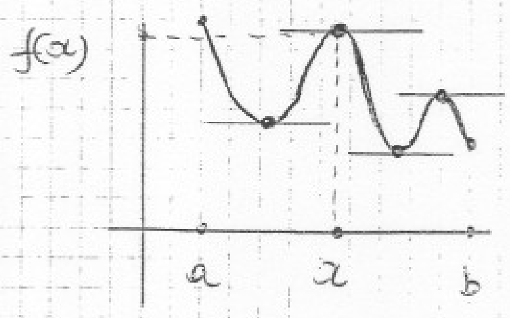
LEZIONE II

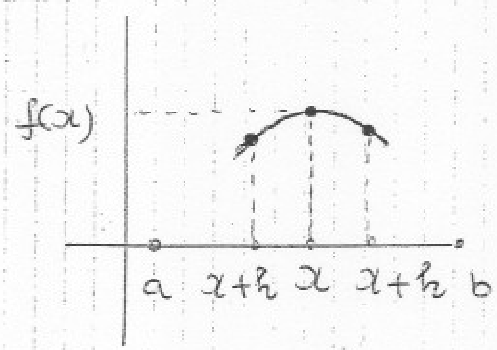
ANALISI MATEMATICA I
II modulo a.a. 2007/08
Prof. M. Spera

Teorema di Fermat

Sia $f \in \mathcal{C}^0([a,b])$. Sia $x \in (a,b)$ un pto di massimo (o di minimo) relativo (o assoluto..) (interno!). Sia f derivabile in x. Allora $f'(x) = 0$



Dim. Sia x pto di massimo per fissare le idee. Se $h > 0$ (suff. piccolo..)



$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \underset{(<)}{\leq} 0$$

($<$: max proprio)

$\Rightarrow f'_+(x) \leq 0$. Notare!

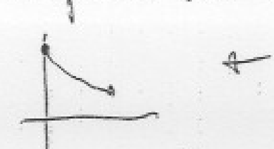
Analogamente, se $h < 0$ suff piccolo ... si ha

$$f'_-(x) \geq 0$$

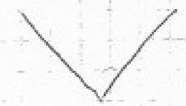
$$\Rightarrow f'(x) = f'_+(x) = f'_-(x) = 0 \qquad \square$$

(ovvio ..)

Attenzione: l'ipotesi che x sia interno è cruciale:



☆ l'ipotesi di derivabilità è però cruciale...



$f'_{\pm} = \pm 1$

Dim. alternativa del teor. di Fermat

se $f'(x_0) \neq 0$, $x_0 \in (a,b)$, è

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)$$

Sia p. es. $f'(x_0) > 0$; allora, localmente, è $f(x) - f(x_0) \gtrless 0$ se $x \gtrless x_0$

$\Rightarrow$ x_0 non può essere né di max né di minimo (estremo)

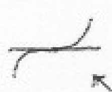
☆ $x_0 \in (a,b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$ è detto pto critico (o stazionario) di f (o per f) (con abuso di linguaggio $P = (x_0, f(x_0))$ è spesso detto tale...)

Dunque Fermat: x_0 max o min (estremo) interno ... (f derivabile)

$\Rightarrow$ x_0 critico

☆ Il viceversa è falso: es: $y = x^3$

($x_0 = 0$...)



← è un flesso orizzontale (ascendente...)

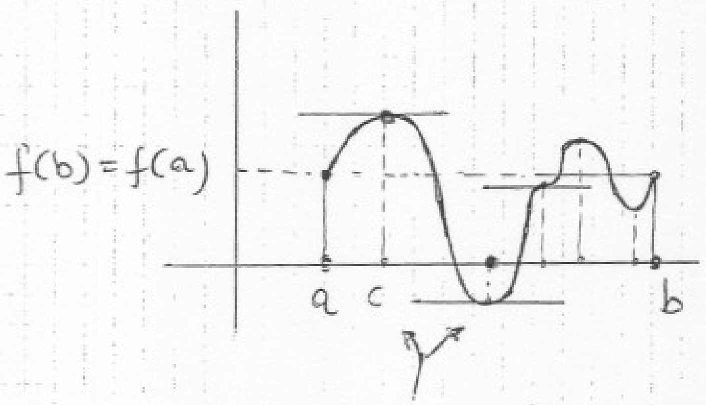
☆☆ Teorema di Rolle

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, con $f(b)=f(a)$

Sia inoltre derivabile in (a,b)

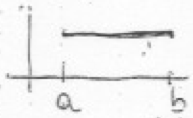
Allora $\exists \; c \in (a,b)$ tale che $f'(c) = 0$

(c non è necessariamente unico)



determinati dalla dimostrazione

Dim. Se i pti di max e min. assoluti (esistenti per il teorema di Weierstrass☆) cadono agli estremi di $[a,b]$, f risulta necessariamente costante



su $[a,b]$, e il teorema è vero in questo caso.

