SOLUZIONI DELLE PROVE SCRITTE
DI ANALISI MATEMATICA 2
CORSO DI LAUREA IN MATEMATICA APPLICATA

ANTONIO MARIGONDA

Appello del	*31*	*marzo*	*2009*	(v.o.)
Appello del	*1*	*luglio*	*2009*	(v.o.)
Appello del	*15*	*luglio*	*2009*	(v.o.)
Appello del	*7*	*settembre*	*2009*	(v.o.)
Appello del	*22*	*settembre*	*2009*	(v.o.)
Prima prova parziale del	*10*	*dicembre*	*2009*	
Seconda prova parziale del	*2*	*febbraio*	*2010*	
Appello del	*2*	*febbraio*	*2010*	
Appello del	*2*	*febbraio*	*2010*	(v.o.)
Appello del	*18*	*febbraio*	*2010*	
Appello del	*16*	*giugno*	*2010*	
Appello del	*9*	*luglio*	*2010*	
Appello del	*13*	*settembre*	*2010*	
Appello del	*27*	*settembre*	*2010*	

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2008/09

Prova scritta di Analisi Matematica 2 mod. av.

Verona, 31 marzo 2009

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 1. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie S di equazioni parametriche:

$$\varphi(\theta, y) = (\sqrt{y^2+1}\cos\theta, y, \sqrt{y^2+1}\sin\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi],\ |y| < 1,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x, y, z) = (x^2, y/2, x)$.

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la circonferenza di raggio $\sqrt{2}$, centrata in $(0, 1, 0)$ e appartenente al piano $y = 1$ parametrizzata da $\gamma(\theta) = (\sqrt{2}\cos\theta, 1, \sqrt{2}\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $(1, 0, 0)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Esercizio 2. Si determini col metodo di separazione delle variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione del telegrafo sul segmento $[0, \pi]$, con ambedue le estremità libere:

$$u_{tt} + 2u_t - u_{xx} = 0, \qquad u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0,$$

assumendo come dati iniziali $u(x, 0) = 0$ e $u_t(x, 0) = x$. Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Esercizio 3. Determinare la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{x} - 4x - 2y &= 4e^{5t}, \\ \dot{y} - 3x + y &= 0. \end{cases}$$

Discutere inoltre il tipo e la stabilità delle soluzioni stazionarie del sistema omogeneo associato.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2008/09

Prova scritta di Analisi Matematica 2 mod. av.

Verona, 1 luglio 2009

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^3$ è assegnata la superficie Σ parametrizzata dalla funzione

$$\varphi : [0, 2\pi] \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$$

definita da $\varphi(\theta, s) = ((s^2 + 1)\cos\theta, (s + 2)\sin\theta, s^3)$. Si consideri il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$\vec{F}(x, y, z) = (3x^4 + y, 5x + z, z^2).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$.
(2) Si calcoli la circuitazione di F lungo la curva di equazioni parametriche $\gamma(\theta) = (\cos\theta, 2\sin\theta, 0)$.
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ e si calcoli l'elemento d'area di Σ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $(0, 3, 1)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\text{rot}(\vec{F})$ attraverso Σ con l'orientamento indotto dalla parametrizzazione φ.

Esercizio 5. Si determini col metodo di separazione di variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione di reazione-diffusione-trasporto sul segmento $[0, \pi]$:

$$u_t - u_{xx} - 2u_x - u = 0, \qquad x \in [0, \pi],\ t > 0$$

con dati al contorno di Dirichlet omogenei $u(0, t) = u(\pi, t) = 0\ \forall\, t > 0$, assumendo come dato iniziale $u(x, 0) = x(\pi - x)e^{-x}$ per $0 \le x \le \pi$. Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Esercizio 6. Determinare la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{x} - 3x + 2y = 3e^t, \\ \dot{y} - 2x + 2y = 0. \end{cases}$$

Discutere inoltre il tipo e la stabilità delle soluzioni stazionarie del sistema omogeneo associato.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2008/09

Verona, 15 luglio 2009

Prova scritta di Analisi Matematica 2 mod. av.

Cognome e nome: ______________________ Matricola: ______________

Esercizio 7. In $\mathbb{R}^3$ sia assegnata la superficie Σ parametrizzata dalla funzione

$$\varphi : [-1,1] \times [-1,1] \to \mathbb{R}^3 \text{ definita da } \varphi(u,v) = (ve^u, u^2, -v),$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$\vec{F}(x,y,z) = (x^4z^2, z\cos y, x^2+y^2).$$

(1) si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$
(2) si scriva la matrice Jacobiana di φ e si calcoli l'elemento d'area di Σ.
(3) si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo il bordo γ di Σ con l'orientamento su esso indotto dall'orientamento di Σ
(4) si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $(1/2, 0, -1/2)$.
(5) si calcoli il flusso di
$$\vec{H}(x,y,z) = (xz, yz^2, 0)$$
attraverso Σ con l'orientamento dato dalla parametrizzazione.

Esercizio 8. Si determini col metodo di separazione di variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione del calore sul segmento $[0,\pi]$, con estremità termicamente isolate:

$$\begin{cases} u_t - 5u_{xx} = 0, & 0 \le x \le \pi\,,\ t > 0\,, \\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \end{cases}$$

assumendo come dato iniziale $u(x,0) = 2x$. Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Esercizio 9. Determinare la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali

$$\begin{cases} x' + 2x - 3y &= 3t^2 \\ y' + 4x - 6y &= 0 \end{cases}$$

Discutere inoltre il tipo e la stabilità delle soluzioni stazionarie del sistema omogeneo associato.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2008/09

Prova scritta di Analisi Matematica 2 mod. av.

Verona, 7 settembre 2009

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 10. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie S di equazioni parametriche:

$$\varphi(\theta, x) = (x, e^{x^2-1}\cos\theta, e^{x^2-1}\sin\theta), \qquad \theta \in [0, 2\pi]\,,\ |x| < 1,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x, y, z) = \left(\dfrac{x^2}{y^2+z^2+1}, y^2+z^2, x(y^2+z^2)\right)$.

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la circonferenza di raggio e, centrata in $(1, 0, 0)$ e appartenente al piano $x = 1$ parametrizzata da $\gamma(\theta) = (1, e\cos\theta, e\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $(1, 0, 1)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Esercizio 11. Si determini col metodo di separazione delle variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione alle derivate parziali:

$$\begin{cases} -u_t + 2u_{xx} + 3u_x + u = 0, & \text{per } t > 0,\ x \in]0, \pi[, \\ \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \\ \\ u(x, 0) = e^{-\frac{3}{4}x}\left(\dfrac{\pi}{2} - \left|x - \dfrac{\pi}{2}\right|\right), \end{cases}$$

Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Esercizio 12. Determinare la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{x} + 2x + 3y &= 3e^{-2t}, \\ \dot{y} + 5x + y &= 0. \end{cases}$$

Discutere inoltre il tipo e la stabilità delle soluzioni stazionarie del sistema omogeneo associato.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2008/09

Prova scritta di Analisi Matematica 2 mod. av.

Verona, 22 settembre 2009

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Esercizio 13. Si consideri in $\mathbb{R}^3$ la superficie S di equazioni parametriche:

$$\varphi(\theta, r) = (r\cos\theta, r\sin\theta, 1 - r^4), \qquad \theta \in [0, 2\pi],\ 0 \le r \le 1,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da $\vec{F}(x, y, z) = (3y^2 + 2z, 1 - 8x^3, 2x - 6y^2)$.

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva Γ appartenente al piano $z = 1$ parametrizzata da $\gamma(\theta) = (5\cos\theta, 2\sin\theta, 1)$, $\theta \in [0, 2\pi]$.
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $(1/2, 0, 15/16)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Suggerimento: si ricordi che $\int_0^{2\pi} \cos^4\theta\, d\theta = 3\pi/4$.

Esercizio 14. Si determini col metodo di separazione delle variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} -u_{tt} + 3u_{xx} = 0 \text{ in }]0, \pi[\times]0, +\infty[\\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = 0 \\ u_t(x, 0) = x. \end{cases}$$

Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Esercizio 15. Determinare la soluzione generale del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} 8\dot{x} + 14x - 9y &= 8\sin(2t), \\ 4\dot{y} - 6x + 13y &= 0. \end{cases}$$

Discutere inoltre il tipo e la stabilità delle soluzioni stazionarie del sistema omogeneo associato.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/10

Prima prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 10 dicembre 2010

Cognome e nome: ____________________ matr.____________________

Esercizio 16. Si consideri l'insieme:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 2x)^2 = x^2 + y^2\},$$

detto *Chiocciola di Pascal*.

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si provi che la curva interseca gli assi in cinque punti, di cui uno è l'origine. Si determinino gli altri quattro punti $P_i = (x_i, y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, e si scrivano le equazioni delle tangenti a Γ in essi.
(3) Per ogni $i = 1, 2, 3, 4$, si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi_i(x)$ di classe C^1 in un intorno di x_i con $\varphi_i(x_i) = y_i$.
(4) Si determinino massimi e minimi della funzione $h(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ vincolati a Γ. Si dica se Γ è compatto.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Esercizio 17. Dato $\alpha \in \mathbb{R}$ e indicata con D la regione illimitata del primo quadrante compresa tra l'iperbole di equazione $xy = 1$, la retta $y = x$ e l'asse delle x, si calcoli

$$\iint_D \frac{1}{x^\alpha}\, dx\, dy.$$

Esercizio 18. Si consideri la serie di funzioni definite per $(t, x) \in [0, 1] \times [0, 2\pi]$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{5} - 3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}} e^{-4t} \cos(nx).$$

(1) Si studi la convergenza puntuale, uniforme e totale della serie.
(2) Si calcoli la somma della serie per $(t, x) = (0, 0)$.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/10

Seconda prova parziale di Analisi Matematica 2

Verona, 2 febbraio 2010

Cognome e nome: ______________________________ matr.__________________________

Si indichi se, in caso di esito positivo, si vuole sostenere la prova orale
☐ nel primo appello.
☐ nel secondo appello.
☐ in altra sessione.

Esercizio 19. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(r,\theta) = ((r^2+1)\cos\theta, r^3+r^2, (r^2+1)\sin\theta), \qquad (r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi[,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = (y+z^2, 4x^2-3z, 6x^2+y^2).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione
$$\gamma(t) := (5\cos t, 2, 5\sin t).$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P(5/4, 3/8, 0)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione utilizzando il teorema della divergenza.

Esercizio 20. Si consideri l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy^2-y}{x}.$$

a.) Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale;
b.) si scriva la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente $y(1) = 1$.

c.) Si dica se essa è definita su tutto $\mathbb{R}$;
d.) si dica se essa ammette asintoti e, in caso affermativo, li si determini;
e.) *Facoltativo:* si tracci un grafico qualitativo della soluzione soddisfacente $y(1) = 1$.

Esercizio 21. Si consideri la seguente equazione alle derivate parziali con condizioni al contorno di Dirichlet:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = 0 \text{ per } (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,\pi[, \\ u(0,x) = x(\pi - x), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. \end{cases}$$

Si utilizzi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione del problema in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/10

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 2 febbraio 2010

Cognome e nome: ______________________________ matr.________________________

Si indichi se, in caso di esito positivo, si vuole sostenere la prova orale
- ☐ nel primo appello.
- ☐ nel secondo appello.
- ☐ in altra sessione.

Esercizio 22. Si consideri l'insieme

$$\Gamma := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x^6 - 3x^4y^2 - 3x^2y^4 + 4x^2 + 8xy - y^6 + 4y^2 = 0\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si provi che Γ interseca gli assi in cinque punti di cui uno è l'origine. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ nei punti di $\Gamma \cap \{xy = 0\}$ diversi dall'origine. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.
(3) Si determinino massimi e minimi della funzione $h(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ vincolati a Γ.
(4) Si dica se Γ è compatto.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Esercizio 23. Definiamo $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2,\ x/4 < y^2 < x\}$. Si tracci il grafico di $\partial\Omega$ e si calcoli l'area di Ω.

Esercizio 24. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(r,\theta) = ((r^2+1)\cos\theta, r^3 + r^2, (r^2+1)\sin\theta), \qquad (r,\theta) \in [0,1] \times [0, 2\pi[,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = (y + z^2, 4x^2 - 3z, 6x^2 + y^2).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione

$$\gamma(t) := (5\cos t, 2, 5\sin t).$$

(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P(5/4, 3/8, 0)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione utilizzando il teorema della divergenza.

Esercizio 25. Si consideri l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy^2 - y}{x}.$$

a.) Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale;
b.) si scriva la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente $y(1) = 1$.

c.) Si dica se essa è definita su tutto $\mathbb{R}$;
d.) si dica se essa ammette asintoti e, in caso affermativo, li si determini;
e.) si tracci un grafico qualitativo della soluzione soddisfacente $y(1) = 1$.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/10

Appello di Analisi Matematica 2 mod. av. (A.A. 08-09)

Verona, 2 febbraio 2010

Cognome e nome: ______________________ matr. ______________________

Si indichi se, in caso di esito positivo, si vuole sostenere la prova orale
☐ nel primo appello.
☐ nel secondo appello.
☐ in altra sessione.

Esercizio 26. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(r,\theta) = ((r^2+1)\cos\theta, r^3+r^2, (r^2+1)\sin\theta), \qquad (r,\theta) \in [0,1] \times [0,2\pi[,$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = (y+z^2, 4x^2-3z, 6x^2+y^2).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione
$$\gamma(t) := (5\cos t, 2, 5\sin t).$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P(5/4, 3/8, 0)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione utilizzando il teorema della divergenza.

Esercizio 27. Si consideri la seguente equazione alle derivate parziali con condizioni al contorno di Dirichlet:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) = 0 \text{ per } (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,\pi[\,, \\ u(0,x) = x(\pi - x), \\ u(t,0) = u(t,\pi) = 0. \end{cases}$$

Si utilizzi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione del problema in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Esercizio 28. Si risolva il seguente sistema di equazioni differenziali lineari del primo ordine:

$$\begin{cases} \dot{x} - 3x + 2y = e^{4t}, \\ \dot{y} + 6x - y = 0. \end{cases}$$

Si discuta la stabilità delle soluzioni stazionarie dell'omogeneo associato.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/10

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 18 febbraio 2010

Cognome e nome: ______________________ matr.______________________

Si indichi se, in caso di esito positivo, si vuole sostenere la prova orale
☐ in questo appello.
☐ in altra sessione.

Esercizio 29. Si consideri l'insieme

$$\Gamma := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : -\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 = 0 \right\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane, e si determini $\overline{\Gamma}$, dove $\overline{\Gamma}$ è la chiusura di Γ in $\mathbb{R}^2$.
(2) Si dica se Γ è compatto. Si dica se $\overline{\Gamma}$ è compatto.
(3) Si provi che Γ interseca l'insieme C definito da $C = \{(x,y) : x^2 = y^2\}$ in due punti. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ nei punti di $\Gamma \cap C$. Si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.
(4) Si determinino massimi e minimi della funzione $h(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$ vincolati a $\overline{\Gamma}$.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Esercizio 30. Si calcoli il volume del solido:

$$V := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x < 2,\ 0 < z < \frac{x}{x^2+y^2},\ x^2 < y < 2x^2 \right\}.$$

Esercizio 31. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) = (u^2 - 3uv + 1, v^3u + u, u^2 + v^2), \qquad (u,v) \in [-1,1] \times [-1,1],$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = (6y, 6x - 4yz^2 + 5z^2, 10yz - 4y^2z).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli l'integrale di linea di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione
$$\gamma(t) := (t \sin t + 1, t/2\pi, 5 \arctan(t^3 + 2t) \sin^2 t).$$
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli la normale indotta dalla parametrizzazione nel punto $P\left(1, \dfrac{3}{1600} + \dfrac{3}{2\sqrt{10}}, \dfrac{1}{4}\right)$ (non è richiesta la normalizzazione).
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{G}(x,y,z) := (6y, 1, 1)$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione.

