = 1$ si ottiene $\pi : 2y + z - 2 = 0$.

2. Le equazioni parametriche di r sono

$$r : \begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = t \\ z = 2 - 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

3. Ricordiamo che $\pi \perp \pi'$, quindi, dal momento che $s = \pi \cap \pi'$, per ogni punto P di π, $d(P, s) = d(P, \pi')$. In particolare ciò vale per i punti di r. Usando la distanza punto/piano si ottiene $\sqrt{6} = d(P, s) = d(P, \pi') = \frac{\langle P, \mathbf{n}_{pi'}\rangle}{\|\mathbf{n}_{\pi'}\|} = \frac{|7-7t|}{\sqrt{6}}$. Da cui $t = \frac{1}{7}$ oppure $t = \frac{13}{7}$.

4. Il nuovo sistema di riferimento centrato in Q_0 ha come direzioni coordinate i vettori $Q_1 - Q_0$, $Q_2 - Q_0$ e $Q_3 - Q_0$. Quindi il cambiamento di sistema di coordinate è dato dalla trasformazione affine

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

Sostituendo nell'equazione di π le espressioni di x, y e z in funzione di X, Y e Z si ricavache l'equazione di π ridpetto al nuovo sitema di rifermento

$$\pi : Y = 0$$

Osserviamo, d'altra parte, che ciò era immediato, dal momento che π passa per il punto Q_0 ed è ortogonale al vettore $Q_2 - Q_0 = (0, 2, 1)$.

ESERCIZIO 13. Nello spazio euclideo siano date le rette

$$r : \begin{cases} x + y = 0 \\ y + z + 3 = 0 \end{cases}, \qquad s : \begin{cases} x - 4y + 4 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare la retta ℓ passante per $P(1, 0, 1)$, incidente ad r e ortogonale ad s.

(ii) Le rette ℓ e s sono complanari? Giustificare la risposta.

(iii) Calcolare la distanza tra ℓ ed s.

(iv) Sia s' la retta per P e parallela ad s. Determinare le equazioni di s nel sistema di riferimento in cui l'asse X è la retta ℓ e l'asse Y è la retta s'. (Chi è l'asse Z?)

ESERCIZIO 14. Nello spazio euclideo si considerino i vettori $\vec{v} = [1\ 1\ 1]^T$ e $\vec{w} = [2\ 2\ 1]^T$.

(i) Si decomponga il vettore $\vec{v}$ come somma di $\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ in cui $\vec{v}_1$ è ortogonale a $\vec{w}$ e v_2 è parallelo a $\vec{w}$.

(ii) Si determinino le superfici dei due parallelogrammi aventi come lati i vettori $\vec{v}\,\vec{v}_1$ (primo parallelogramma) e $\vec{v}\,\vec{v}_2$ (secondo parallelogramma).

(iii) Le due superfici del punto precedente risultano uguali: dire se si tratta di un risultato generale (indipendente dai vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$ dati), ed eventualmente giustificarlo e darne un'interpretazione in termini di geometria (piana) euclidea.

Esercizio 15. Nello spazio euclideo si consideri il piano $\pi' :\ x + y = 0$, e la retta

$$r : \begin{cases} x - y - z = 1 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$$

(i) Determinare la retta r' ottenuta proiettando r nella direzione $W =< [1\ 0\ 1]^T >$

(ii) Data la retta s di equazione

$$s : \begin{cases} x = -\mu + 1 \\ y = \mu & \qquad \mu \in \mathbb{R} \\ z = 1 \end{cases}$$

determinare la sua posizione rispetto a r e determinare il piano π che le due rette individuano.

(iii) Determinare la retta s', ottenuta proiettando s su π' nella direzione di W.

(iv) Dato il piano $\sigma :\ x - y + z = 0$, determinare le coordinate dei punti $R = \sigma \cap r$, $S = \sigma \cap s$, $R' = \sigma \cap r'$, $S' = \sigma \cap s'$.

(v) Effettuare un disegno approssimativo della situazione.