Se $c \in (a,b)$ (v. figura) , si è già visto che, essendo f derivabile in tal punto, risulta necessariamente $f'(c) = 0$. □
(Fermat)

(pto di max assoluto)

4) Teorema di Lagrange (o del valor medio)

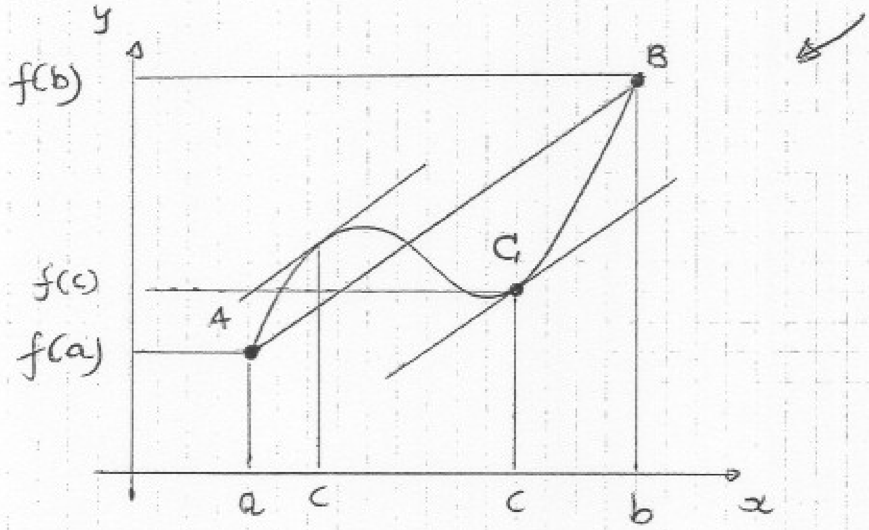
Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua; sia f derivabile in (a,b). $(a<b)$

Allora $\exists$ $c \in (a,b)$ tale che

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)$$

$$\left(\text{eq: } \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)\right)$$

OSS: può esistere più di un c



4) In termini geometrici: $\exists$ c tale che la tangente alla curva di f, cioè $y = f(x)$ in $C_1 = (c, f(c))$ ha lo stesso coefficiente angolare di AB, retta secante (o corda) congiungente $A = (a, f(a))$ a $B = (b, f(b))$, anzi, queste risultano parallele.

Dim. Scriviamo l'eq. della retta AB:

$$y = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Consideriamo la funzione $D = D(x)$ $x \in [a,b]$

$$D(x) := f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) - f(x)$$

(differenza tra le ordinate della secante e della funzione data)

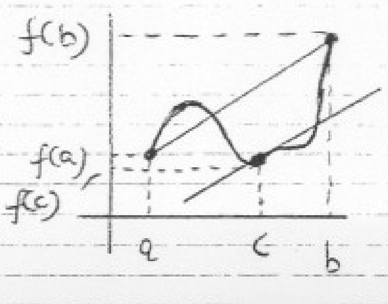
Si ha subito $D(a) = D(b) = 0$, e sono soddisfatte le ipotesi del teorema di Rolle. Dunque $\exists\, c \in (a,b)$ tale che

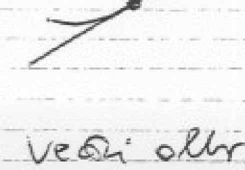
$D'(c) = 0$, ovvero

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(c) = 0,$$

cioè l'asserto. $\square$ Oss: il teorema vale anche per $a \geq b$

[Osservazione: possono esistere più c non determinabili per mezzo della dim. del teorema di Rolle





"flesso"

vedi oltre ...

Teorema. Sia $f \in C^0([a,b])$, f derivabile in (a,b)

i) Se f è crescente in (a,b), allora è

$$f'(x) \geq 0 \qquad \forall x \in (a,b)$$

e così se f è strettamente crescente
(non si conclude $f'(x) > 0$!...) (il viceversa di iii) non vale,

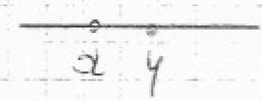
ii) viceversa, se $f'(x) \geq 0$ in (a,b), f è crescente in (a,b)

iii) $f'(x) > 0$ in (a,b) $\Rightarrow$ f strettamente crescente

iv) (teorema della derivata nulla)
f è costante in (a,b) $\Leftrightarrow$ $f' = 0$ in (a,b)