Esercizio 32. Si consideri la seguente equazione alle derivate parziali con condizioni al contorno di Neumann:

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) - \partial_{xx} u(t,x) + 4u(t,x) = 0 \ \text{ per } (t,x) \in]0,+\infty[\times]0,\pi[\,, \\ u(0,x) = \left|\frac{\pi}{2} - x\right|, \\ u_x(t,0) = u_x(t,\pi) = 0. \end{cases}$$

Si utilizzi il metodo di separazione delle variabili per ottenere una soluzione del problema in forma di serie e si discuta la convergenza della serie ottenuta.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/10

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 16 giugno 2010

Cognome e nome: ________________________________ matr.________________________________

Si indichi se, in caso di esito positivo, si vuole sostenere la prova orale
☐ nel primo appello.
☐ nel secondo appello.
☐ in altra sessione.

Esercizio 33. Si consideri l'insieme

$$\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} : -\frac{x^2}{(x^2+y^2)^2} + x^2 + y^2 = 0\right\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane. Si determini $\bar{\Gamma}$, chiusura di Γ in $\mathbb{R}^2$.
(2) Si provi che Γ interseca gli assi in due punti. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ nelle due intersezioni e si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $x = \varphi(y)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.
(3) Si determinino massimi e minimi della funzione $h(x,y) = \arctan\log(x^2+y^2+1)$ vincolati a Γ.
(4) Si dica se Γ è compatto, si dica se $\bar{\Gamma}$ è compatto.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Esercizio 34. Definiamo $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x+y < 2, 0 < x-y < 2\pi\}$. Si tracci il grafico di $\partial\Omega$ e si calcoli il seguente integrale doppio: $\displaystyle\iint_\Omega \cos^2(x+y)\sin(3(x-y))\,dx\,dy$.

Esercizio 35. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) = (u, v, 1-u^2-v^4), \qquad \text{con } u,v \in \mathbb{R},\ u^2+v^4 \le 1$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = (9y^2+3z, 8z^2+x, 6x^2).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione $\gamma(t) := (\cos t, 0, \sin t)$.
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P(1/\sqrt{2}, 0, 1/2)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione utilizzando il teorema della divergenza.

Esercizio 36. Si consideri l'equazione differenziale:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{yx^2 - x}.$$

a.) Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale;
b.) si scriva la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.

Si consideri ora la soluzione soddisfacente $y(1) = 3$.

c.) Si dica se essa è definita su tutto $\mathbb{R}$;
d.) si dica se essa ammette asintoti e, in caso affermativo, li si determini;
e.) si tracci un grafico qualitativo della soluzione soddisfacente $y(1) = 3$.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/10

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 9 luglio 2010

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________________

Si indichi se, in caso di esito positivo, si vuole sostenere la prova orale ☐ in questo appello. ☐ in altra sessione.

Esercizio 37. Si consideri l'insieme

$$\Gamma := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - \cos(6xy) - 1 = 0\right\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si provi che Γ interseca gli assi in quattro punti. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ nelle intersezioni e si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.
(3) Si determinino i massimi della funzione $h(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}} + 1$ vincolati a Γ.
(4) Si dica se Γ è compatto.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Esercizio 38. Definiamo $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| < 2, |x - y| < \pi\}$. Si tracci il grafico di $\partial\Omega$ e si calcoli il seguente integrale doppio: $\displaystyle\iint_\Omega \left(\frac{x+y}{3}\right)^3 \sin^2(x - y)\, dx\, dy.$

Esercizio 39. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(r, \theta) = ((r^3 - r^2 + 1)\cos\theta, (r^3 - r^2 + 1)\sin\theta, r), \qquad \text{con } \theta \in [0, 2\pi], 0 \le r \le 2$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x, y, z) = (2y^2 + 6z, 5z^2 + 4x, 2x^2).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si utilizzi il teorema di Stokes per calcolare la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione $\gamma(t) := (\cos t, \sin t, 0)$.
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P(1, 0, 1)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione utilizzando il teorema della divergenza.

Esercizio 40. Si determini col metodo di separazione delle variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} u_t - 3u_{xx} = 0 \text{ in }]0, \pi[\times]0, +\infty[\\ u_x(0, t) = u_x(\pi, t) = 0 \\ u(x, 0) = x(\pi - x) \end{cases}$$

Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/10

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 13 settembre 2010

Cognome e nome: ______________________________ matr.______________________

Si indichi se, in caso di esito positivo, si vuole sostenere la prova orale
☐ in questo appello.
☐ nel secondo appello di questa sessione.

Esercizio 41. Si consideri l'insieme

$$\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x^2 + y^2 - 4 + x^3y^3 = 0\right\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si provi che Γ interseca gli assi in quattro punti. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ nelle intersezioni e si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.
(3) Si dica se Γ è compatto.
(4) Si dica se esistono massimi e minimi della funzione
$$h(x,y) = \frac{4 - x^3y^3}{4} \, e^{-(4-x^3y^3)/4}$$
vincolati a Γ, in caso affermativo li si determini.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Esercizio 42. Definiamo $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, |x+y| < 1, \, |x-y| < \pi\}$. Si tracci il grafico di $\partial\Omega$ e si calcoli il seguente integrale doppio: $\displaystyle\iint_\Omega \frac{\sin(x-y)}{1+(x+y)^2} \, dx \, dy$.

Esercizio 43. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) = \left(\left(v^2+1\right)^2 \sin(u), v^4, \left(v^2+1\right)^2 \cos(u)\right), \qquad \text{con } u \in [0, 2\pi], 0 \le v \le 1$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = (3x + 4z^2, -x - 6y + 2, y - x^2).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione $\gamma(t) := (\cos t, \sin t, 0)$.
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P\left(\dfrac{25}{16}, \dfrac{1}{16}, 0\right)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\operatorname{rot} \vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione utilizzando il teorema di Stokes.

Esercizio 44. Si consideri l'equazione differenziale

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}}{x^2 + y^2}.$$

(1) Si scriva tale equazione come equazione differenziale totale.
(2) Si trovi la soluzione generale in forma implicita e, se possibile, in forma esplicita.
(3) Si trovi la soluzione corrispondente al dato iniziale $y(0) = \sqrt[3]{3}$.

Università degli Studi di Verona
Corso di Laurea in Matematica Applicata
a.a. 2009/10

Appello di Analisi Matematica 2

Verona, 27 settembre 2010

Cognome e nome: __________________________ matr.______________________

Esercizio 45. Si consideri l'insieme

$$\Gamma := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \left(x^2+y^2\right)^{5/2} - \left(x^2+y^2\right)^2 - \left(3x^2+y^2\right)^2 = 0\right\}.$$

(1) Si esprima Γ in coordinate polari piane.
(2) Si provi che Γ interseca gli assi in cinque punti punti, di cui uno è l'origine. Si scrivano le equazioni delle rette tangenti a Γ nelle intersezioni diverse dall'origine e si dica se Γ definisce implicitamente una funzione $y = \varphi(x)$ in un intorno di ciascuno di tali punti.
(3) Si dica se Γ è compatto. Si dica se $\Gamma \setminus \{(0,0)\}$ è compatto.
(4) Si dica se esistono massimi e minimi della funzione

$$h(x,y) = \log \arctan(x^2+y^2)$$

vincolati a $\Gamma \setminus \{(0,0)\}$, in caso affermativo li si determini.
(5) *Facoltativo:* Si tracci un grafico qualitativo di Γ.

Esercizio 46. Definiamo $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x+y| < 1,\ |x-y| < \pi\}$. Si tracci il grafico di $\partial\Omega$ e si calcoli il seguente integrale doppio: $\displaystyle\iint_\Omega \frac{(x-y)e^{-(x-y)^2}}{1+(x+y)^2}\,dx\,dy.$

Esercizio 47. Si consideri la superficie $S \subseteq \mathbb{R}^3$ parametrizzata da:

$$\varphi(u,v) = \left(v^2+1, v^2\sin(u), \left(v^2+1\right)\cos(u)\right), \qquad \text{con } u \in [0,2\pi], 0 \le v \le 1$$

e il campo vettoriale $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definito da:

$$\vec{F}(x,y,z) = (5x+2y+4z^2, -2x-y+z, -x^2+4y).$$

(1) Si calcolino divergenza e rotore di $\vec{F}$. Si dica se il campo $\vec{F}$ è conservativo.
(2) Si calcoli la circuitazione di $\vec{F}$ lungo la curva $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ di equazione $\gamma(t) := (\cos(t), 3\sin(t), 0)$.
(3) Si scriva la matrice Jacobiana di φ, e quindi l'elemento di superficie 2-dimensionale relativo alla parametrizzazione φ.
(4) Si calcoli il versore normale indotto dalla parametrizzazione nel punto $P\,(2,1,0)$.
(5) Si calcoli il flusso di $\operatorname{rot}\vec{F}$ attraverso la superficie S orientata secondo l'orientamento indotto dalla parametrizzazione utilizzando il teorema di Stokes.

Esercizio 48. Si determini col metodo di separazione delle variabili la soluzione (sotto forma di serie) dell'equazione alle derivate parziali

$$\begin{cases} u_t - 2u_{xx} + u = 0 \text{ in }]0,\pi[\times]0,+\infty[\\ u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 \\ u(x,0) = \chi_{[0,\pi/2]}(x), \end{cases}$$

dove $\chi_{[0,\pi/2]}(x) = 1$ se $x \in [0,\pi/2]$ e $\chi_{[0,\pi/2]}(x) = 0$ altrimenti. Si discuta la convergenza uniforme della serie ottenuta.

Svolgimento (Esercizio 1)**.** Poniamo $\varphi(\theta, y) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ e $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

(1) Si ha

$$\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 2x + 1/2,$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & x^2 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & y/2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & x \end{pmatrix} = (0,-1,0).$$

Poiché il rotore non è nullo, il campo non è conservativo.

(2) Dal teorema di Stokes, la circuitazione è il flusso del rotore attraverso la superficie $D = \{(x,1,z) : x^2+z^2 \leq 2\}$ con normale $(0,-1,0)$, infatti la normale $(0,-1,0)$ su D induce per la regola della mano destra l'orientamento richiesto su γ. Il flusso è:

$$\int_D \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_D d\sigma = \mathrm{Area}(D) = 2\pi.$$

Verifichiamo il risultato:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \vec{F}\,d\gamma &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\sqrt{2}\cos\theta, 1, \sqrt{2}\sin\theta)\cdot(-\sqrt{2}\sin\theta, 0, \sqrt{2}\cos\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\Big(-2^{3/2}\cos^2\theta\sin\theta + 2\cos^2\theta\Big)\,d\theta = 2\pi\end{aligned}$$

Quindi la circuitazione non è nulla, il che conferma come $\vec{F}$ non sia conservativo.

(3) La matrice Jacobiana è

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(\theta,y) = \begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ 0 & 1 \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix}.$$

Per la formula di Binet, l'elemento d'area è:

$$\omega_2 = \sqrt{\det{}^2 B_1 + \det{}^2 B_2 + \det{}^2 B_3}$$

dove

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \det{}^2 B_1 = (y^2+1)\sin^2\theta.$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix}, \qquad \det{}^2 B_2 = y^2,$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix}, \qquad \det{}^2 B_3 = (y^2+1)\cos^2\theta.$$

da cui $\omega_2 = \sqrt{2y^2+1}$.

(4) Una base dello spazio tangente è data dalle colonne della matrice Jacobiana di φ. In particolare, nel punto $(1,0,0) = \varphi(0,0)$ si ha $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$. La normale deve essere ortogonale a questi due vettori, e avere norma uno, per cui è della forma $(\pm 1, 0, 0)$. Verifichiamo quale di questi due è la normale indotta dalla parametrizzazione:

$$\det\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & = \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \mp 1.$$

Il determinante deve essere positivo, per cui la normale indotta nel punto $(1,0,0)$ è $(-1,0,0)$.

(5) Il flusso richiesto vale:

$$\begin{aligned}
\Phi(S,\vec{F}) &= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} F_1\circ\varphi & -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ F_2\circ\varphi & 0 & 1 \\ F_3\circ\varphi & \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix} dy\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} (y^2+1)\cos^2\theta & -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ \frac{y/2}{\sqrt{y^2+1}\cos\theta} & 0 & 1 \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix} dy\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} (-y/2)\det\begin{pmatrix} -\sqrt{y^2+1}\sin\theta & \frac{y\cos\theta}{\sqrt{y^2+1}} \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \frac{y\sin\theta}{\sqrt{y^2+1}} \end{pmatrix} dy\,d\theta + \\
&\quad + \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} (-1)\det\begin{pmatrix} (y^2+1)\cos^2\theta & -\sqrt{y^2+1}\sin\theta \\ \sqrt{y^2+1}\cos\theta & \sqrt{y^2+1}\cos\theta \end{pmatrix} dy\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} y^2/2\,dy\,d\theta + \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} \Big((y^2+1)^{3/2}\cos^3\theta + (y^2+1)\sin\theta\cos\theta\Big)\,d\theta\,dy \\
&= \frac{2}{3}\pi.
\end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio è sfruttato il fatto che:

$$\int_0^{2\pi}\cos\theta\sin\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin(2\theta)\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{4\pi}\sin w\,dw = 0.$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta &= \int_{-\pi/2}^{3\pi/2}\cos^3\theta\,d\theta = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta + \int_{\pi/2}^{3/2\pi}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta \\
&= \int_{-1}^{1}(1-w^2)\,dw + \int_{1}^{-1}(1-w^2)\,dw = 0.
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 2)**.** Cerchiamo soluzioni non nulle nella forma $u(x,t) = U(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione si ha:

$$\ddot{U}(t)X(x) + 2\dot{U}(t)X(x) - U(t)\ddot{X}(x) = 0$$

e dividendo per $U(t)X(x)$ si ottiene:

$$\frac{\ddot{U}(t)+2\dot{U}(t)}{U(t)} - \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = 0,$$

pertanto si ha:

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0 \\ \ddot{U}(t) + 2\dot{U}(t) - \lambda U(t) = 0, \end{cases}$$

Dai dati iniziali si ricava $u_x(0,t) = U(t)\dot{X}(0) = 0$ e $u_x(\pi,t) = U(t)\dot{X}(\pi) = 0$ da cui $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$. Cerchiamo quindi soluzioni non nulle di:

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0 \\ \dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0, \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. L'equazione caratteristica è $\mu^2 = \lambda$.
Se $\lambda > 0$ la soluzione è:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\dot{X}(x) = c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\,x} - c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\,x}, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Sostituendo le condizioni iniziali e finali si ha $0 = \dot{X}(0) = (c_1 - c_2)\sqrt{\lambda}$ da cui $c_1 = c_2$, e $0 = \dot{X}(\pi) = c_1\sqrt{\lambda}(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi})$ il che implica $c_1 = 0$, quindi l'unica soluzione è quella identicamente nulla, non accettabile.
Se $\lambda = 0$ la soluzione è $X(x) = c_1 + c_2 x$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Poiché $\dot{X}(x) = c_2$, si ottiene $c_2 = 0$ e si ha la soluzione accettabile $X(x) = c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Se $\lambda < 0$, posto $\omega = \sqrt{|\lambda|}$, la soluzione è $X(x) = c_1 \cos(\omega x) + c_2 \sin(\omega x)$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Si ottiene $\dot{X}(x) = -c_1\omega \sin(\omega x) + c_2\omega \cos(\omega x)$, e sostituendo si ha $0 = \dot{X}(0) = c_2\omega$ da cui $c_2 = 0$ e $0 = \dot{X}(\pi) = -c_1\omega \sin(\omega x)$ da cui $\omega \in \mathbb{Z}$, pertanto $\lambda = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$.
Quindi l'equazione per $X(x)$ ammette soluzioni accettabili per $\lambda = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$ e si ha $X_n(x) = c_n \cos(nx)$, il che comprende anche il caso $\lambda = n = 0$. L'equazione per $U(t)$ risulta:

$$\begin{cases} \ddot{U}(t) + 2\dot{U}(t) + n^2 U(t) = 0, \\ U(0) = 0. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è $\mu^2 + 2\mu + n^2 = 0$, il cui discriminante è $\Delta = 4(1 - n^2)$. Studiamo i vari casi in base al segno del discriminante, tenendo presente che $n \in \mathbb{N}$.
Se $n = 0$ si ha $\Delta > 0$ e le radici sono $\mu_1 = 0$ e $\mu_2 = -2$, pertanto le soluzioni sono $U(t) = d_1 + d_2 e^{-2t}$ al variare di $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Sostituendo la condizione iniziale $U(0) = 0$ si ottiene $d_1 = -d_2$ e quindi $U_0(t) = d_1(1 - e^{-2t})$.
Se $n = 1$ si ha $\Delta = 0$ e l'unica radice doppia è $\mu = -1$, pertanto le soluzioni sono $U(t) = d_1 e^{-t} + d_2 t e^{-t}$ al variare di $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Sostituendo la condizione iniziale $U(0) = 0$ si ottiene $d_1 = 0$ e quindi $U_1(t) = d_2 t e^t$.
Se $n > 1$ si ha $\Delta < 0$ e si hanno le due radici complesse coniugate $\mu_1 = -1 + i\sqrt{n^2 - 1}$, $\mu_2 = -1 - i\sqrt{n^2 - 1}$, pertanto le soluzioni sono $U(t) = d_1 e^{-t} \cos(\sqrt{n^2 - 1}\, t) + d_2 e^{-t} \sin(\sqrt{n^2 - 1}\, t)$. Sostituendo la condizione iniziale $U(0) = 0$ si ottiene $d_1 = 0$ e quindi $U_n(t) = d_n e^{-t} \sin(\sqrt{n^2 - 1}\, t)$.
Definiamo $u_n(x, t) = U_n(t) X_n(x)$, si ha:

$$\begin{aligned} u_0(x, t) &= d_0(1 - e^{-2t})c_0 = a_0(1 - e^{-2t}) \\ u_1(x, t) &= d_1 t e^{-t} c_1 \cos x = a_1 t e^{-t} \cos x \\ u_n(x, t) &= d_n e^{-t} \sin(\sqrt{n^2 - 1}\, t)\, c_n \cos(nx) = a_n e^{-t} \sin(\sqrt{n^2 - 1}\, t)\, \cos(nx). \end{aligned}$$

Derivando in t e valutando in 0:

$$\begin{aligned} \partial_t u_0(x, 0) &= 2a_0 \\ \partial_t u_1(x, 0) &= a_1 \cos x \\ \partial_t u_n(x, 0) &= a_n \sqrt{n^2 - 1} \cos(nx). \end{aligned}$$

Cerchiamo soluzioni del tipo $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$, derivando in t e valutando per $t = 0$ si deve avere:

$$x = \partial_t u(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \partial_t u_n(x, 0) = 2a_0 + a_1 \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sqrt{n^2 - 1} \cos(nx)$$

Pertanto è necessario calcolare lo sviluppo in serie di Fourier della funzione $f(x) = x$ definita in $[0, \pi]$ estesa per parità in $[-\pi, \pi]$ e per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Se $n > 1$ si ha:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} x\, dx = \frac{\pi}{2} \\ &\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \left[x \frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx)\, dx = -\frac{2(1 - (-1)^n)}{\pi n^2} \end{aligned}$$

Pertanto si ha per $|x| \leq \pi$

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^n)}{n^2} \cos(nx) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \cos x - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos(nx),$$

da confrontare con

$$x = 2a_0 + a_1 \cos x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \sqrt{n^2 - 1} \cos(nx).$$

Ne segue che $a_0 = \frac{\pi}{4}$, $a_1 = -\frac{4}{\pi}$, e $a_{2k} = 0$ e $a_{2k+1} = -\frac{4}{\pi}\frac{1}{\sqrt{4k(1+k)}(2k+1)^2}$ per $k \in \mathbb{N}$, $k \leq 1$. Pertanto si ottiene:

$$u(x,t) = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2t}) - \frac{4}{\pi}te^{-t}\cos x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-t}\sin(\sqrt{4k(1+k)}\,t)}{\sqrt{4k(1+k)}(2k+1)^2}\cos((2k+1)x),$$

il termine generale della serie è maggiorato uniformemente rispetto a (t,x) in modulo da $1/(2k+1)^2$ che è termine generale di una serie convergente, quindi la serie converge totalmente, dunque uniformemente.

Svolgimento (Esercizio 3)**.** Il sistema può essere scritto nella forma:

$$\dot{z} = Az + B(t) \qquad \text{con } z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 4e^{5t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $\det A = -10 \neq 0$ quindi $Az = 0$ se e solo se $z = 0$. Pertanto le soluzioni stazionarie dell'omogeneo associato sono $x(t) = 0$ e $y(t) = 0$. Calcoliamo autovalori e autovettori di A: gli autovalori risolvono l'equazione $\lambda^2 - \operatorname{tr} A\,\lambda + \det A = 0$, ovvero $\lambda^2 - 3\lambda - 10 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda_1 = -2$ e $\lambda_2 = 5$. Tali valori sono reali di segno discorde, per cui le soluzioni stazionarie dell'omogeneo associato sono nodi instabili. Calcoliamo gli autovettori relativi agli autovalori:

$$0 = (A - \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})\begin{pmatrix} v_1^x \\ v_1^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^x \\ v_1^y \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene $3v_1^x + v_1^y = 0$, e possiamo scegliere $v_1 = (1, -3)$.

$$0 = (A - \lambda_2 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})\begin{pmatrix} v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix}$$

da cui si ottiene $-v_2^x + 2v_2^y = 0$, e possiamo scegliere $v_2 = (2, 1)$.
Sia P la matrice le cui colonne sono gli autovettori e P^{-1} la sua inversa ($\det P = 7 \neq 0$).

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/7 & -2/7 \\ 3/7 & 1/7 \end{pmatrix}$$

Posto $w = P^{-1}z$, e ricordando che $P^{-1}AP$ è la matrice che ha sulla diagonale gli autovalori di A e tutti gli altri valori pari a 0, si ottiene

$$\dot{w} = P^{-1}\dot{z} = P^1 Az + P^{-1}B(t) = P^{-1}AP^{-1}w + P^{-1}B(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} w + \begin{pmatrix} 4e^{5t}/7 \\ 12e^{5t}/7 \end{pmatrix}$$

Risolviamo quindi le due equazioni:

$$\begin{cases} \dot{w}_x &= -2w_x + 4e^{5t}/7, \\ \dot{w}_y &= 5w_y + 12e^{5t}/7. \end{cases}$$

La soluzione generale dell'omogenea associata all'equazione per w_x è $c_1 e^{-2t}$. Per trovare una soluzione particolare utilizziamo il metodo dei coefficienti indeterminati: dato che il temine noto è del tipo $e^{\alpha t}$ con $\alpha \neq -2$, cerchiamo una soluzione della forma Ae^{5t}. Sostituendo nell'equazione si ottiene $5Ae^{5t} + 2Ae^{5t} = 4e^{5t}/7$ da cui $A = 4/49$. Quindi si ha $w_x(t) = c_1 e^{-2t} + 4e^{5t}/49$. La soluzione generale dell'omogenea associata all'equazione per w_y è $c_2 e^{5t}$. Per trovare una soluzione particolare utilizziamo il metodo dei coefficienti indeterminati: dato che il temine noto è del tipo $e^{\alpha t}$ con $\alpha = 5$, cerchiamo una soluzione della forma Cte^{5t}. Sostituendo nell'equazione si ottiene $Ce^{5t} + 5Ce^{5t}t - 5Ce^{5t} = 12e^{5t}/7$ da cui $C = 12/7$. Quindi si ha $w_y(t) = c_2 e^{5t} + 12e^{5t}t/7$. Si ha $z = Pw$, per cui:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 e^{-2t} + 4e^{5t}/49 \\ c_2 e^{5t} + 12e^{5t}t/7 \end{pmatrix}$$

La soluzione è allora:

$$\begin{cases} x(t) &= c_1 e^{-2t} + \frac{4}{49}e^{5t} + 2c_2 e^{5t} + \frac{24}{7}e^{5t}t, \\ \\ y(t) &= -3c_1 e^{-2t} - \frac{12}{49}e^{5t} + c_2 e^{5t} + \frac{12}{7}e^{5t}t. \end{cases}$$

Svolgimento (Esercizio 4)**.**

(1) Si ha $\mathrm{div}(\vec{F})(x) = 12x^3 + 2z$ e $\mathrm{rot}(\vec{F})(x) = (-1, 0, 4)$.
(2) Si ha:

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \vec{F}\, ds &= \int_0^{2\pi} \vec{F} \circ \gamma(\theta)\dot{\gamma}(\theta)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (3\cos^4\theta + 2\sin\theta, 5\cos\theta, 0) \cdot (-\sin\theta, 2\cos\theta, 0)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(-3\cos^4\theta \sin\theta - 2\sin^2\theta + 10\cos^2\theta\right)\, d\theta \\ &= 8\pi.\end{aligned}$$

Infatti si ha:

$$\int_0^{2\pi} \cos^4\theta \sin\theta\, d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^4\theta \sin\theta\, d\theta = 0$$

perché l'integranda è 2π-periodica, dispari e nell'ultimo integrale si ha che l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine; inoltre per periodicità si ottiene

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin^2(\theta + \pi/2)\, d\theta = \int_{\pi/2}^{5/2\pi} \sin^2\sigma\, d\sigma = \int_0^{2\pi} \sin^2(\sigma)\, d\sigma,$$

che permette di calcolare:

$$2\pi = \int_0^{2\pi} (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, d\theta = 2\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\, d\theta.$$

Si può anche osservare che la curva assegnata è il bordo della superficie

$$C := \{(x, y, z) :\ z = 0,\ x^2 + y^2/4 \leq 1\}$$

orientata con normale $(0, 0, 1)$. Dal teorema di Stokes si ricava allora che:

$$\oint_\gamma \vec{F}\, ds = \int_C \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n}\, d\sigma = 4\mathrm{Area}(C) = 8\pi,$$

che conferma il calcolo precedente.
(3) La matrice Jacobiana della parametrizzazione è:

$$\mathrm{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin\theta(s^2+1) & 2s\cos\theta \\ (s+2)\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 3s^2 \end{pmatrix}.$$

Posti:

$$\begin{aligned} B_1 &= \begin{pmatrix} -\sin\theta(s^2+1) & 2s\cos\theta \\ (s+2)\cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix}, \\ B_2 &= \begin{pmatrix} -\sin\theta(s^2+1) & 2s\cos\theta \\ 0 & 3s^2 \end{pmatrix}, \\ B_3 &= \begin{pmatrix} (s+2)\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 3s^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

per il teorema di Binet l'elemento d'area risulta quindi:

$$\begin{aligned} d\sigma &= \left(\sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}\right)\, d\theta\, ds \\ &= \sqrt{9(s+2)^2\cos^2(t)s^4 + 9\left(s^2+1\right)^2\sin^2(t)s^4 + \left(2s(s+2)\cos^2(t) + (s^2+1)\sin^2(t)\right)^2}\, d\theta\, ds. \end{aligned}$$

(4) Si ha $\varphi(\pi/2, 1) = (0, 3, 1)$ e la normale indotta dalla parametrizzazione in tale punto vale:

$$\partial_\theta\varphi(\pi/2, 1) \wedge \partial_s\varphi(\pi/2, 1) = \det \left(\begin{array}{c|c} \hat{i} & \\ \hat{j} & \mathrm{Jac}\varphi \\ \hat{k} & \end{array}\right)_{(\theta,s)=(\pi/2,1)} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & -2 & 0 \\ \hat{j} & 0 & 1 \\ \hat{k} & 0 & 3 \end{pmatrix} = (0, 6, -2).$$

Si ha quindi $\hat{n}(0,3,1) = \frac{(0,6,-2)}{|(0,6,-2)|} = \frac{1}{2\sqrt{10}}(0,6,-2)$.

(5) Il flusso richiesto è:

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n}\, d\sigma &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \det \begin{pmatrix} -1 & -\sin\theta(s^2+1) & 2s\cos\theta \\ 0 & (s+2)\cos\theta & \sin\theta \\ 4 & 0 & 3s^2 \end{pmatrix} ds\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left(-3s^2(s+2)\cos\theta + 4(-(s^2+1)\sin^2\theta - 2s(s+2)\cos^2\theta))\right) ds\, d\theta \\ &= \int_0^1 -4\pi\left(3s^2+4s+1\right) ds = -16\pi.\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 5)**.** Cerchiamo soluzioni $u(t,x) = U(t)X(x)$, sostituendo nell'equazione si ha:

$$\dot{U}(t)X(x) - U(t)\ddot{X}(x) - 2U(t)\dot{X}(x) - U(t)X(x) = 0,$$

e supponendo che $u(t,x) = U(t)X(x) \neq 0$ per ogni (t,x) si ottiene dividendo per tale espressione:

$$\frac{\dot{U}(t)}{U(t)} - \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} - 2\frac{\dot{X}(x)}{X(x)} - 1 = 0,$$

ovvero:

$$\frac{\dot{U}(t)}{U(t)} = \frac{\ddot{X}(x) + 2\dot{X}(x)}{X(x)} + 1 = \lambda \in \mathbb{R},$$

Consideriamo a questo punto le equazioni:

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = \lambda U(t) \\ \ddot{X}(x) + 2\dot{X}(x) + (1-\lambda)X(x) = 0. \end{cases}$$

Dalle condizioni al contorno $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ per ogni $t > 0$, si ricava che $X(0) = X(\pi) = 0$, pertanto cerchiamo i $\lambda \in \mathbb{R}$ tali per cui vi sia soluzione non identicamente nulla per:

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) + 2\dot{X}(x) + (1-\lambda)X(x) = 0 \\ X(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

L'equazione caratteristica dell'equazione è $\mu^2 + 2\mu + 1 - \lambda = 0$, da cui si ricavano

$$\mu_1 = -1 - \sqrt{1-(1-\lambda)} = -1 - \sqrt{\lambda}, \qquad \mu_2 = -1 + \sqrt{\lambda}.$$

Quindi per $\lambda > 0$ si ottiene che l'equazione ammette al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ le soluzioni

$$X(x) = c_1 e^{\mu_1 t} + c_2 e^{\mu_2 t}.$$

Verifichiamo la compatibilità con i dati iniziali. Da $X(0) = 0$ si ricava che $c_1 + c_2 = 0$, e da $X(\pi) = 0$ si ha: $0 = c_1(e^{\mu_1\pi} - e^{\mu_2\pi})$. Poiché $\mu_1 \neq \mu_2$ si ottiene che l'unica possibilità è avere $c_1 = c_2 = 0$, quindi se $\lambda > 0$ l'unica soluzione compatibile è la soluzione identicamente nulla, non accettabile.
Se $\lambda = 0$, si ha $\mu_1 = \mu_2 = -1$. L'equazione ammette al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ le soluzioni

$$X(x) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}.$$

Verifichiamo la compatibilità con i dati iniziali. Da $X(0) = 0$ si ricava che $c_1 = 0$ e da $X(\pi) = 0$ si ottiene $c_2 \pi e^{-\pi} = 0$, quindi $c_2 = 0$ e si ottiene solo la soluzione identicamente nulla, non accettabile.
Studiamo ora il caso $\lambda < 0$ e poniamo $\omega = \sqrt{|\lambda|}$. Per $\lambda < 0$ si ottiene che le radici dell'equazione caratteristica sono $\mu_1 = -1 - i\omega$ e $\mu_2 = -1 + i\omega$, e quindi l'equazione ammette al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$ le soluzioni

$$X(x) = c_1 e^{-t} e^{-i\omega x} + c_2 e^{-x} e^{i\omega x} = e^{-x}\left(c_1 e^{-i\omega x} + c_2 e^{i\omega x}\right) = e^{-x}\left(d_1 \cos\omega x + d_2 \sin\omega x\right).$$