(vi) Detti T e T' i punti che si ottengono intersecando r con s e r' con s', rispettivamente, calcolare il volume del solido $RSTR'S'T'$.

3 Geometria proiettiva

Esempio 1. Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si consideri il fascio $\mathcal{F}$ di coniche tangenti in $P : (1, -1, -1)$ alla retta $t :\ 2x_0 + x_1 + x_2 = 0$ e passante per i punti $R : (1, 01)$ e $Q : (1, 1, -1)$.

1. Determinare l'equazione generale del fascio $\mathcal{F}$ e determinare le coniche degenri di $\mathcal{F}$.
2. Sul piano affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ complementare di $x_0 = 0$ clasificare le coniche del fascio.

Sol. 1. Dobbiamo scrivere l'equazione di un fascio $\mathcal{F}$ di coniche passanti per tre punti e tangenti ad una retta data in uno di questi punti. Il fascio è quindi generato dalle sue coniche degeneri $\mathcal{C}_1 = ts$ e $\mathcal{C}_2 = rq$, in cui s è la retta per RQ, r la retta per PQ e q la retta per PR.

$$\begin{aligned} s &:\ x_0 - 2x_1 - x_2 = 0 \\ r &:\ x_0 + 2x_1 - x_2 \\ q &:\ x_0 + x_2 = 0 \end{aligned}$$

Quindi l'equazione generale del fascio è

$$\mathcal{F} :\ \lambda(2x_0 + x_1 + x_2)(x_0 - 2x_1 - x_2) + \mu(x_2 + 2x_1 - x_2)(x_0 + x_2) = 0$$

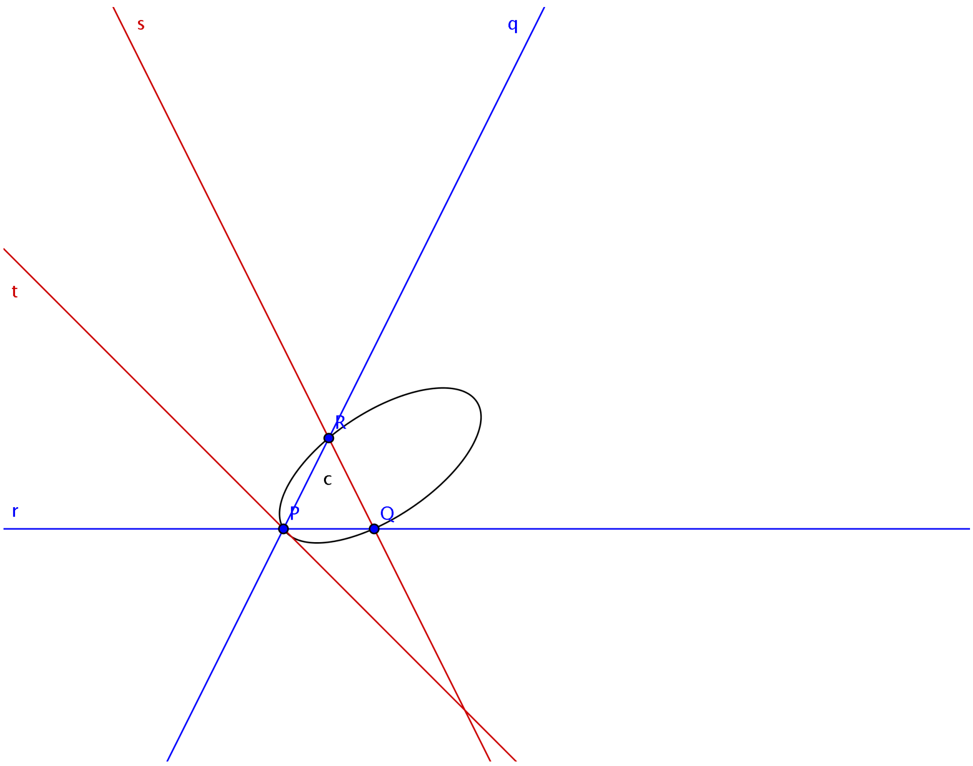
che si riscrive

$$\mathcal{F} :\ (2\lambda + \mu)x_0^2 - 2\lambda x_1^2 - (\lambda + \mu)x_2^2 + (2\mu - 3\lambda)x_0x_1 - \lambda x_0x_2 + (2\mu - 3\lambda)x_1x_2 = 0$$

Come già detto in precedenza le coniche degenri del fascio sono solo $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$.