Dim. Il teorema è una semplice conseguenza del teorema di Lagrange

i) Si ha $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$



$\forall\, x, y,\ x<y \quad \Rightarrow$, se $y \to x^+$ è

$$f'(x) \geq 0$$

ii) $f(y) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{\geq 0}(y-x) \geq 0 \qquad x<y$

iii) $f(y) - f(x) = \underbrace{f'(\xi)}_{> 0}(y-x) > 0 \qquad x<y$

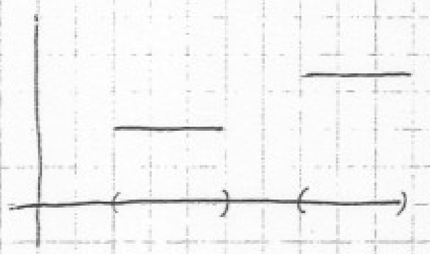
[1] *Attenzione!* $y = x^3$ è strett. crescente,
ma $y' = 3x^2$ è nulla in 0

iv) Se f è costante è ovvio che $f' = 0$

Il viceversa segue ancora dal teorema di Lagrange[1]...

[2] Un enunciato analogo vale per f. decrescenti,
con $\leq$ (o $<$..) al posto di $\geq$ e $>$ ...

Attenzione: in iv) è cruciale l'ipotesi che
f sia definita su un intervallo...



$f' \equiv 0$ ma
f non è costante

Il teorema diviene: $f' = 0 \iff f$ è localmente costante
in generale

Il teorema di Lagrange può essere efficacemente
utilizzato nel calcolo dei limiti

ex: $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2}\right) =$

$\underset{\text{Lagrange}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \underbrace{(x^2+1-x^2)}_{=1}$

$x^2 \quad \xi \quad x^2+1$

ma se $x \to +\infty$, $x^2 \to +\infty$, $x^2+1 \to +\infty$ e $\xi \to +\infty$

$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \to 0$

Altro esempio

Calcoliamo

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x} - 1 + x^2\right) - \sin(x^2)}{x}$$

(forma indet. $\frac{0}{0}$)

Applichiamo Lagrange:

$$\frac{\sin(\quad) - \sin(\quad)}{x} = \cos\xi \, \frac{\left(\sqrt{1+x} - 1\right)}{x}$$

ora, è chiaro che $\xi \to 0 \Rightarrow \cos\xi \to 1$

calcoliamo dunque

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

ciò si può già (e si potrà) svolgere in più modi (elementarmente, razionalizzando, oppure con la formula di Taylor, v. oltre..). Usiamo Lagrange anche qui:

$$\frac{\sqrt{1+x} - \underset{\sqrt{1}}{1}}{x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{\xi}} \cdot x}{x} = \frac{1}{2\sqrt{\xi}} \to \frac{1}{2}$$

in definitiva il limite richiesto vale $\frac{1}{2}$.

sempre più difficile...

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin\left(\sqrt{1+x} - 1 + x^2\right) - \sin(x^2)}{\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + x\right) - \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - x\right)}$$

usiamo l'es. precedente; intanto

$$\sin(\quad) - \sin(\quad) = \cos\xi \cdot \left(\sqrt{1+x} - 1\right)$$

due: $\arcsin(\ ) - \arcsin(\ ) =$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}} \cdot 2x$$

e $\eta \to \frac{\sqrt{2}}{2}$ se $x \to 0$. pertanto

$$\frac{\underset{\to 1}{\cos\xi} \cdot \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\xi}}}_{\to \frac{1}{2}} \cdot \cancel{x}}{\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}}_{\to \frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot 2 \cdot \cancel{x}} \to \frac{1}{\frac{2 \cdot 2}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Teorema di Cauchy (o degli incrementi finiti)

Siano $f, g \in C^0([a,b])$, e derivabili in (a,b). Allora $\exists\, c \in (a,b)$ tale che

$$\boxed{[f(b)-f(a)]\, g'(c) = [g(b)-g(a)]\, f'(c)} \quad (*)$$

Dim. Basta applicare il teorema di Rolle alla funzione

$$h(x) := [f(b)-f(a)]\, g(x) - [g(b)-g(a)]\, f(x)$$

... $\square$

Osservazioni i) Se $g(x) = x$ si ritrova il teorema di Lagrange

ii) Se $g' \neq 0$ in (a,b), si ha (Rolle ..) $g(b) \neq g(a)$ e $(*)$ diventa

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}}$$

che è la forma più usata nelle applicazioni.

☆ Teorema di Darboux (o dei <u>valori intermedi</u> per le derivate)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ <u>derivabile</u> in $[a,b]$
e sia $f'(a) < f'(b)$.
Allora $\forall \lambda \in (f'(a), f'(b))$ $\exists\, c \in (a,b)$
tale che $\boxed{f'(c) = \lambda}$

Dim. Sia $\lambda \in (f'(a), f'(b))$ fissato.