Verifichiamo la compatibilità con i dati iniziali: da $X(0) = 0$ si ottiene $d_1 = 0$ e da $X(\pi) = 0$ si ottiene $d_2 \sin\pi\omega = 0$. Poiché si cercano soluzioni non identicamente nulle, si ottiene $d_2 \neq 0$ e quindi $\omega = n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
In definitiva, si ottiene che $\lambda = -n^2$ al variare di $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e le soluzioni di:

$$\begin{cases} \ddot{X}_n(x) + 2\dot{X}_n(x) + (1-n^2)X_n(x) = 0 \\ X_n(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

sono tutte della forma $X_n(x) = d_n e^{-x} \sin nx$ al variare di $d_n \in \mathbb{R}$. L'equazione $\dot{U}_n(t) = -n^2 U(t)$ ammette come soluzione $U_n(t) = U_n(0)e^{-n^2 t}$. Poniamo $u_n(t,x) = U_n(t)X_n(x)$. Per ogni n, essa è una soluzione dell'equazione data soddisfacente $u_n(0,t) = u_n(\pi,t) = 0$ per ogni $t > 0$. Posto $b_n = U_n(0)d_n \in \mathbb{R}$ si ottiene per ogni $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ $u_n(t,x) = b_n e^{-n^2 t} e^{-x} \sin nx$. Cerchiamo di soddisfare il dato iniziale con una serie di tali funzioni. Cerchiamo i coefficienti b_n in modo che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = u(x,0)$ ovvero $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-x} \sin nx = x(\pi - x)e^{-x}$, quindi $x(\pi - x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$. Se ne deduce che i coefficienti b_n sono i coefficienti di Fourier della funzione ottenuta prolungando $x(\pi - x)$ a tutto $[-\pi, \pi]$ per disparità, e poi a tutto $\mathbb{R}$ per 2π-periodicità.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(-x^2 + \pi x)\sin nx\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos nx}{n}(-x^2 + \pi x)\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx(-2x + \pi)\,dx = \frac{2}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx(-2x + \pi)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi n}\left[\frac{\sin nx}{n}(-2x + \pi)\right]_0^{\pi} + \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx = \frac{4}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx \\
&= \frac{4}{\pi n^2}\left[-\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi n^3}(1 - (-1)^n)
\end{aligned}$$

Quindi $b_{2k} = 0$ e $b_{2k+1} = 8/(\pi(2k+1)^3)$ per $k \in \mathbb{N}$. Si ha allora:

$$u(t,x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-(2k+1)^2 t - x}\sin\big((2k+1)x\big).$$

Studiamo la convergenza della serie così ottenuta. Per ogni $t \geq 0$ e $x \in [0, \pi]$

$$\left|\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-(2k+1)^2 t - x}\sin\big((2k+1)x\big)\right| \leq \frac{1}{(2k+1)^3}$$

quindi

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sup_{\substack{t>0\\ x\in[0,\pi]}}\left|\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-(2k+1)^2 t - x}\sin\big((2k+1)x\big)\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3} < +\infty,$$

infatti il termine generale della serie di sinistra $(2k+1)^{-3} < 2^{-3}k^{-3} < 1/(8k^2)$, termine generale di una serie convergente. Pertanto la serie che definisce $u(t,x)$ converge totalmente, quindi uniformemente.

Svolgimento (Esercizio 6)**.** Posto $z = {}^T(x,y)$, $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ e $b(t) = {}^T(e^{3t}, 0)$ (dove il segno ^{T} indica il trasposto) si ha $\dot{z} = Az + b(t)$. Cerchiamo autovalori e autovettori di A. L'equazione degli autovalori è $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$, ossia $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$, quindi $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$. Poiché $\det(A) \neq 0$, si ha che $Az = 0$ se e solo se $z = {}^T(0,0)$. Pertanto l'unica soluzione stazionaria del sistema omogeneo associato è $x(t) = 0$, $y(t) = 0$, e poiché gli autovalori sono reali di segno discorde, si che ha tale punto è una sella, quindi un equilibrio instabile. Gli autovettori di A sono le soluzioni $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^2$ di $(A - \lambda_i \mathrm{Id})v_i = 0$, $i = 1, 2$, ossia $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} v_1 = 0$ da cui $v_1 = {}^T(2,1)$, e $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} v_2 = 0$ da cui $v_2 = {}^T(1,2)$. Definiamo quindi la matrice del cambiamento di base le cui colonne sono i vettori v_1, v_2 e la sua inversa:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Moltiplicando il sistema per P^{-1} e posto $P^{-1}z = w$, si ottiene:

$$\frac{d}{dt}w = P^{-1}\dot{z} = P^{-1}APw + P^{-1}b(t)$$

quindi

$$\begin{pmatrix} \dot{w}_1 \\ \dot{w}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + P^{-1}b(t) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2/3e^{3t} \\ -1/3e^{3t} \end{pmatrix}$$

Si ottengono quindi le equazioni $\dot{w}_1 = 2w_1 + 2/3e^{3t}$ e $\dot{w}_2 = -w_2 - 1/3e^{3t}$. Le omogenee associate hanno soluzione c_1e^{2t} e c_2e^{-t} al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Per cercare le soluzioni particolari, applichiamo il metodo dei coefficienti indeterminati osservando che e^{3t} non è soluzione delle omogenee associate. Cerchiamo quindi soluzioni particolari nella forma C_1e^{3t} per la prima e C_2e^{3t} per la seconda. Sostituendo, si ha $3C_1 = 2C_1 + 2/3$ da cui $C_1 = 2/3$ e $3C_2 = -C_2 - 1/3$ da cui $C_2 = -1/12$. Pertanto $w_1(t) = c_1e^{2t} + 2/3e^{3t}$ e $w_2(t) = c_2e^{-t} - e^{3t}/12$. Si ha infine:

$$z(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = Pw(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1e^{2t} + 2/3e^{3t} \\ c_2e^{-t} - e^{3t}/12 \end{pmatrix}$$

e pertanto la soluzione generale del sistema risulta:

$$\begin{cases} x(t) = 2c_1e^{2t} + 5/4e^{3t} + c_2e^{-t}, \\ \\ y(t) = c_1e^{2t} + 1/2e^{3t} + 2c_2e^{-t}, \end{cases}$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Svolgimento (Esercizio 7)**.**

(1) Posto $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{F} &= \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} = 4x^3z^2 - z\sin y \\ \operatorname{rot} \vec{F} &= \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \partial_x & F_1 \\ \hat{\jmath} & \partial_y & F_2 \\ \hat{k} & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \hat{\imath} & \partial_x & x^4z^2 \\ \hat{\jmath} & \partial_y & z\cos y \\ \hat{k} & \partial_z & x^2 + y^2 \end{pmatrix} = (2y - \cos y, 2x(x^3z - 1), 0) \end{aligned}$$

(2) La matrice Jacobiana di $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ è:

$$\operatorname{Jac} \varphi(u, v) = \begin{pmatrix} \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1 \\ \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2 \\ \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ve^u & e^u \\ 2u & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Indicate con B_1, B_2, B_3 le tre sottomatrici quadrate 2×2 di $\operatorname{Jac} \varphi(u, v)$, si ha:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} ve^u & e^u \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} ve^u & e^u \\ 2u & 0 \end{pmatrix}.$$

e l'elemento d'area risulta

$$\begin{aligned} d\sigma &= \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}\, du\, dv \\ &= \sqrt{(-2u)^2 + (-ve^u)^2 + (-2ue^u)^2}\, du\, dv \\ &= \sqrt{4u^2 + v^2e^{2u} + 4u^2e^{2u}}\, du\, dv. \end{aligned}$$

(3) Per il teorema di Stokes si ha che tale circuitazione è il flusso del rotore di $\vec{F}$ attraverso Σ. Posto $\mathrm{rot}\,\vec{F} = (G_1, G_2, G_3)$, si ha:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot ds &= \int_\Sigma \mathrm{rot}\,\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\det\left(\begin{array}{c|c} G_1\circ\varphi & \\ G_2\circ\varphi & \mathrm{Jac}\,\varphi \\ G_3\circ\varphi & \end{array}\right) du\,dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\det\begin{pmatrix} 2u^2-\cos u^2 & ve^u & e^u \\ -2ve^u(v^4e^{3u}+1) & 2u & 0 \\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} du\,dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\big(-2u(2u^2-\cos u^2)-2v^2e^{2u}(v^4e^{3u}+1)\big)\,du\,dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\big(-2e^{5u}v^6-2e^{2u}v^2-4u^3+2u\cos(u^2)\big)\,du\,dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\big(-2e^{5u}v^6-2e^{2u}v^2\big)\,du\,dv.
\end{aligned}$$

perché il termine $-4u^3+2u\cos(u^2)$ è dispari e integrato in un intervallo simmetrico rispetto all'origine. Sviluppando l'integrale si ha:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot ds &= 2\int_{-1}^{1}\left(\int_0^1\big(-2e^{5u}v^6-2e^{2u}v^2\big)\,dv\right)du = \int_{-1}^{1}\left(-\frac{4}{7}e^{5u}-\frac{4}{3}e^{2u}\right)du \\
&= -\frac{4}{35}(e^5-e^{-5})-\frac{2}{3}(e^2-e^{-2}) = -\frac{8\sinh(5)}{35}-\frac{4\sinh(2)}{3}.
\end{aligned}$$

Si poteva procedere anche nel modo seguente: il bordo di Γ è costituito dalla curva formata dalla giustapposizione delle quattro curve:

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= \varphi(-1,t) = (t/e, 1, -t), & \dot\gamma_1(t) &= (e^{-1}, 0, -1) \\
\gamma_2(t) &= \varphi(t,1) = (e^t, t^2, -1), & \dot\gamma_2(t) &= (e^t, 2t, 0) \\
\gamma_3(t) &= \varphi(1,-t) = (-te, -1, t), & \dot\gamma_3(t) &= (-e, 0, 1) \\
\gamma_4(t) &= \varphi(-t,-1) = (-e^{-t}, t^2, 1) & \dot\gamma_4(t) &= (e^{-t}, 2t, 0),
\end{aligned}$$

per $-1\le t\le 1$. Si ha quindi (ricordando che $\vec{F}(x,y,z) = (x^4z^2, z\cos y, x^2+y^2)$):

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\cdot ds &= \sum_{i=1}^{4}\int_{\gamma_i}\vec{F}\circ\gamma_i(t)\dot\gamma_i(t)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1}(t^6/e^4, -t\cos 1, t^2/e^2+1)\cdot(e^{-1},0,-1)\,dt + \int_{-1}^{1}(e^{4t}, -\cos t^2, e^{2t}+t^4)\cdot(e^t, 2t, 0)\,dt+ \\
&\quad + \int_{-1}^{1}(t^6e^4, t\cos(-1), t^2e^2+1)\cdot(-e,0,1)\,dt + \int_{-1}^{1}(e^{-4t}, \cos t^2, e^{-2t}+t^4)\cdot(e^{-t}, 2t, 0)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1}\Big((t^6e^{-5}-t^2e^{-2}-1)+(e^{5t}-2t\cos t^2)+(-t^6e^5+t^2e^2+1)+(e^{-5t}+2t\cos t^2)\Big)\,dt \\
&= \int_{-1}^{1}\left(e^{-5t}+e^{5t}-t^6e^5+t^2e^2-\frac{t^2}{e^2}+\frac{t^6}{e^5}\right)dt \\
&= \frac{4}{35}(e^5-e^{-5})+\frac{2}{3}(e^2-e^{-2}) = +\frac{8\sinh(5)}{35}+\frac{4\sinh(2)}{3}.
\end{aligned}$$

Per determinare se l'orientamento scelto per il bordo sia quello corretto, ovvero quello indotto dalla parametrizzazione, osserviamo come nello spazio dei parametri (u,v) in bordo del quadrato $[-1,1]\times[-1,1]$ venga percorso in senso orario, quindi negativo. Pertanto è necessario invertire il segno del risultato, che conferma così il risultato ottenuto con il Teorema di Stokes.

(4) si ha $\varphi(0,1/2) = (1/2, 0, -1/2)$. La normale indotta in tale punto è:

$$\partial_u\varphi(0,1/2) \wedge \partial_v\varphi(0,1/2) = \begin{pmatrix} \hat{i} & \partial_u\varphi_1 & \partial_v\varphi_1 \\ \hat{j} & \partial_u\varphi_2 & \partial_v\varphi_2 \\ \hat{k} & \partial_u\varphi_3 & \partial_v\varphi_3 \end{pmatrix}_{(0,1/2)} = \begin{pmatrix} \hat{i} & 1/2 & 1 \\ \hat{j} & 0 & 0 \\ \hat{k} & 0 & -1 \end{pmatrix} = (0, 1/2, 0),$$

da cui

$$\hat{n}(1/2, 0, -1/2) = \frac{\partial_u\varphi(0,1/2) \wedge \partial_v\varphi(0,1/2)}{|\partial_u\varphi(0,1/2) \wedge \partial_v\varphi(0,1/2)|} = \frac{(0,1/2,0)}{1/2} = (0,1,0).$$

(5) posto $\vec{H} = (H_1, H_2, H_3)$, il flusso di $\vec{H}$ attraverso Σ è dato da:

$$\begin{aligned}
\int_\Sigma \vec{H} \cdot \hat{n}\, d\sigma &= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det \left(\begin{array}{c|c} H_1 \circ \varphi & \\ H_2 \circ \varphi & \operatorname{Jac}\varphi \\ H_3 \circ \varphi & \end{array}\right) du\, dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det \begin{pmatrix} -v^2 e^u & ve^u & e^u \\ v^2u^2 & 2u & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} du\, dv \\
&= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \left(2uv^2e^u + v^3u^2e^u\right) du\, dv
\end{aligned}$$

Il termine con potenza dispari di v si annulla per disparità nell'integrazione su un intervallo simmetrico, e quindi

$$\int_\Sigma \vec{H} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 2uv^2e^u\, dv\, du = \frac{4}{3}\int_{-1}^{1} ue^u\, du = \frac{8}{3e}.$$

Svolgimento (Esercizio 8)**.** Cerchiamo soluzioni non nulle nella forma $u(t,x) = U(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione si ottiene $\dot{U}(t)X(x) - 5U(t)\ddot{X}(x) = 0$, da cui dividendo per $5U(t)X(x)$ si ha

$$\frac{\dot{U}(t)}{5U(t)} = \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottengono quindi le equazioni:

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = 5\lambda U(t), \\ \ddot{X}(x) = \lambda X(x), \end{cases}$$

da accoppiare con le condizioni iniziali $u_x(0,t) = U(t)\dot{X}(0) = 0$ e $u_x(\pi,t) = U(t)\dot{X}(\pi) = 0$ che porgono $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$. Studiamo quindi:

$$\begin{cases} \ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0, \\ \dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0 \end{cases}$$

L'equazione caratteristica è $\mu^2 - \lambda = 0$. Distinguiamo quindi i vari casi in base al segno del discriminante dell'equazione. Se $\lambda > 0$ abbiamo come radici $\mu = \pm\sqrt{\lambda}$ e le soluzioni dell'equazione data sono

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{\lambda}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{\lambda}\,x},$$

al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Derivando si ottiene:

$$\dot{X}(x) = c_1\sqrt{\lambda}e^{\sqrt{\lambda}\,x} - c_2\sqrt{\lambda}e^{-\sqrt{\lambda}\,x},$$

Valutando la derivata in 0 e ponendola pari a zero si ottiene $c_1 = c_2$, sostituendo questo fatto e valutando la derivata in π si ottiene che per soddisfare $\dot{X}(\pi) = 0$ si deve avere $c_1 = c_2 = 0$, ma la soluzione nulla non è accettabile.
Se $\lambda = 0$ l'equazione ha per soluzioni $X(x) = c_1 + c_2 x$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la cui derivata $\dot{X}(x) = c_1$. Si deve avere quindi $c_2 = 0$ e la soluzione risulta essere $X(x) = c_1$. Affinché tale soluzione sia accettabile, è necessario richiedere $c_1 \neq 0$.
Se $\lambda < 0$, posto $\omega = \sqrt{|\lambda|}$ l'equazione ha per soluzioni $X(x) = c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)$, la cui derivata è $\dot{X}(x) = -\omega c_1\sin(\omega x) + \omega c_2\cos(\omega x)$. Valutando tale derivata in 0 e in π e ponendola pari a zero si ricava $c_2 = 0$ e $\sin(\omega\pi) = 0$ da cui $\omega = \sqrt{|\lambda|} \in \mathbb{Z}$.