2. Per classificare affinemente le coniche non–degeneri del fascio andiamo a studiare il segno del determinante del minore $A_{00}(\lambda, \mu)$ al variare di λ e μ, in cui $A(\lambda, \mu)$ è la matrice associata alla conica:

$$A(\lambda, \mu) = \begin{bmatrix} 2\lambda + \mu & \frac{2\mu - 3\lambda}{2} & -\frac{\lambda}{2} \\ \frac{2\mu - 3\lambda}{2} & -2\lambda & \frac{2\mu - 3\lambda}{2} \\ -\frac{\lambda}{2} & \frac{2\mu - 3\lambda}{2} & -\lambda - \mu \end{bmatrix}$$



Ora

$$A_{00}(\lambda,\mu) = \begin{bmatrix} -2\lambda & \frac{2\mu-3\lambda}{2} \\ \frac{2\mu-3\lambda}{2} & -\lambda-\mu \end{bmatrix}$$

Sappiamo che se $\lambda = 0$ e $\mu \neq 0$ o viceversa si ottiene una delle coniche degeneri $\mathcal{C}_1$ o $\mathcal{C}_2$, rispettivamente, quindi possiamo assumere ad esempio $\lambda \neq 0$. Per semplicità assumiamo $\lambda = 2$ per cui $\det(A_{00}(\lambda,\mu)) = -(\mu^2 - 10\mu + 1)$. Quindi

$$\det A_{00}(\lambda,\mu) = \begin{cases} > 0 \text{ se } x \in \left]\frac{5-2\sqrt{6}}{2}, \frac{5+2\sqrt{6}}{2}\right[\to \textbf{ ellisse} \\ = 0 \text{ se } x = \frac{5-2\sqrt{6}}{2} \text{ opp } x = \frac{5+2\sqrt{6}}{2}, \to \textbf{ parabola} \\ < 0 \text{ se } x \in \left]-\infty, \frac{5-2\sqrt{6}}{2}\right[\text{ opp } x \in \left]\frac{5+2\sqrt{6}}{2}, +\infty\right[\to \textbf{iperbole} \end{cases}$$

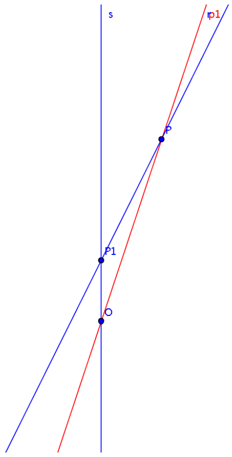
Esempio 2. 1. Nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$ determinare la conica $\mathcal{C}$ che:

- passi per $O : (0,0)$ e $P : (1,3)$;
- la polare di $P_1 : (0,1)$ sia $p_1 : y - 3x = 0$;
- $\mathcal{C}$ sia una parabola.

Sol. 1. Si osservi che O e P sono punti della retta p_1, per cui possiamo scrivere un fascio di coniche bitangenti in O e P[3] e poi imporremo la condizione che la conica sia una parabola. Il fascio è quindi generato dalle coniche degeneri $\mathcal{C}_1 = (P_1P)(OP)$ e $\mathcal{C}_2 = p_1^2$. L'equazione generale del fascio è quindi $\mathcal{F} :\ (y-2x-1)x + \lambda(y-3x)^2 = 0$, in cui $P_1P :\ y - 2x - 1 = 0$ e $OP_1 :\ x = 0$. Imponiamo ora che

[3] Si ricordi che la polare di un punto ad una coniche interseca la conica in due punti che sono i punti in cui le rette condotte dal polo sono tangenti la conica.

la conica sia una parabola, cioè che il minore A_{00} della matrice associata alla conica abbia determinante nullo, ossia $\det A_{00} = (9\lambda - 2)\lambda - \frac{(1-6\lambda)^2}{4}$ e $detA_{00} = 0$ se e solo se $\lambda = \frac{1}{4}$. Da cui l'equazione della parabola è $\mathcal{P}:\ x^2 + y^2 - 3xy - 4x = 0$.