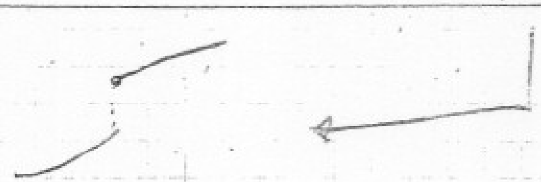
Definiamo $h_\lambda = h_\lambda(x) = f(x) - \lambda x$
$(x \in [a,b])$

h'_λ esiste e
$$h'_\lambda(x) = f'(x) - \lambda$$

Si ha $h'_\lambda(a) = f'(a) - \lambda < 0$
$h'_\lambda(b) = f'(b) - \lambda > 0$

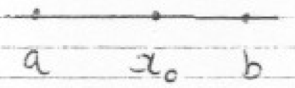
$\Rightarrow$ h_λ non è <u>monotona</u> $\Rightarrow$ $\exists\, \alpha, \beta$,
$a \le \alpha < \beta \le b$ con $h_\lambda(\alpha) = h_\lambda(\beta)$.
In virtù del <u>teorema di Rolle</u> si conclude facilmente $\square$

☆ <u>Conseguenza</u>: una funzione con discontinuità di <u>prima specie</u> non può essere la derivata di una funzione



Teorema di de l'Hôpital

Siano $f, g \in \mathcal{C}^0((a,b) - \{x_0\})$



con $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

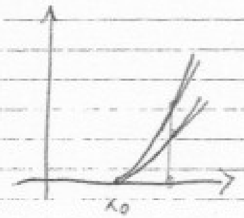
e con g di segno costante vicino ad x_0

Siano inoltre f e g derivabili in $(a,b) - \{x_0\}$

e g' abbia segno costante vicino ad x_0

Se $\exists\ L = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(non necessariamente finito...)



allora $\exists\ L_1 = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

(forma indeterminata di tipo $\frac{0}{0}$)

e si ha $\boxed{L = L_1}$

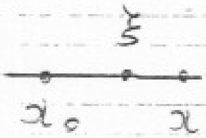
Dim. Prolunghiamo per continuità f e g in x_0 ponendo $f(x_0) = g(x_0) = 0$

Si ha

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

$\neq 0$...

(ξ nell'int. det da x_0 e x)



($\exists$ per il teor. di Cauchy)

qui $x > x_0$..

Ora, se $x \to x_0$ t $\xi \to x_0$ $\Rightarrow$

L_1 esiste ed eguaglia L. $\square$

$$\lim_{x \to 0^+} (\operatorname{arctg} x)^{x}$$

$$(\operatorname{arctg} x)^x = e^{x \log \operatorname{arctg} x}$$

oppure:

$x \log \operatorname{arctg} x$

$= \dfrac{x}{\operatorname{arctg} x} \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{y} \log \underbrace{\operatorname{arctg} x}_{y}$

$\dfrac{x}{\operatorname{arctg} x} \to 1$

e

$y \log y \to 0$

$y \to 0^+$

$$x \log \operatorname{arctg} x = \frac{\log \operatorname{arctg} x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{\to}$$

$$-x^2 \Big(\frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\to 1} \Big) \to -\frac{x^2}{\operatorname{arctg} x} \to 0$$

$\Rightarrow l = 1$

$$L = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$$

(* Taylor (meglio))

* Hôpital

* anche Lagrange..

Hôpital: $\dfrac{x - \sin x}{\sin x \cdot x} \sim \dfrac{1 - \cos x}{x \cos x + \sin x} \sim$

$$\to \frac{+\sin x}{\cos x - x \sin x + \cos x} = \frac{\sin x \to 0}{\underbrace{2\cos x}_{\to 2} - \underbrace{x \sin x}_{\to 0}} \to 0$$

$L = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \arcsin x \cdot \log x$$

Esercizi sul teorema di de l'Hôpital

* Hôpital diretto

$$\arcsin x \cdot \log x = \frac{\arcsin x}{\frac{1}{\log x}} \sim$$

$$\frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{-\frac{1}{x}} (\log x)^2 \qquad \left(\frac{1}{\log x}\right)' = \frac{-\frac{1}{x}}{(\log x)^2}$$

$$= - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} (\log x)^2 \longrightarrow 0$$

$$\sqrt{1-x^2} \to 1$$

$$\boxed{L = 0}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \quad \forall \alpha$$

se $\alpha \leq 0$ è chiaro.

se $\alpha > 0$, è sempl. provarlo per $\alpha \in \mathbb{N}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = \frac{1}{e^x} \qquad \lim \frac{1}{e^x} = 0$$

si proceda induttivamente.