Il sistema pertanto ammette soluzioni accettabili solo per $\lambda = -n^2$, con $n \in \mathbb{N}$ e detta X_n la soluzione corrispondente a $\lambda = -n^2$, tali soluzioni sono date da $X_n(x) = c_1 \cos(nx)$. Tale scrittura comprende anche il caso $n = 0$.
L'equazione per U, ovvero $\dot{U}_n(t) = -5n^2 U_n(t)$ ha per soluzione $U_n(t) = U_n(0)e^{-5n^2 t}$, si ha quindi al variare di $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n(t,x) = U_n(t)X_n(x) = a_n e^{-5n^2 t} \cos(nx),$$

dove si è posto $a_n = U(0)c_1$, quindi $a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Cerchiamo di raggiungere il dato iniziale con una serie di queste soluzioni:

$$u(0,x) = 2x = \sum_{j=0}^{\infty} u_n(0,x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx),$$

quindi i coefficienti a_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di soli coseni della funzione $f(x) = 2x$, mentre a_0 è il doppio del coefficiente di ordine 0 dello sviluppo in serie di Fourier di f. Prolunghiamo quindi f per parità a tutto $[-\pi,\pi]$ e poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Si ha:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi 2x\,dx = \pi \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 2x\cos nx\,dx = \frac{4}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}\right]_0^\pi - \frac{4}{n\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx \\
&= \frac{4}{n^2\pi}[\cos(nx)]_0^\pi = 4\frac{(-1)^n - 1}{n^2\pi}
\end{aligned}$$

Quindi $a_0 = \pi$, $a_{2k} = 0$ e $a_{2k-1} = -8/(\pi(2k-1)^2)$ per $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$. La soluzione risulta quindi:

$$u(t,x) = \pi - \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-5(2k-1)^2 t}\cos\big((2k-1)x\big)}{(2k-1)^2}.$$

La serie converge totalmente quindi uniformemente, infatti si ha:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sup\left|\frac{e^{-5(2k-1)^2 t}\cos\big((2k-1)x\big)}{(2k-1)^2}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2} < +\infty,$$

(ad esempio per confronto con la serie di termine generale $1/k^2$).

Svolgimento (Esercizio 9)**.** Moltiplicando la prima equazione per 2 e sottraendo la seconda si ottiene $2x' - y' = 6t^2$, da cui $2x(t) - y(t) = 2t^3 + c_1$. Sostituendo, si ha $y' + 2(y + 2t^3 + c_1) - 6y = 0$ ossia $y' - 4y = -4t^3 - 2c_1$. L'omogenea associata è $y' = 4y$ che ha per soluzione $y(t) = c_2 e^{4t}$, per trovare la soluzione della non omogenea cerchiamo una soluzione particolare con il metodo dei coefficienti indeterminati nella forma $At^3 + Bt^2 + Ct + D$. Sostituendo nell'equazione, si ottiene: $A = 1$, $B = 3/4$, $C = 3/8$, $D = \frac{3}{32} + \frac{c_1}{2}$. Pertanto si ha:

$$\begin{aligned}
y(t) &= c_2 e^{4t} + t^3 + \frac{3}{4}t^2 + \frac{3}{8}t + \frac{3}{32} + \frac{c_1}{2}, \\
x(t) &= \frac{c_2}{2}e^{4t} + \frac{3}{2}t^3 + \frac{3}{8}t^2 + \frac{3}{16}t + \frac{3}{64} + \frac{3}{4}c_1.
\end{aligned}$$

Il sistema omogeneo associato, posto $z = (x,y)$ è $\dot{z} = Az$ con $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$. Essendo la seconda riga il doppio della prima, tale matrice ha determinante nullo. Le soluzioni stazionarie sono date da tutti i punti della retta $-2x + 3y = 0$. Gli autovalori risolvono l'equazione $\lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\,\lambda + \det(A) = 0$, ovvero $\lambda^2 - 4\lambda = 0$ ovvero $\lambda = 0$ e $\lambda = 4$. Pertanto si tratta di equilibri instabili.
Per la determinazione della soluzione, si poteva anche procedere nel modo seguente. Derivando la prima equazione si ottiene $\ddot{x} + 2\dot{x} - 3\dot{y} = 6t$. Dalla seconda equazione si ha $\dot{y} = 6y - 4x$, per cui sostituendo nella prima si ha $\ddot{x} + 2\dot{x} - 18y + 12x = 6t$. Dalla prima equazione si ha $3y = \dot{x} + 2x - 3t^2$, sostituendo si ha quindi $\ddot{x} + 2\dot{x} - 6\dot{x} - 12x - 18t^2 + 12x = 6t$, quindi l'equazione per la funzione $x(t)$ risulta essere $\ddot{x} - 4\dot{x} = 18t^2 + 6t$. L'omogenea associata è $\ddot{x} - 4\dot{x} = 0$, l'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda = 0$ che ha come soluzioni $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 4$, pertanto le soluzioni dell'omogenea associata sono $d_1 + d_2 e^{4t}$ al variare di $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$. Per risolvere l'equazione, utilizziamo il metodo dei coefficienti indeterminati e cerchiamo quindi una soluzione particolare

nella forma At^3+Bt^2+Ct+D. Sostituendo nell'equazione si ottiene $6At+2B-4(3At^2+2Bt+C) = 18t^2+6t$, da cui $A = 3/2$, $B = 3/8$, $C = 3/16$. Il valore della costante D è aribitrario, possiamo scegliere $D = 0$. Quindi si ottiene

$$\begin{cases} x(t) & = d_1 + d_2e^{4t} + \dfrac{3}{2}t^3 + \dfrac{3}{8}t^2 + \dfrac{3}{16}t, \\ \\ y(t) & = \dfrac{1}{3}(\dot{x} + 2x - 3t^2) = t^3 + \dfrac{3t^2}{4} + \dfrac{3t}{8} + 2d_2e^{4t} + \dfrac{2d_1}{3} + \dfrac{1}{16}. \end{cases}$$

Le soluzioni ottenute con i due differenti procedimenti sono equivalenti: basta infatti porre $2d_2 = c_2$ e $d_1 = 3/64 + 3/4c_1$, infatti in questo modo si ha $d_2 = c_2/2$ e $2/3d_1 + 1/16 = 1/32 + 1/2c_1 + 1/16 = 3/32 + c_1/2$, il che mostra l'equivalenza delle soluzioni.

Svolgimento (Esercizio 10)**.** Poniamo $\varphi(\theta, x) = (\varphi_1(\theta, x), \varphi_2(\theta, x), \varphi_3(\theta, x))$ e $\vec{F}(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$.

(1) Si ha:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{F}) &= \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = \frac{2x}{y^2+z^2+1} + 2y + 2xz, \\ \operatorname{rot}(\vec{F}) &= \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} \\ &= \left(2xy - 2z, -\frac{2x^2z}{(y^2+z^2+1)^2} - y^2 - z^2, \frac{2x^2y}{(y^2+z^2+1)^2} \right). \end{aligned}$$

Poiché $\operatorname{rot}(\vec{F}) \neq 0$, il campo non è conservativo.

(2) La circuitazione richiesta è:

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot ds = \int_0^{2\pi} \vec{F} \circ \gamma(\theta) \cdot \dot{\gamma}(\theta)\, d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{e^2+1}, e^2, e^2 \right) \cdot (0, -e\sin\theta, e\cos\theta)\, d\theta = 0.$$

(3) La matrice Jacobiana è:

$$\operatorname{Jac}(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -e^{x^2-1}\sin\theta & 2xe^{x^2-1}\cos\theta \\ e^{x^2-1}\cos\theta & 2xe^{x^2-1}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Per la formula di Binet, l'elemento di superficie 2-dimensionale è dato dalla somma dei quadrati dei determinanti delle sottomatrici 2×2 ovvero:

$$d\sigma = \sqrt{4x^2e^{4(x^2-1)} + e^{2(x^2-1)}}\, d\theta\, dx = e^{x^2-1}\sqrt{4x^2e^{2(x^2-1)} + 1}\, d\theta\, dx.$$

(4) Si ha $\varphi(\pi/2, 1) = (1, 0, 1)$, in questo punto si ha

$$\operatorname{Jac}(\varphi)(\pi/2, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

Dette v_1 e v_2 le colonne di tale matrice, si ha:

$$\hat{n}(1, 0, 1) = \frac{v_1 \wedge v_2}{|v_1 \wedge v_2|} = \frac{(-2, 0, 1)}{\sqrt{5}} = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5} \right).$$

(5) Il flusso richiesto è:

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{F}, S) &= \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} \det \begin{pmatrix} \frac{x^2}{e^{2(x^2-1)}+1} & 0 & 1 \\ e^{2(x^2-1)} & -e^{x^2-1}\sin\theta & 2xe^{x^2-1}\cos\theta \\ xe^{2(x^2-1)} & e^{x^2-1}\cos\theta & 2xe^{x^2-1}\sin\theta \end{pmatrix} dx\, d\theta \\ &= \int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} \left(e^{x^2+2(x^2-1)-1}x\sin(t) + e^{x^2+2(x^2-1)-1}\cos(t) - \frac{2e^{2x^2-2}x^3}{e^{2(x^2-1)}+1} \right) dx\, d\theta = 0. \end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 11)**.** Cerchiamo soluzioni non nulle nella forma $u(x,t) = U(t)X(x)$, sostituendo si ottiene

$$-\dot{U}(t)X(x) + 2U(t)\ddot{X}(x) + 3U(t)\dot{X}(x) + U(t)X(x) = 0$$

e dividendo per $U(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{-\dot{U}(t) + U(t)}{U(t)} = -\frac{2\ddot{X}(x) + 3\dot{X}(x)}{X(x)}$$

Si ottengono quindi le due equazioni ($\lambda \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} -\dot{U}(t) + (1-\lambda)U(t) = 0, \\ 2\ddot{X}(x) + 3\dot{X}(x) + \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Studiamo l'equazione per $X(x)$, la sua equazione caratteristica al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$ è $2\mu^2+3\mu+\lambda = 0$, il cui discriminante è $\Delta = 9-8\lambda$. Dalle condizioni al contorno, si ricava $u(0,t) = U(t)X(0) = 0$ per ogni t e $u(\pi,t) = U(t)X(\pi) = 0$ per ogni t, il che implica $X(0) = X(\pi) = 0$.
Se $\Delta > 0$, l'equazione caratteristica ammette le radici reali distinte λ_1 e λ_2, e l'equazione per $X(x)$ ammette come soluzione generale $X(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2e^{\lambda_2 x}$. Sostituendo, si ottiene $0 = c_1 + c_2$ dalla prima e quindi $X(x) = c_1(e^{\lambda_1 x} - e^{\lambda_2 x})$. Sostituendo $X(\pi) = 0$, si ha $0 = c_1(e^{\lambda_1\pi} - e^{\lambda_2\pi})$, ed essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$, si ottiene $c_1 = c_2 = 0$, soluzione non accettabile.
Se $\Delta = 0$, l'equazione caratteristica ammette la radice reale doppia λ_1, e l'equazione per $X(x)$ ammette come soluzione generale $X(x) = c_1e^{\lambda_1 x} + c_2xe^{\lambda_1 x}$. Sostituendo le condizioni al contorno si ha $c_1 = 0$ e $0 = c_2\pi e^{\lambda_1\pi}$, il che implica $c_2 = 0$ e anche questa soluzione non è accettabile. Supponiamo $\Delta < 0$, in tal caso l'equazione caratteristica ammette le radici complesse coniugate $\lambda_1 = \alpha+i\omega$ e $\lambda_2 = \alpha-i\omega$ dove $\alpha = -3/4$ e $\omega = \sqrt{|\Delta|}/4 \neq 0$. La soluzione generale dell'equazione è $X(x) = e^{\alpha x}(c_1\cos\omega x + c_2\sin\omega x)$, sostituendo le condizioni al contorno si ha $c_1 = 0$ e $0 = c_2e^{\alpha\pi}\sin\omega\pi$. Ciò implica $\omega \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$. In particolare, poiché $4\omega = \sqrt{|\Delta|}$ si deve avere $\omega = n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e quindi $16n^2 = -\Delta$ perché $\Delta < 0$, pertanto si ha $16n^2 = -9 + 8\lambda_n$ e $\lambda_n = (2n^2 - 9/8)$. Pertanto al variare di $n \in \mathbb{N}$ la soluzione relativa a λ_n è

$$X_n(x) = c_ne^{-3/4x}\sin nx.$$

Studiamo ora l'equazione per $U(t)$, essa è $-\dot{U} = (\lambda-1)U$, la cui soluzione generale è $U(t) = U(0)e^{-(\lambda-1)t}$. Sostituendo i valori di λ accettabili, ovvero i valori λ_n si ottengono soluzioni $U_n(t) = U_n(0)e^{-(2n^2+1/8)t}$. Poniamo $b_n = U_n(0)c_n$ e costruiamo le soluzioni elementari

$$u_n(x,t) = b_ne^{-(2n^2+1/8)t}e^{-3/4x}\sin nx.$$

Per coprire il dato iniziale si deve avere

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0),$$

da cui

$$\frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin nx.$$

pertanto i coefficienti b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie (di soli seni) della funzione

$$x \mapsto \frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|$$

definita su $[0,\pi]$ e prolungata per disparità a $[-\pi,\pi]$ e poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Pertanto i coefficienti b_n sono dati da:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|\right)\sin nx\,dx \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} x\sin nx\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Quindi la soluzione risulta essere:

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2}e^{-(2n^2+1/8)t}e^{-3/4x}\sin(nx).$$

Essa converge uniformemente, infatti si ha:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sup_{(x,t)\in[0,\pi]\times[0,+\infty[}\left|\frac{\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)}{n^2}e^{-(2n^2+1/8)t}e^{-3/4x}\sin(nx)\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \infty,$$

che prova la convergenza totale e quindi uniforme della serie.

Svolgimento (Esercizio 12)**.** Posto $z = (x,y)$, il sistema si riscrive nella forma $\dot{z} = Az + B(t)$ con

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Si ha $T = \operatorname{tr}(A) = -3$ e $D = \det(A) = -13$. L'equazione degli autovalori è $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$ ovvero $\lambda^2 + 3\lambda - 13 = 0$, che ammette come soluzioni i due autovalori reali

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}\left(-3-\sqrt{61}\right), \qquad \lambda_2 = \frac{1}{2}\left(-3+\sqrt{61}\right).$$

Poiché $D \neq 0$, l'unico punto di equilibrio per l'omogeneo associato è $(0,0)$, e poiché gli autovalori sono di segno discorde tale punto è una sella.