ESEMPIO 3. Si consideri il piano affine reale $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ ampliato proiettivamente.

1. Determinare la conica $\mathcal{C}$ tale che $P : (2, 1)$ sia polo di $p :\ x + y = 0$ e passi per $P_1 : (-2, 2)$, $P_2 : (1, -1)$ e $Q : (1, 1)$.
2. Determinare il tipo affine di conica.
3. Determinare il polo R' di $r' = PQ$.
4. Determinare il polo R'' di $r'' = R'P$.
5. Cosa si può dire del triangolo $PR'R''$?

SOL. 1. Osserviamo che i punti P_1 e P_2 appartengono alla retta p, polare del punto P, quindi scriviamo l'equazione del fascio di coniche bitangenti $\mathcal{F}:\ r_1 r_2 + \kappa p^2$ in cui $r_1 = PP_1 :\ 4y + x - 6 = 0$ e $r_2 = PP_2 :\ 2x - y - 3 = 0$, quindi

$$\mathcal{F}:\ (4y + x - 6)(2x - y - 3) + \kappa(x + y)^2 = 0$$

Imponiamo ora il passaggio per Q ottenendo $\lambda = -\frac{1}{2}$ da cui la conica cercata ha equazione

$$\mathcal{C}:\ x^2 - 3y^2 + 4xy - 10x - 4y + 12 = 0$$

La matrice associata alla conica è

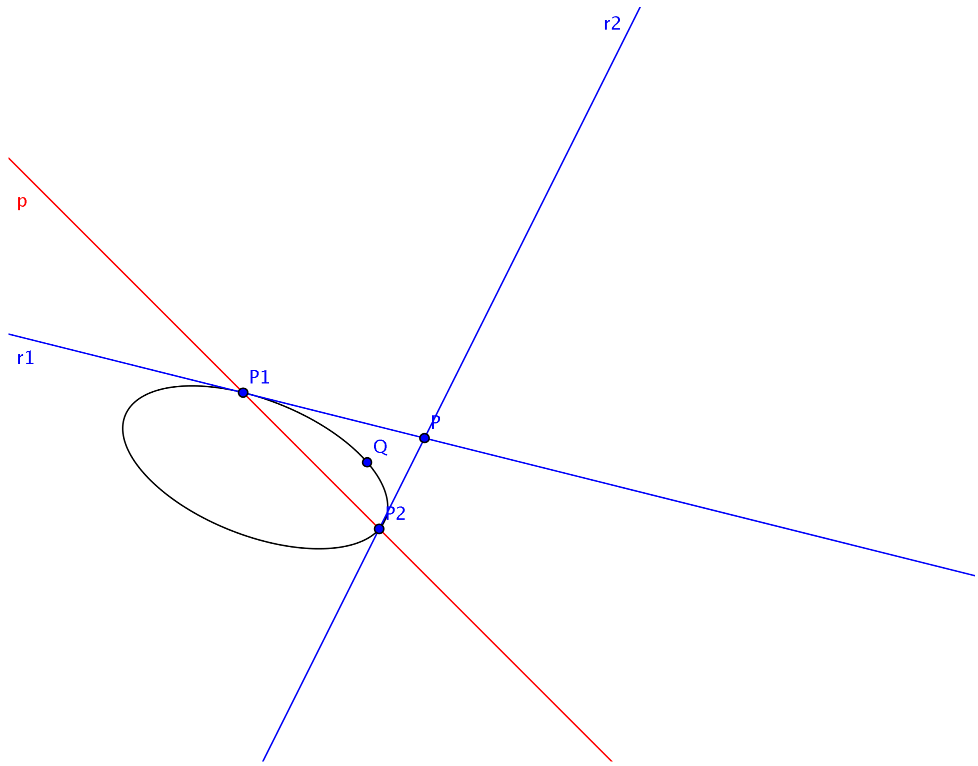
$$A = \begin{bmatrix} 12 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -32 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