$$x(\log x)^2 \to ?$$

$$x = e^{-y} \qquad y \to +\infty$$

$$e^{-y} \cdot (-y)^2 = e^{-y} y^2 \to 0 \quad \text{(Hôpital)}$$

Oppure: più "astuto"

$$\arcsin x \log x = \underbrace{\frac{\arcsin x}{x}}_{\to 1} \underbrace{x \log x}_{\to 0} \Rightarrow L = 0$$

Attenzione: $\lim \frac{f}{g}$ può esistere senza che esista $\lim \frac{f'}{g'}$:

Esempio: $f(x) = 2x + \sin x$ $\qquad \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$g(x) = 2x + \cos x$

$f'(x) = 2 + \cos x$ $\qquad \lim_{x\to\infty} \frac{f'}{g'}$ non esiste ☆

$g'(x) = 2 - \sin x$

Altro esempio : $f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}$ $\qquad \frac{f}{g} \to 0$ x $x \to 0$

$g(x) = x$

ma $f'/g' = f' = \underbrace{2x \sin\frac{1}{x}}_{\to 0} + x^2 \cos\frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

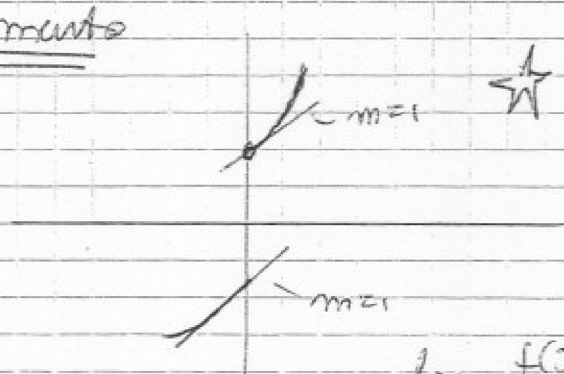
NON HA LIMITE per $x\to 0$

Esso consente di concludere che

f è derivabile in $\mathbb{R}$ (anche in 0)

ma f' non è continua in 0 !

Commento



☆ Il seguente esempio sembra violare il teorema di de l'Hopital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} f'(x) = 1$$

$\Rightarrow f'(0) = 1$; ma f è discontinua in 0

Dov'è l'errore ?

Funzioni convesse

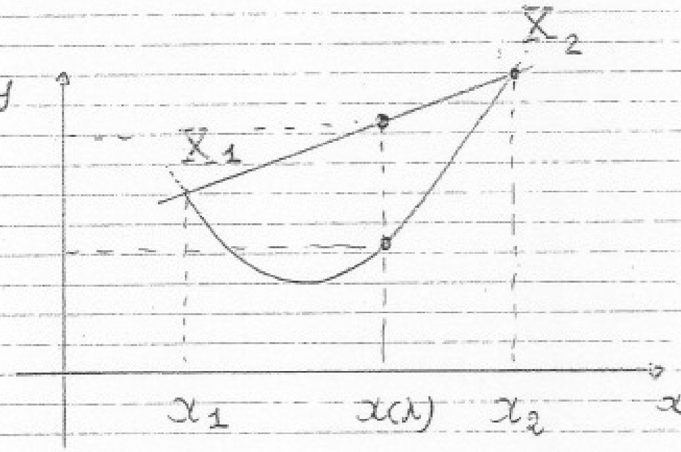
Sia $-\infty \le a < b \le \infty$

Def. Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$

f è detta **convessa** in (a,b) se $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$ e $\forall\, \lambda \in [0,1]$, si ha

$$(*) \qquad f(\overbrace{(1-\lambda)x_1 + \lambda x_2}^{x(\lambda)}) \le (1-\lambda) f(x_1) + \lambda f(x_2)$$

f è detta **concava** se $-f$ è convessa

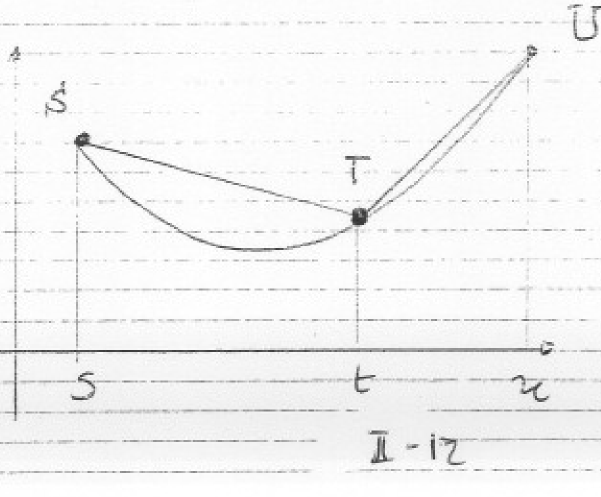


Se in $(*)$ vale $<$ per $\lambda \in (0,1)$ si parla di **stretta convessità**.