Riscrivendo il sistema dato, si ha: $\begin{cases} -3y = \dot{x} + 2x - 3e^{-2t} \\ \dot{y} = -5x - y \end{cases}$.

Derivando la prima equazione, si ottiene $-3\dot{y} = \ddot{x} + 2\dot{x} + 6e^{-2t}$.
Sostituiamo l'espressione di $\dot{y}$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$-3(-5x-y) = \ddot{x} + 2\dot{x} + 6e^{-2t}.$$

Riscrivendo tale espressione si ha $\ddot{x} + 2\dot{x} - 15x - 3y + 6e^{-2t} = 0$.
Sostituiamo l'espressione di y ottenuta dalla prima equazione:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 15x + (\dot{x} + 2x - 3e^{-2t}) + 6e^{-2t} = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x:

$$\ddot{x} + 2\dot{x} - 15x + \dot{x} + 2x - 3e^{-2t} + 6e^{-2t} = 0.$$

Tale equazione si riscrive come:

$$\ddot{x} - (-2-1)\dot{x} + (2-15)x - 3e^{-2t} + 6e^{-2t} = 0$$

In notazione compatta, si ha $\ddot{x} - T\dot{x} + D\,x = -3e^{-2t}$. L'omogenea associata ha soluzione generale $c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t}$ Cerchiamo una soluzione particolare di tale equazione con il metodo dei coefficienti indeterminati. Poiché -2 non è soluzione dell'equazione caratteristica, cerchiamo una soluzione nella forma qe^{-2t} con $q \in \mathbb{R}$. Sostituendo e semplificando e^{-2t}, si ottiene $4q - 6q - 13q = -3$ da cui $q = 1/5$, quindi si ottiene

$$x(t) = c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{5}e^{-2t}$$

Derivando, si ha:

$$\dot{x}(t) = c_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2e^{\lambda_2 t} - \frac{2}{5}e^{-2t}.$$

Si ha perciò:

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{3}\left(c_1\lambda_1e^{\lambda_1 t} + c_2\lambda_2e^{\lambda_2 t} - \frac{2}{5}e^{-2t} + 2\left(c_1e^{\lambda_1 t} + c_2e^{\lambda_2 t} + \frac{1}{5}e^{-2t}\right) - 3e^{-2t}\right) \\ &= \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{61}\right)t}\left(-\left(1+\sqrt{61}\right)c_1e^{\sqrt{61}t} + \left(\sqrt{61}-1\right)c_2 + 6e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{61}-1\right)t}\right). \end{aligned}$$

La soluzione del sistema è quindi:

$$\begin{cases} x(t) = c_1e^{-\frac{1}{2}\left(3-\sqrt{61}\right)t} + c_2e^{-\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{61}\right)t} + \frac{e^{-2t}}{5} \\ y(t) = \frac{1}{6}e^{-\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{61}\right)t}\left(-\left(1+\sqrt{61}\right)c_1e^{\sqrt{61}t} + \left(\sqrt{61}-1\right)c_2 + 6e^{\frac{1}{2}\left(\sqrt{61}-1\right)t}\right) \end{cases}$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Svolgimento (Esercizio 13)**.** Poniamo $\varphi(\theta, y) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ e $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

(1) Si ha:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{F} &= \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 0, \\
\operatorname{rot} \vec{F} &= \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & 3y^2 + 2z \\ \vec{e}_2 & \partial_y & 1 - 8x^3 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & 2x - 6y^2 \end{pmatrix} = (-12y, 0, -24x^2 - 6y).
\end{aligned}$$

Poiché il rotore non è nullo, il campo non è conservativo.

(2) Utilizziamo il teorema di Stokes: Γ è bordo di un'ellisse $\mathcal{E}$ appartenente al piano $z = 1$. La normale unitaria a tale ellisse sarà quindi $(0, 0, \pm 1)$. Parametrizziamo tale ellisse con $\psi(r, \theta) = (5r \cos\theta, 2r \sin\theta, 1)$, $0 \leq r \leq 1$, $\theta \in [0, 2\pi]$. Lo Jacobiano di tale parametrizzazione è

$$\operatorname{Jac}(\psi) = \begin{pmatrix} 5\cos\theta & -5r\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e l'elemento d'area risulta $d\sigma = \sqrt{(10r\sin^2\theta + 10r\cos^2\theta)^2} = 10r$. Si ha poi che la normale alla superficie in ogni punto concorde con l'orientamento di questa parametrizzazione dell'ellisse è

$$\hat{n}(\theta, 1) = \frac{1}{|d\sigma|} \det \begin{pmatrix} e_1 & -5\sin\theta & 5\cos\theta \\ e_2 & 2\cos\theta & 2\sin\theta \\ e_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (0, 0, 1).$$

Questa parametrizzazione dell'ellisse per la regola della mano destra induce lo stesso orientamento su Γ della parametrizzazione assegnata. Dal teorema di Stokes si ricava (sfruttando la simmetria del dominio):

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \vec{F} \cdot ds &= \int_{\mathcal{E}} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_{\mathcal{E}} (-24x^2 - 6y)\, d\sigma \\
&= -24 \int_{\mathcal{E}} x^2\, d\sigma = -24 \int_0^{2\pi} \int_0^1 25r^2 \cos^2\theta \cdot 10r\, dr\, d\theta = -1500\pi.
\end{aligned}$$

Per calcolo diretto si ha:

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \vec{F} \cdot ds &= \int_0^{2\pi} \vec{F} \circ \gamma(\theta) \cdot \dot{\gamma}(\theta)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (3(2\sin\theta)^2 + 2, 1 - 8(5\cos\theta)^3, 2(5\cos\theta) - 6(2\sin\theta)^2)(-5\sin\theta, 2\cos\theta, 0)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-60\sin^3\theta - 10\sin\theta + 2\cos\theta - 2000\cos^4\theta)\, d\theta = -2000 \int_0^{2\pi} \cos^4\theta\, d\theta = -1500\pi
\end{aligned}$$

che conferma il calcolo precedente.
Nell'ultimo passaggio si è sfruttato il fatto che:

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \cos^4\theta &= [\sin\theta \cos^3\theta]_0^{2\pi} + 3\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta = 3\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta \\
\int_0^{2\pi} \cos^4\theta &= \int_0^{2\pi} (1 - \sin^2\theta)\cos^2\theta\, d\theta = \pi - \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta,
\end{aligned}$$

pertanto:

$$\pi - \int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta = 3\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta$$

da cui

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta = \frac{\pi}{4}$$

e quindi $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^4\theta = \frac{3}{4}\pi$.

(3) La matrice Jacobiana è

$$\operatorname{Jac}\varphi(\theta,r) = \begin{pmatrix} -r\sin\theta & \cos\theta \\ r\cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -4r^3 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto vettoriale delle colonne di tale matrice è

$$\det\begin{pmatrix} e_1 & -r\sin\theta & \cos\theta \\ e_2 & r\cos\theta & \sin\theta \\ e_3 & 0 & -4r^3 \end{pmatrix} = (4r^4\cos\theta, 4r^4\sin\theta, -r).$$

L'elemento d'area è il modulo di tale prodotto vettoriale, quindi

$$d\sigma = r\sqrt{(16r^6+1)}.$$

(4) si ha $\phi(0,1/2) = (1/2, 0, 15/16)$. La normale è $\hat{n} = \frac{(-1/4,0,-1/2)}{\sqrt{1/16+1/4}} = \frac{\sqrt{5}}{5}(-1,0,-2)$

Consideriamo la superficie ausiliaria $C = \{(x,y,0) : x^2+y^2 \leq 1\}$. Si ha che $S \cup C$ è superficie chiusa che racchiude il volume V. Per il teorema della divergenza si ha che, orientando $S\cup C$ con la normale esterna a V:

$$0 = \int_V \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \int_{S\cup C} \vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma = \int_S \vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma + \int_C \vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma.$$

Pertanto, orientando S e C con la normale esterna a V si ottiene:

$$\int_S \vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma = -\int_C \vec{F}\cdot\hat{n}d\sigma.$$

La normale a C è $(0,0,-1)$. Dal punto precedente, si è visto come tale orientamento sia l'opposto di quello definito dalla parametrizzazione assegnata su S, infatti il vettore $\hat{n}$ è normale unitaria interna a V. Pertanto si ha, passando in coordinate polari piane:

$$\begin{aligned}\Phi(S,\vec{F}) &= \int_C \vec{F}\cdot(0,0,-1)\,d\sigma = -\int_C (2x-6y^2)\,dxdy = 6\int_C y^2\,dxdy \\ &= 6\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^3\sin^2\theta\,drd\theta = \frac{3}{2}\pi.\end{aligned}$$

Procedendo per calcolo diretto, si ha:

$$\begin{aligned}\Phi(S,\vec{F}) &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \det\begin{pmatrix} F_1\circ\varphi & -r\sin\theta & \cos\theta \\ F_2\circ\varphi & r\cos\theta & \sin\theta \\ F_3\circ\varphi & 0 & 4r^3 \end{pmatrix} dr\,d\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big(3(r\sin\theta)^2 + 2(1-r^4)\Big)4r^4\cos\theta\,dr\,d\theta + \\ &\quad + \int_0^{2\pi}\int_0^1 \Big(1-8(r\cos\theta)^3\Big)4r^4\sin\theta\,dr\,d\theta + \\ &\quad - \int_0^{2\pi}\int_0^1 r\Big(2(r\cos\theta) - 6(r\sin\theta)^2\Big)\,dr\,d\theta\end{aligned}$$

Il primo integrale è nullo perché $\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\cos\theta\,d\theta = 2\int_0^{\pi}\sin\theta\cos\theta\,d\theta = 2\int_1^{-1} t\,dt = 0$ (si ponga $t=\cos\theta$), il secondo perché l'integranda come funzione di θ è dispari e 2π-periodica.

$$\Phi(S,\vec{F}) = -\int_0^{2\pi}\int_0^1 -6r^3\sin^2\theta\,dr\,d\theta = \frac{3}{2}\pi,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 14)**.** Applichiamo il metodo di separazione delle variabili cercando soluzioni non nulle nella forma $u(x,t) = U(t)X(x)$. Dalle condizioni iniziali si ricava $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$ Sostituendo, si ottiene al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$-\ddot{U}(t)X(x) + 3U(t)\ddot{X}(x) = 0,$$

e dividendo per $U(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{-\ddot{U}(t)}{U(t)} = \frac{-3\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Si ha dunque il seguente sistema:

$$\begin{cases} -\ddot{U}(t) - \lambda U(t) = 0, \\ 3\ddot{X}(x) + \lambda X(x) = 0. \end{cases}$$

Risolviamo l'equazione in $X(x)$ accoppiata con i dati $X(0) = X(\pi) = 0$. L'equazione caratteristica è $3\mu^2+\lambda = 0$, il cui discriminante è $\Delta = -12\lambda$. Se $\Delta > 0$ allora necessariamente $\lambda < 0$, l'equazione caratteristica ammette due radici reali, distinte e non nulle. La soluzione generale è $X(x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x}$ la cui derivata è $\dot{X}(x) = c_1\mu_1 e^{\mu_1 x} + c_2\mu_2 e^{\mu_2 x}$. Sostituendo i dati $\dot{X}(0) = 0$ e $\dot{X}(\pi) = 0$ si otterrebbe il sistema (nelle incognite c_1 e c_2):

$$\begin{cases} c_1\mu_1 + c_2\mu_2 = 0 \\ c_1\mu_1 e^{\mu_1\pi} + c_2\mu_2 e^{\mu_2\pi} = 0 \end{cases}$$

Il determinante di tale sistema è $\mu_1\mu_2(e^{\mu_2\pi} - e^{\mu_1\pi}) \neq 0$, pertanto l'unica soluzione è $c_1 = c_2 = 0$ non accettabile.
Se $\Delta = 0$ allora necessariamente $\lambda = 0$ e $\mu_1 = 0$ è l'unica radice dell'equazione caratteristica. Si ha $X(x) = c_1 + c_2 x$ come soluzione generale, derivando si ha $\dot{X}(x) = c_2$ e sostituendo le condizioni date si ottiene $c_2 = 0$, pertanto si ottiene la soluzione accettabile $X(x) = c_1$, $c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Se $\Delta < 0$ allora necessariamente $\lambda > 0$ e si ottengono le radici complesse coniugate $\pm i\omega$ dove $\omega = \sqrt{\lambda/3}$. La soluzione generale è $X(x) = c_1\cos(\omega x) + c_2\sin(\omega x)$, derivando si ha $\dot{X}(x) = -\omega c_1\sin(\omega x) + \omega c_2\cos(\omega x)$ e sostituendo $\dot{X}(0) = 0$ si ha $c_2 = 0$, pertanto $X(x) = c_1\cos(\omega x)$. Affinché sia $\dot{X}(\pi) = 0$ si deve avere $\omega \in \mathbb{N}$ e per avere $\Delta < 0$ si deve avere $\omega \neq 0$, quindi $\lambda = 3n^2$, $n \neq 0$.
Si ha dunque $X_n(x) = c_n\cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$ che comprende le soluzioni accettabili per $\Delta \le 0$.
Risolviamo l'equazione per U corrispondente a $\lambda = 3n^2$, $n \in \mathbb{N}$, ovvero $\ddot{U}(t) + 3n^2U(t) = 0$ con la condizione iniziale $U(0) = 0$. Se $n = 0$ si ha la soluzione $U(t) = c_1 + c_2 t$ e sostituendo la condizione iniziale, si ottiene $U(t) = c_2 t$ Se $n \neq 0$, si ha che l'equazione caratteristica è $\mu^2 + 3n^2 = 0$, le cui soluzioni sono $\mu_1 = in\sqrt{3}$ e la complessa coniugata $\mu_2 = -in\sqrt{3}$, la soluzione generale pertanto è $U(t) = c_1\cos(n\sqrt{3}t) + c_2\sin(n\sqrt{3}t)$ e poiché $U(0) = 0$ si ha $c_1 = 0$, quindi $U_n(t) = d_n\sin(n\sqrt{3}t)$. Si ha quindi, posto $k_n = c_n d_n$,

$$u_0(x,t) = U(t)X(x) = k_0 t$$

$$u_n(x,t) = U(t)X(x) = k_n\sin(n\sqrt{3}t)\cos(nx)$$

da cui

$$\partial_t u_0(x,0) = k_0$$

$$\partial_t u_n(x,0) = n\sqrt{3}k_n\cos(nx)$$

Sviluppiamo il dato iniziale in serie di coseni

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi \sin(nx)\,dx = -\frac{2}{n^2\pi}(1-(-1)^n),$$

da cui

$$x = \frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^\infty \frac{1-(-1)^n}{n^2}\cos(nx).$$

Per confronto, si ha:

$$\partial_t u(x,0) = k_0 + \sum_{n=1}^\infty n\sqrt{3}k_n\cos(nx)$$

da cui si ottiene $k_0 = \pi/2$ e $n\sqrt{3}k_n = -\frac{2}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^2}$, quindi $k_n = -\frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^3}$. La soluzione è quindi:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{\pi}{2}t - \frac{2\sqrt{3}}{3\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{n^3}\sin(n\sqrt{3}t)\cos(nx) \\ &= \frac{\pi}{2}t - \frac{4\sqrt{3}}{3\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}\sin((2k+1)\sqrt{3}t)\cos((2k+1)x). \end{aligned}$$

Il termine generale della serie è maggiorato da $1/n^3$, termine generale di una serie convergente. Pertanto la serie converge totalmente, quindi uniformemente.