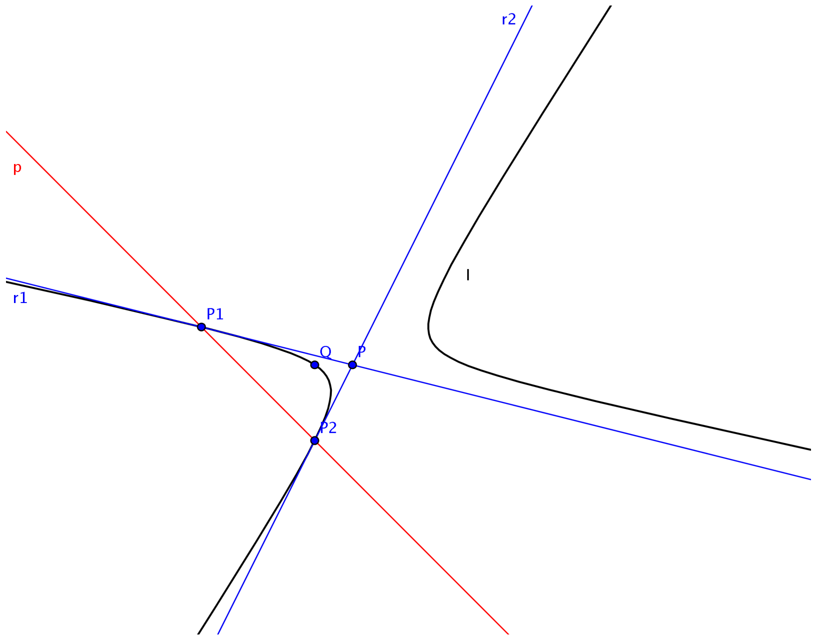
La conica $\mathcal{C}$ è quindi un'iperole dal mometo che $\det A_{00} < 0$.

2. Per determinare di che tipo di conica si tratta scriviamo la matrice associata alla conica

$$A = \begin{bmatrix} 12 & -5 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -32 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Quindi $\mathcal{C}$ è un'iperbole dal mometo che $\det A_{00} < 0$.





3. Per determinare R' applichiamo il principio di reciprocità. Se τ_Q è la tangente a $\mathcal{C}$ in Q il punto R' sarà data dall'intersezione $\tau_Q \cap p$. Ora passando per lo spazio ampliato proiettivamente si ottiene τ_Q : $X_Q^T AX = 2x_1 + 3x_2 - 5x_0 = 0$ o in coordinate affini $2x + 3y - 5 = 0$ e quindi $R' : (-5, 5)$.

4. Analogamente al punto precedente $R'' = r' \cap p$. Ora $r' : y = 1$ e quindi $R'' : (-1, 1)$.

5. Il triangolo $PR'R''$ è *autopolare*.

Esempio 4.

1. Determinare nel piano euclideo $\mathbb{E}^2$, in cui è fissato un sistema di riferimento cartesiano, l'equazione della conica $\mathcal{C}$ tangente alle rette $r : y = 2x + 1$ e $r' = 2x - 1$ nei punti $P_1(1, 3)$ e $P_2(-1, -3)$ e passante per il punto $P(1, 2)$.
2. Determinare la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$.
3. Dopo aver verificato che la retta $d :\ y = 3x$ è un diametro di $\mathcal{C}$, se ne determini il diametro coniugato d', procedendo possibilmente per via sintetica.

Sol.

1.
2.
3.