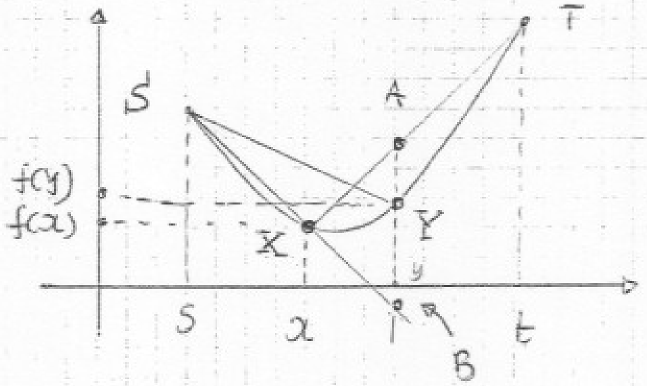
$(*)$ è equivalente a

$$(**) \qquad \frac{f(t) - f(s)}{t - s} \le \frac{f(u) - f(t)}{u - t}$$

$s, t, u \in (a,b)$
$s < t < u$

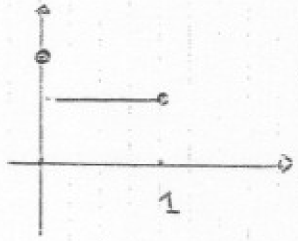


Teorema $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ convessa
$\Rightarrow f$ continua



Y appartiene al segmento AB
$\Rightarrow$ se $y\to x^+$ $\Rightarrow f(y)\to f(x)$
$\Rightarrow f$ è continua a destra.
Analogamente si prova la continuità a sinistra.

Attenzione! Il teorema è falso in $[a,b]$



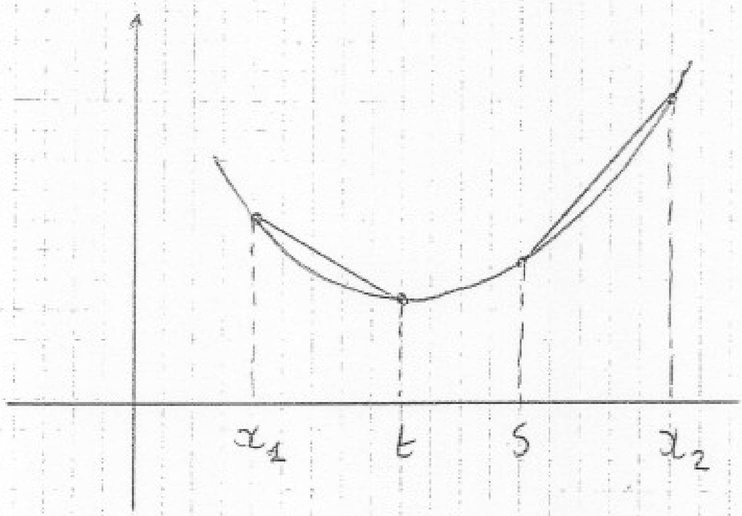
Caratterizzazioni della convessità

Teorema. Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ derivabile.
Le seguenti condizioni sono equivalenti
i) f è convessa
ii) f' è crescente
iii) $\forall x_0\in(a,b)$ si ha

$$(***)\quad \boxed{f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)}\quad \forall x\in(a,b)$$

Dim. $\boxed{1}$ Facciamo vedere che i) $\Leftrightarrow$ ii)

$\boxed{\Rightarrow}$ Da (**) si ha



$$\frac{f(t)-f(x_1)}{t-x_1} \le \frac{f(x_2)-f(s)}{x_2-s}$$

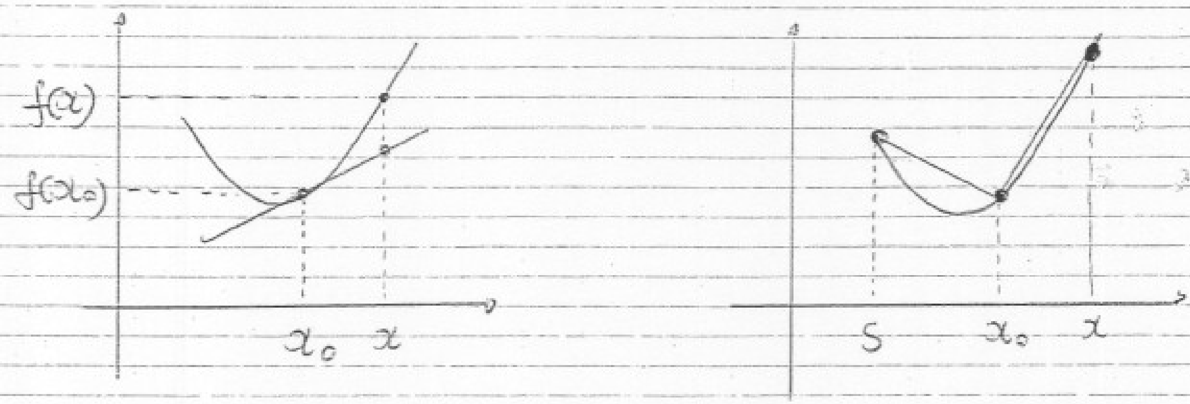
$\Rightarrow$, se $t \to x_1^+$, $s \to x_2^-$