Svolgimento (Esercizio 15)**.** Poniamo $z(t) = (x(t), y(t))$, $A = \begin{pmatrix} -7/4 & 9/8 \\ 3/2 & -13/4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \sin(2t) \\ 0 \end{pmatrix}$. Il sistema diviene $\dot{z} = Az + B$. Calcoliamo gli autovalori di A, essi sono soluzioni di $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0$, ossia $\lambda^2 + 5\lambda + 4 = 0$. Quindi $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = -4$. Poiché $\det(A) = 4 \neq 0$ l'unica soluzione stazionaria dell'omogeneo associato è $x(t) = y(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, ed essendo gli autovalori con parte reale strettamente negativa l'origine è un nodo proprio stabile per l'omogeneo associato. Calcoliamo gli autovettori $v_1 = (v_1^x, v_1^y)$ e $v_2 = (v_2^x, v_2^y)$:

$$0 = (A - \lambda_1 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})v_1 = \begin{pmatrix} -3/4 & 9/8 \\ 3/2 & -9/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^x \\ v_1^y \end{pmatrix} \text{ da cui } -\frac{3}{4}v_1^x + \frac{9}{8}v_1^y = 0,$$
$$0 = (A - \lambda_2 \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2})v_2 = \begin{pmatrix} 9/4 & 9/8 \\ 3/2 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_2^x \\ v_2^y \end{pmatrix} \text{ da cui } \frac{9}{4}v_2^x + \frac{9}{8}v_2^y = 0.$$

Possiamo quindi prendere $v_1 = (3, 2)$ e $v_2 = (-1, 2)$. Pertanto si ha:

$$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \qquad P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 \\ -1/4 & 3/8 \end{pmatrix}$$

Si ha quindi, posto $w(t) = P^{-1}z(t)$, $w(t) = (w_x(t), w_y(t))$:

$$\dot{w} = \frac{d}{dt}(P^{-1}z) = P^{-1}\dot{z} = P^{-1}(Az + B) = P^{-1}(APw + B) = P^{-1}APw + P^{-1}B = Dw + P^{-1}B$$

dove $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$ è la matrice diagonale degli autovalori. Ciò equivale al seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{w}_x = -w_x + \frac{1}{4}\sin(2t) \\ \\ \dot{w}_y = -4w_y - \frac{1}{4}\sin(2t) \end{cases}$$

Risolviamo la prima equazione: l'omogenea è $\dot{w}_x + w_x = 0$, il polinomio caratteristico è $\mu - \lambda_1 = 0$, pertanto la soluzione generale dell'omogenea è $w_x(t) = c_1 e^{-t}$. Per trovare una soluzione particolare applichiamo il metodo dei coefficienti indeterminati, essendo il termine noto della forma $\sin(\alpha t)$. Poiché $2 = \alpha \neq \lambda_1 = -1$, cerchiamo una soluzione nella forma $A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t)$. Sostituendo e ricordando che $\alpha = 2$ si ottiene:

$$-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t) + A\cos(2t) + B\sin(2t) = \frac{1}{4}\sin(2t)$$

che implica $A + 2B = 0$ e $B - 2A = 1/4$, quindi $A = -2B$ e $B + 4B = 1/4$ per cui $B = 1/20$, $A = -1/10$. Pertanto:

$$w_x(t) = c_1 e^{-t} - \frac{1}{10}\cos(2t) + \frac{1}{20}\sin(2t).$$

Risolviamo la seconda equazione: l'omogenea è $\dot{w}_y + 4w_y = 0$, il polinomio caratteristico è $\mu - \lambda_2 = 0$, pertanto la soluzione generale dell'omogenea è $w_y(t) = c_2 e^{-4t}$. Per trovare una soluzione particolare applichiamo il metodo dei coefficienti indeterminati, essendo il termine noto della forma $\sin(\alpha t)$. Poiché $2 = \alpha \neq \lambda_1 = -4$, cerchiamo una soluzione nella forma $A\cos(\alpha t) + B\sin(\alpha t)$. Sostituendo e ricordando che $\alpha = 2$ si ottiene:

$$-2A\sin(2t) + 2B\cos(2t) + 4A\cos(2t) + 4B\sin(2t) = -\frac{1}{4}\sin(2t)$$

che implica $2B+4A=0$ e $-2A+4B=-1/4$, quindi $B=-2A$ e $B+4B=-1/4$ per cui $B=-1/20$, $A=1/40$. Pertanto:

$$w_y(t)=c_2e^{-4t}+\frac{1}{40}\cos(2t)-\frac{1}{20}\sin(2t).$$

Poiché $z(t)=Pw(t)$, si ottiene:

$$\begin{cases} x(t) &= 3w_x(t)-w_y(t)=3c_1e^{-t}-c_2e^{-4t}-\dfrac{13}{40}\cos(2t)+\dfrac{1}{5}\sin(2t) \\ \\ y(t) &= 2w_x(t)+2w_y(t)=2c_1e^{-t}+2c_2e^{-4t}-\dfrac{3}{20}\cos(2t). \end{cases}$$

Svolgimento (Esercizio 16)**.** Poniamo:

$$f(x,y)=(x^2+y^2-2x)^2-(x^2+y^2)$$

È utile osservare come $f(x,-y)=f(x,y)$ pertanto l'insieme è simmetrico rispetto all'asse delle ascisse.

(1) In coordinate polari si ha:

$$\begin{aligned} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) &= (\rho^2-2\rho\cos\theta)^2-\rho^2=\rho^2((\rho-2\cos\theta)^2-1) \\ &= \rho^2(\rho-2\cos\theta-1)(\rho-2\cos\theta+1) \end{aligned}$$

Quindi $\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ dove:

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta):\ \rho-2\cos\theta-1=0,\ \rho\geq 0,\ \theta\in[0,2\pi]\} \\ \Gamma_2 &= \{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta):\ \rho-2\cos\theta+1=0,\ \rho\geq 0,\ \theta\in[0,2\pi]\} \end{aligned}$$

e questa scrittura[1] comprende anche l'origine $(0,0)$.

(2) Poiché $f(0,0)=0$ si ha $(0,0)\in\Gamma$. Studiamo le intersezioni con l'asse delle y ponendo $x=0$: $f(0,y)=y^4-y^2=0$ quindi le intersezioni sono $O=(0,0)$, $P_1=(0,1)$, $P_2=(0,-1)$. Analogamente, studiamo le intersezioni con l'asse delle x ponendo $y=0$:

$$f(x,0)=(x^2-2x)^2-x^2=(x^2-2x-x)(x^2-2x+x)=x^2(x-3)(x-1),$$

quindi le intersezioni sono $P_3=(1,0)$, $P_4=(3,0)$ e $O=(0,0)$.
Calcoliamo il differenziale di f:

$$\begin{aligned} df(x,y) &= \partial_x f(x,y)\,dx+\partial_y f(x,y)\,dy \\ &= (4(x^2+y^2-2x)(x-1)-2x)\,dx+(4(x^2+y^2-2x)y-2y)\,dy. \end{aligned}$$

Si ha quindi $df(P_1)=-4\,dx+2\,dy$, pertanto esiste $q_1\in\mathbb{R}$ tale per cui la retta $-4x+2y=q_1$ sia tangente a Γ in P_1. Sostituendo si ha $q_1=2$ e la retta tangente è $y=2x+1$. Poiché Γ è simmetrico rispetto alle ascisse, e P_2 è il simmetrico rispetto a tale asse di P_1, si ha che la retta tangente a Γ in P_2 è la simmetrica rispetto all'asse delle ascisse di quella tangente in P_1, ovvero $y=-2x-1$. Si ha poi $df(P_3)=-2\,dx$, pertanto la tangente a Γ in questo punto è la retta verticale $x=1$, e analogamente si ha $df(P_4)=18\,dx$, pertanto la tangente a Γ in questo punto è la retta verticale $x=3$.

(3) Osserviamo che $\partial_y f(P_3)=\partial_y f(P_4)=0$, quindi in questi punti il Teorema di Dini non è applicabile (la tangente a Γ è verticale). Invece si ha $\partial_y f(P_1)=-\partial_y f(P_2)\neq 0$ e quindi per il Teorema di Dini esistono φ_1 e φ_2 con le proprietà richieste. Si ha che $\varphi_1'(0)$ e $\varphi_2'(0)$ sono i coefficienti angolari delle tangenti a Γ rispettivamente in P_1 e P_2, ovvero $\varphi_1'(0)=-\varphi_2'(0)=2$.

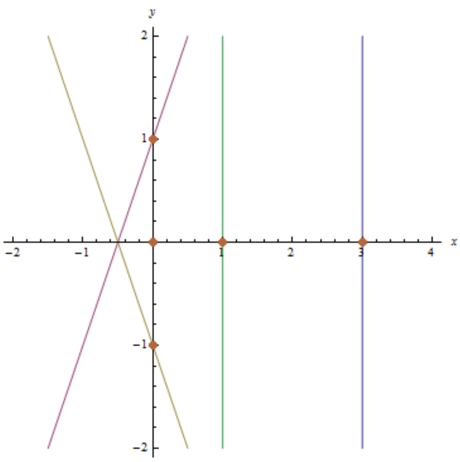
(4) Si ha $h(x,y)\geq 0$ e l'uguaglianza vale solo nell'origine. Quindi l'origine è l'unico minimo assoluto per h. Inoltre essa appartiene a Γ, quindi è l'unico minimo assoluto vincolato e $h(0,0)=0$. Studiamo i massimi e minimi vincolati di h su Γ_1 e su Γ_2 separatamente. In coordinate polari si ha che $h(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho$, Γ_1 è dato[2] da $\rho_1(\theta)=2\cos\theta+1$, $\rho_1\geq 0$ e Γ_2 è dato da $\rho_2(\theta)=2\cos\theta-1$, $\rho_2\geq 0$. Individuiamo il dominio in cui sono definite ρ_1 e ρ_2 alla luce della condizione $\rho\geq 0$. Si ha che ρ_1 è definito per $\cos\theta>-1/2$, quindi $\theta\in\mathrm{dom}(\rho_1):=[0,2\pi/3]\cup[4\pi/3,2\pi]$, mentre ρ_2 è definita per $\cos\theta>1/2$, quindi

[1] Era importante osservare come Γ in coordinate polari fosse espresso da *due rami differenti* ovvero da $|\rho-2\cos\theta|=1$. In generale non è lecito passare da $(\rho-2\cos\theta)^2=1$ a $\rho-2\cos\theta=1$, perché in questo modo si sta escludendo uno dei due rami. Ricordiamo che $\sqrt{a^2}=|a|$ per ogni $a\in\mathbb{R}$. Inoltre è *necessario* aggiungere la condizione $\rho\geq 0$, come risulterà evidente nel calcolo del massimo e minimo vincolato.

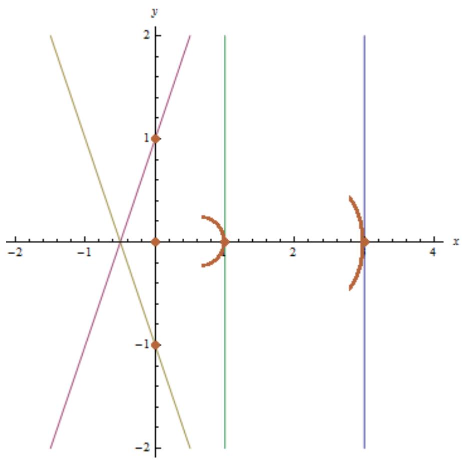
[2] Qui risulta fondamentale l'aver correttamente individuato i due rami e il richiedere comunque $\rho\geq 0$.

$\mathrm{dom}(\rho_2) := \theta \in [0, \pi/3] \cup [5/3\pi, 2\pi]$.
Se si sceglie di parametrizzare θ tra $-\pi$ e π (è assolutamente la stessa cosa), si ottiene $\mathrm{dom}(\rho_1) := [-2\pi/3, 2\pi/3]$ e $\mathrm{dom}(\rho_2) := [-\pi/3, \pi/3]$. Questa scelta che, ribadiamo, è perfettamente equivalente al parametrizzare θ tra 0 e 2π, presenta il vantaggio permettere una scrittura più semplice.
Si tratta di studiare i massimi e minimi delle funzioni ρ_1 e ρ_2 sotto i vincoli $\rho_1, \rho_2 \geq 0$, ovvero rispettivamente in $\mathrm{dom}(\rho_1)$ e in $\mathrm{dom}(\rho_2)$. Cominciamo con lo studiare tale funzioni nell'interno dei domini in cui sono definite. Si ha $\rho_1'(\theta) = \rho_2'(\theta) = -2\sin\theta$. Si ha $\rho_1'(\theta) = \rho_2'(\theta) \leq 0$ per $0 < \theta < \pi$ e l'uguaglianza vale per $\theta \in \{0, \pi\}$.
Osserviamo che $\pi \notin \mathrm{dom}(\rho_1)$ e $\pi \notin \mathrm{dom}(\rho_2)$, quindi π non è un valore accettabile: infatti si ha $\rho_1(\pi) = -1$ e $\rho_2(\pi) = -3$ non accettabile alla luce della condizione $\rho_1 \geq 0$ e $\rho_2 \geq 0$.
Per quanto riguarda 0, calcoliamo $\rho_1''(\theta) = \rho_2''(\theta) = -2\cos\theta$ e $\rho_1''(0) = \rho_2''(0) = -2 < 0$, quindi si ha che $\rho_1(0) = 3$ accettabile e massimo relativo, $\rho_2(0) = 1$ accettabile massimo relativo.
Rimangono da studiare i punti sulla frontiera dei domini: si ha $\rho_1(\pm 2\pi/3) = \rho_1(4\pi/3) = \rho_2(\pm\pi/3) = \rho_2(5\pi/3) = 0$. Tutti questi punti corrispondono quindi in coordinate cartesiane all'origine ($\rho = 0$ caratterizza l'origine) pertanto si ottiene nuovamente che l'origine è minimo assoluto. Il massimo assoluto è raggiunto nel punto corrispondente a $\rho_M = \rho_1(0)$ e $\theta_M = 0$, quindi è $(\rho_M \cos\theta_M, \rho_M \sin\theta_M) = (3, 0)$ e vale $h(3, 0) = 3$, l'altro massimo relativo è raggiunto nel punto corrispondente a $\rho_m = \rho_1(0)$ e $\theta_m = 0$, quindi è $(\rho_m \cos\theta_m, \rho_m \sin\theta_m) = (1, 0)$ e vale $h(1, 0) = 1$.
L'insieme Γ è chiuso perché f è continua e si è appena visto che è limitato perché contenuto nella palla chiusa centrata nell'origine e di raggio 3, quindi è compatto.

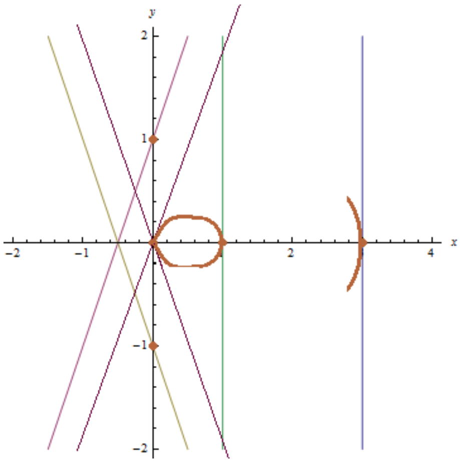
(5) Vogliamo ora dare un'idea dell'andamento qualitativo.