$$\begin{array}{ccc} f'_+(x_1) & \le & f'_-(x_2) \\ \| & & \| \\ f'(x_1) & \le & f'(x_2) \end{array}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ con rif. alla seconda figura (pag 32), (**) segue subito dal teorema di Lagrange

$\square$

② Facciamo vedere che $i) \Rightarrow iii)$



Sia $x > x_0$. Si ha

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq \frac{f(x_0)-f(s)}{x_0-s} \qquad (s<x_0)$$

$\Rightarrow$, se $s \to x_0^-$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq f'_-(x_0) = f'(x_0)$$

Analogo ragionamento per $x < x_0$ $\square$

③ Mostriamo che $iii) \Rightarrow ii)$

Siano $x_0, x_1 \in (a,b)$, $x_0 < x_1$

Applicando $(***)$ due volte, si ottiene

$$f(x_1) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x_1-x_0)$$
$$f(x_0) \geq f(x_1) + f'(x_1)(x_0-x_1)$$

$$\Rightarrow f'(x_1)(x_1-x_0) \geq f(x_1)-f(x_0) \geq f'(x_0)(x_1-x_0)$$

$$\Rightarrow f'(x_1) \geq f'(x_0).$$

$\square$

Corollario. Nelle ipotesi precedenti, e se f'' esiste, si ha

i) f convessa $\Leftrightarrow$ $f'' \geq 0$ $(\forall x \in (a,b))$

ii) $f'' > 0 \Rightarrow f$ strettamente convessa

$\square$

Il viceversa di ii) è falso: $f(x) = x^4$ è strettamente convessa ma $f''(0) = 0$

Proposizione. Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile e convessa. Sia $x_0 \in (a,b)$ un pto stazionario (critico). Allora x_0 è un minimo assoluto (unico se f è str. convessa)

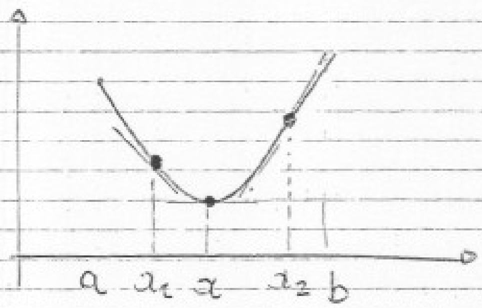
Dim. $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0)$
$\forall x \in (a,b)$

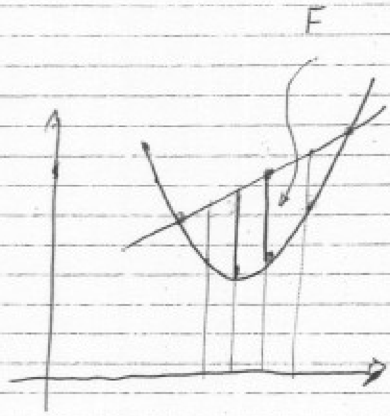
[inoltre, nel caso di convessità stretta: se x_1 e x_2, $x_1 < x_2$ fossero pti di minimo assoluto, il segmento congiungente x_1 e x_2 starebbe al di sotto di $f|_{[x_1, x_2]}$]

Proposizione. Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivabile e convessa. Sia $[x_1, x_2] \subset (a,b)$ e sia $f'(x_1) < 0 < f'(x_2)$

Allora $\exists\, x \in (x_1, x_2)$ pto di minimo assoluto per f.

Dim. Si utilizza il teor. dei valori intermedi per le derivate e la prop. precedente...





Diamo una Dim. diretta del

Teorema. Sia $f \in C^2(a,b)$, $f'' > 0$ in (a,b). Allora f è strettamente convessa in (a,b)

Dim.

$$\underset{a}{\circ} \quad \underset{x_1}{\circ} \quad \overset{x(\alpha)}{\circ} \quad \underset{x_2}{\circ} \quad \underset{b}{\circ}$$

$x_1 < x_2$

Definiamo $F : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$F(\alpha) := (1-\alpha) f(x_1) + \alpha f(x_2) - f(\underbrace{(1-\alpha)x_1 + \alpha x_2}_{x(\alpha)})$$

Si ha $F(0) = F(1) = 0$

$$F'(\alpha) = f(x_2) - f(x_1) - f'(x(\alpha))(x_2 - x_1)$$

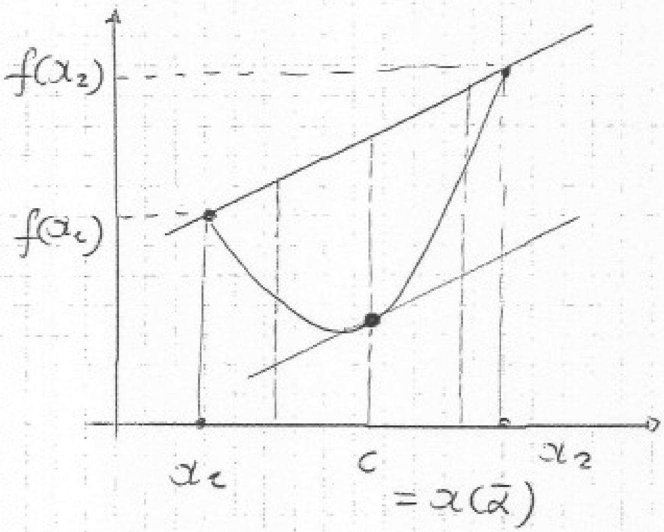
$' = \frac{d}{d\alpha}$ $\quad F''(\alpha) = -f''(x(\alpha))(x_2 - x_1)^2 < 0$

$\Rightarrow$ F' è strettamente decrescente in $[0,1]$.

Per il teorema di Rolle ∃ (unico nel nostro caso) $\bar{\alpha} \in (0,1)$ tale che $F'(\bar{\alpha}) = 0 \Rightarrow$

F' è > 0 in $[0, \bar{\alpha})$ e < 0 in $(\bar{\alpha}, 1] \Rightarrow$

F ha un massimo in $\bar{\alpha}$ $\Rightarrow$ $F(\alpha) \geq 0$ in $[0,1]$ ($e > 0$ in $(0,1)$) $\square$

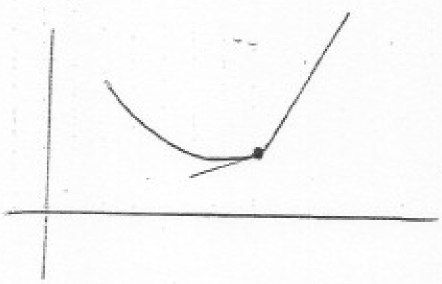


Osservazione: Non è difficile provare, utilizzando il lemma di usualizione, il seguente teorema

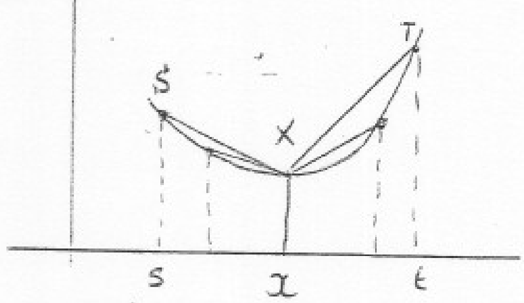
Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ convessa
($\Rightarrow f$ è continua ..)

Sia $x \in (a,b)$. Allora $\exists\, f'_{\pm}(x)$ (finite)

e $f'_-(x) \leq f'_+(x)$



Cenno:



$A = \{$ coeff. angolari di $SX \}$ $\qquad s < x < t$

$B = \{$ " " di $TX \}$ ....

altra definizione (potremmo in g^2)
$x_0 \in (a,b)$ è detto di flesso se la tangente alla curva def da f in P_0, attraversa la curva stessa

NON È EQ. ALL'ALTRA

Flessi

Sia $f \in \mathcal{C}^0((a,b))$

$x_0 \in (a,b)$ è detto di <u>flesso</u> (per f) v. anche oltre

(eq. f ha un flesso in x_0 ; ..... in $P_0 = (x_0, f(x_0))$)

se f è <u>concava</u> (convessa) a destra di x_0
e <u>convessa</u> (concava) a sinistra di x_0

Se $f'(x_0) = \pm\infty$, si parla di flesso a tangente verticale

Sia $f \in \mathcal{C}^2((a,b))$ (ipotesi di lavoro)

Ricordando le varie caratterizzazioni della convessità si ha:

Proposizione i) i pti di flesso di f vanno ricercati tra gli zeri di f''

(att: $f''(x_0) = 0 \not\Rightarrow x_0$ flesso!
ex $y = x^4 \ldots$)

ii) i pti di flesso di f corrispondono ai massimi e minimi di f'

in particolare:

in un pto di flesso è se $f'(x_0) = 0$ si parla di flesso orizzontale

— : f'  flesso ascendente

- - - : f'  flesso discendente