1. Ecco la situazione iniziale con i punti e le tangenti finora trovate.

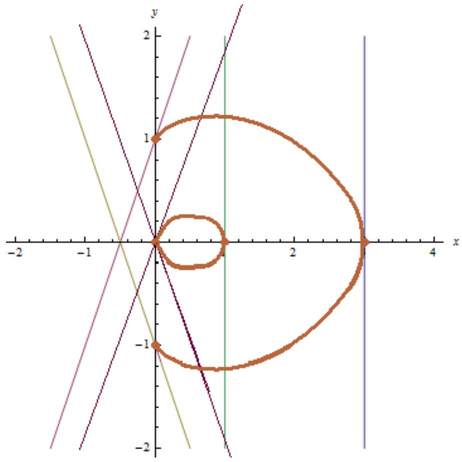


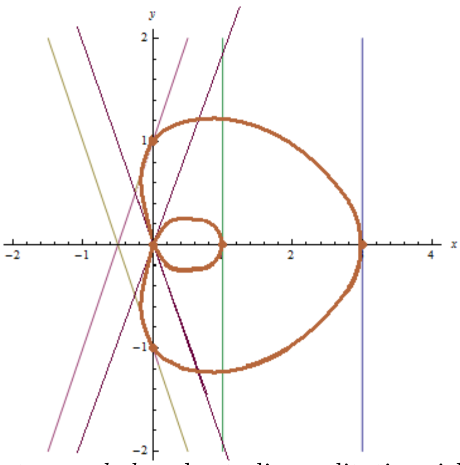
2. Vi è una simmetria rispetto all'asse x. Inoltre osserviamo che $(3, 0)$ è max. ass. per la distanza dall'origine. Non vi sono punti di Γ a dx della retta $x = 3$. Attorno a tale punto non si ha un'esplicitazione $y = y(x)$, però si ha un'esplicitazione $x = x(y)$. Analogamente $(1, 0)$ è massimo relativo per la distanza dall'origine, pertanto vicino a tale punto non vi sono punti a dx della retta $x = 1$, non si ha un'esplicitazione $y = y(x)$, però si ha un'esplicitazione $x = x(y)$.



3. Ricordiamo che il ramo corrispondente in coordinate polari a $\rho_2(\theta)$ raggiunge la sua massima distanza dall'origine proprio in $(1,0)$ e poi agli estremi del dominio, ovvero per $\theta = \pm\pi/3$ tale ramo ritorna in 0. Inoltre si ha sempre che $\rho_2 \leq \rho_1$. In figura sono riportate anche le due rette corripondenti ad un angolo di $\pm\pi/3$ con l'asse delle ascisse. Sfruttando la simmetria rispetto all'asse delle ascisse ci si porta nella situazione indicata.

4. Studiamo ora il ramo corrispondente a ρ_1. Poiché $\pm\pi/2 \in \mathrm{dom}(\rho_1)$, si ha che tale ramo congiunge il punto $(3,0)$ (massima distanza dall'origine) con i punti $(0,\pm1)$ che sono le uniche due intersezioni di Γ con l'asse delle ascisse. Tale ramo deve inoltre essere tangente alle due rette passanti per $(0,\pm1)$ Inoltre non può intersercare il ramo di ρ_2.





5. Partendo dai punti $(0,\pm1)$, sappiamo che il ramo ρ_1 deve ritornare nell'origine perché agli estremi del dominio di ρ_1 si ha $\rho_1 = 0$. Quindi si ha un cappio nell'origine, come ci si poteva attendere da $\nabla f(0,0) = (0,0)$.

Questo *concludeva* lo studio qualitativo richiesto dall'esercizio.
Con ulteriori calcoli, un po' lunghi ma non particolarmente complicati, si può essere ancora più precisi ed arrivare a tracciare un grafico più dettagliato.
Ribadiamo che comunque, questa parte, *esulava* dalle richieste dell'esercizio, la riportiamo solo per completezza.

Consideriamo una retta $x = k$, e studiamo il numero di soluzioni y dell'equazione $f(k,y) = 0$. Si ha

$$\begin{aligned} 0 = f(k,y) &= (k^2+y^2-2k)^2 - (k^2+y^2) \\ &= y^4 + (2k^2-4k-1)y^2 + (k^2-2k)^2 - k^2 \\ &= y^4 + (2k^2-4k-1)y^2 + k^2(k-3)(k-1) \end{aligned}$$

Posto $t = y^2$, cerchiamo soluzioni non negative di $p_k(t) = t^2 + (2k^2 - 4k - 1)t + k^2(k-3)(k-1) = 0$. Si ha $\lim_{t\to\pm\infty} p_k(t) = +\infty$ e $p_k(0) = k^2(k-3)(k-1)$. Si ha $p_k(0) > 0$ per $k < 1$ o $k > 3$.

(a) se $1 < k < 3$ l'equazione $p_k(t) = 0$ ammette due soluzioni distinte t^- e t^+ di segno discorde perché $p_k(0) < 0$ e $\lim_{t\to\pm\infty} p_k(t) = +\infty$. Sia $t^+ > 0$, allora si ottiene $y_1 = \sqrt{t^+}$ e $y_2 = -\sqrt{t^-}$. Dato $1 < x < 3$ esistono quindi $\varphi_1(x)$ e $\varphi_4(x)$, distinti, $\varphi_1(x) < 0 < \varphi_4(x)$ tali che $(x, y) \in \Gamma$ se e solo se $y \in \{\varphi_1(x), \varphi_4(x)\}$.

(b) se $k < 1$ o $k > 3$ ma $k \neq 0$, allora $p_k(0) > 0$, quindi le soluzioni reali di $p_k(y) = 0$, se esistono, sono entrambe strettamente positive o entrambe strettamente negative: se l'ascissa del vertice delle parabola $z = p_k(t)$ è positiva, allora se esistono sono entrambe strettamente positive, altrimenti o non esistono oppure sono entrambe strettamente negative. Le radici negative non sono accettabili. Tale ascissa è $z_k = -(2k^2 - 4k - 1)/2$. Si ha $z_k > 0$ per $\frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{6}\right) < k < \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{6}\right)$. Poiché

$$\frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{6}\right) < 0 < 1 < \frac{1}{2}\left(2 + \sqrt{6}\right) < 3,$$

si ottiene che se $p_k(y) = 0$ ammette radici reali, esse sono due radici strettamente positive per $\frac{1}{2}\left(2 - \sqrt{6}\right) < k < 0$ e per $0 < k < 1$.Il discriminante di $p_k(t) = 0$ è

$$\Delta = (2k^2 - 4k - 1)^2 - 4k^2(k-3)(k-1) = 1 + 8k.$$

Per $0 < k < 1$ e $-1/8 < k < 0$ tale discriminante è positivo, quindi si hanno due soluzioni strettamente positive. Pertanto per $k \in]0, 1[\cup] - 1/8, 0[$, la retta $x = k$ interseca Γ in quattro punti distinti, due a due simmetrici rispetto all'asse delle ascisse. Dato $\frac{1}{2}(2-\sqrt{6}) < x < 1$ esistono quindi $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \varphi_4(x)$, distinti, $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) < 0 < \varphi_3(x) < \varphi_4(x)$ tali che $(x, y) \in \Gamma$ se e solo se $y \in \{\varphi_i(x) : i = 1, 2, 3, 4\}$.

(c) per $k = 0$, si hanno le intersezioni con l'asse y, quindi $O = (0, 0)$, $P_1 = (0, 1)$, $P_2 = 0$. Poniamo $\varphi_1(0) = -1$, $\varphi_4(0) = 1$ e $\varphi_3(0) = \varphi_2(0) = 0$.

$$df(x, y) = (4(x^2 + y^2 - 2x)(x - 1) - 2x)\, dx + (4(x^2 + y^2 - 2x)y - 2y)\, dy$$

Si ha
   (i) $df(0, 0) = 0$, quindi in un intorno di $(0, 0)$ non è possibile applicare il Teorema di Dini.
   (ii) $df(0, 1) = -4\, dx + 2\, dy$ quindi in un intorno di $(0, 1)$ è possibile applicare il Teorema di Dini. In un intorno di tale punto φ_4 è di classe C^1 e $\varphi_4(0) = 1/2 > 0$
   (iii) $df(0, -1) = -4\, dx - 2\, dy$ quindi in un intorno di $(0, -1)$ è possibile applicare il Teorema di Dini. In un intorno di tale punto φ_1 è di classe C^1 e $\varphi_1(0) = -1/2 < 0$

(d) per $k = 1$, si ha $p_1(y) = y^2(y^2 - 3)$ da cui si ottengono le intersezioni $(1, 0)$, $(1, \sqrt{3})$ e $(1, -\sqrt{3})$. Poniamo $\varphi_3(0) = \varphi_2(0) = 0$, $\varphi_1(0) = -1$, $\varphi_4(0) = 1$.

(e) per $k = 3$, si ha $p_3(y) = y^2(y^2 + 11)$ da cui si ottiene la sola intersezione $(3, 0)$. Poniamo $\varphi_1(3) = \varphi_4(3) = 0$

(f) per $k = -1/8$ si ha $p_{-1/8}(y) = -(1/64) - y^2 + (17/64 + y^2)^2$ da cui si ottengono le due intersezioni $(-1/8, -\sqrt{15}/8)$ e $(-1/8, +\sqrt{15}/8)$. Poniamo $\varphi_4(-1/8) = \varphi_3(-1/8) = (-1/8, +\sqrt{15}/8)$ e $\varphi_1(-1/8) = \varphi_2(-1/8) = (-1/8, -\sqrt{15}/8)$

Le quattro funzioni φ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ sono due a due simmetriche rispetto all'asse delle ascisse. Inoltre la tangente a Γ nei punti (x, y) con $x \neq 0, 1, 3$ non è mai verticale. Per il teorema di Dini, queste funzioni sono quindi C^1 negli intervalli aperti che non contengano $x = 0, 1, 3$ e in cui siano definite. Per quanto visto al punto precedente, si ha che φ_1 e φ_4 sono C^1 all'interno di tutto il loro dominio.
Studiamo ora i massimi e minimi relativi di $y = \rho \sin\theta$ vincolati a Γ, ovvero i massimi e minimi delle funzioni $g_1(\theta) = 2 \sin\theta \cos\theta + \sin\theta = \sin 2\theta + \sin\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi/3] \cup [4\pi/3, 2\pi]$ e la funzione $g_2(\theta) = 2 \sin\theta \cos\theta - \sin\theta = \sin 2\theta - \sin\theta$ con $\theta \in [0, \pi/3] \cup [5/3\pi, 2\pi]$. Se h è nulla anche g_1 e g_2 sono nulle, quindi $g_1(2\pi/3) = g_1(4\pi/3) = g_2(\pi/3) = g_2(5\pi/3) = 0$. Si ha quindi

$$g_1'(\theta) = 2 \cos 2\theta + \cos\theta = 4 \cos^2\theta + \cos\theta - 2$$

che si annulla per

$$\cos\theta_1^* = \frac{1}{8}\left(-1 + \sqrt{33}\right), \qquad \cos\theta_2^* = -\frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{33}\right).$$

Si ha $\cos\theta_1^* > -1/2$, quindi θ_1^* è accettabile, $\cos\theta_2^* < -1/2$ non accettabile. Analogamente:

$$g_2'(\theta) = 2\cos 2\theta - \cos\theta = 4\cos^2\theta - \cos\theta - 2$$

che si annulla per

$$\cos\theta_3^* = \frac{1}{8}\left(1+\sqrt{33}\right), \qquad \cos\theta_4^* = \frac{1}{8}\left(1-\sqrt{33}\right).$$

Si ha $\cos\theta_3^* > 1/2$, quindi θ^*3 è accettabile, $\cos\theta_2^* < 1/2$ non accettabile. Posto $\rho_1^* = 2\cos\theta_1^* + 1$ e $\rho_3^* = 2\cos\theta_3^* - 1$, si ottengono quindi gli unici punti critici:

$$x_1 = \rho_1^*\cos\theta_1^* = \left(2\left(\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{33}\right)\right)+1\right)\frac{1}{8}\left(-1+\sqrt{33}\right) = \frac{15+\sqrt{33}}{16}$$

$$x_3 = \rho_3^*\cos\theta_3^* = \left(2\left(\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{33}\right)\right)-1\right)\frac{1}{8}\left(1+\sqrt{33}\right) = \frac{15-\sqrt{33}}{16}.$$

Vogliamo ora stabilire una corrispondenza tra le curve $\rho_1(\theta)$ e $\rho_2(\theta)$ e le curve $\varphi_i(x)$, $i = 1,2,3,4$. A tal proposito ricordiamo che $\varphi_4(x)$ è sempre maggiore di $\varphi_3(x) > 0$, e che φ_1 e φ_2 sono le simmetriche di φ_4 e φ_3 rispetto all'asse delle asccisse. Quindi, nel primo quadrante laddove esistono entrambe le curve in coordinate polari $\rho_1(\theta)$ e $\rho_2(\theta)$, la curva tra le due che in coordinate cartesiane ha l'ordinata maggiore rappresenterà φ_4 e l'altra rappresenterà φ_3. Ricordo che l'ordinata è data da $\rho_1(\theta)\sin\theta$ e $\rho_2(\theta)\sin\theta$.

Osserviamo che se $\theta \in [0,\pi] \cap \mathrm{dom}(\rho_1) \cap \mathrm{dom}(\rho_2)$, si ha $\rho_1(\theta)\sin\theta > \rho_2(\theta)\sin\theta$. Quindi nei punti del primo quadrante la curva $\rho_1(\theta)$ descrive φ_4 e la curva ρ_2 descrive φ_3. Per cui x_1^* è punto critico di φ_4, e quindi anche della sua simmetrica φ_1, e x_3^* è punto critico di φ_3, e quindi anche della sua simmetrica φ_2. Si ha che $\varphi_3(0) = \varphi_3(3) = 0$, $\varphi_3(x) > 0$ in $]0,1[$, e φ_3 ha un solo punto critico, tale punto deve essere di massimo relativo per φ_3 e quindi di minimo relativo per φ_2.

Poiché $x_1^* > 0$ e $\varphi_4(0) > 0$ si ha che x_1^*, unico punto critico per $0 < x < 3$, deve essere un massimo assoluto per φ_4 e simmetricamente un minimo assoluto per φ_1.

Determiniamo esattamente i valori di x^* e y^*:

(a) Sostituendo nell'equazione per determinare i valori del massimo, si ha:

$$0 = f(x_1^*, y) = \frac{-3(693+283\sqrt{33}) - 128(175+\sqrt{33})y^2 + 8192y^4}{8192}$$

che ha come soluzioni reali (si pone $y = t^2$ e si sceglie l'unica soluzione t positiva. Allora $y = \pm\sqrt{t}$)

$$\varphi_1(x_1^*) = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69+11\sqrt{33}\right)}, \qquad \varphi_4(x_1^*) = \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69+11\sqrt{33}\right)}.$$

(b) Sostituendo il valore di x_2^*, si ha:

$$0 = f(x_2^*, y) = \frac{8192y^4 + 128\left(\sqrt{33}-175\right)y^2 + 849\sqrt{33} - 2079}{8192}.$$

Con la sostituzione $y^2 = t$ si ottiene un'equazione di secondo grado in t che ha due radici positive. I valori di $\varphi_2(x_2^*)$ e $\varphi_3(x_3^*)$ sono i valori dati da $\pm\sqrt{t}$ dove t è la radice di modulo minimo dell'equazione: infatti l'altra radice dà luogo ai valori di $\varphi_1(x_2^*)$ e $\varphi_4(x_2^*)$ (che infatti in modulo sono strettamente maggiori dei precedenti).

$$\varphi_2(x_3^*) = -\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69-11\sqrt{33}\right)}, \qquad \varphi_3(x_3^*) = +\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69-11\sqrt{33}\right)}.$$

In figura le rette verticali da sinistra a destra sono:

(a) la retta $x = -1/8$, tangente a Γ nei punti $(-1/8, \pm\sqrt{15}/8)$. Non vi sono punti di Γ con ascissa strettamente minore di $-1/8$;

(b) la retta $x = 0$, che interseca Γ nei punti $(0,0)$, $(0,\pm 1)$;

(c) la retta $x = \frac{15-\sqrt{33}}{16}$ che interseca Γ in quattro punti, i due punti più vicini all'asse delle ascisse sono estremali per le funzioni implicitamente definite da γ passanti per essi, tali punti sono $\left(\frac{15-\sqrt{33}}{16}, \pm\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69-11\sqrt{33}\right)}\right)$;

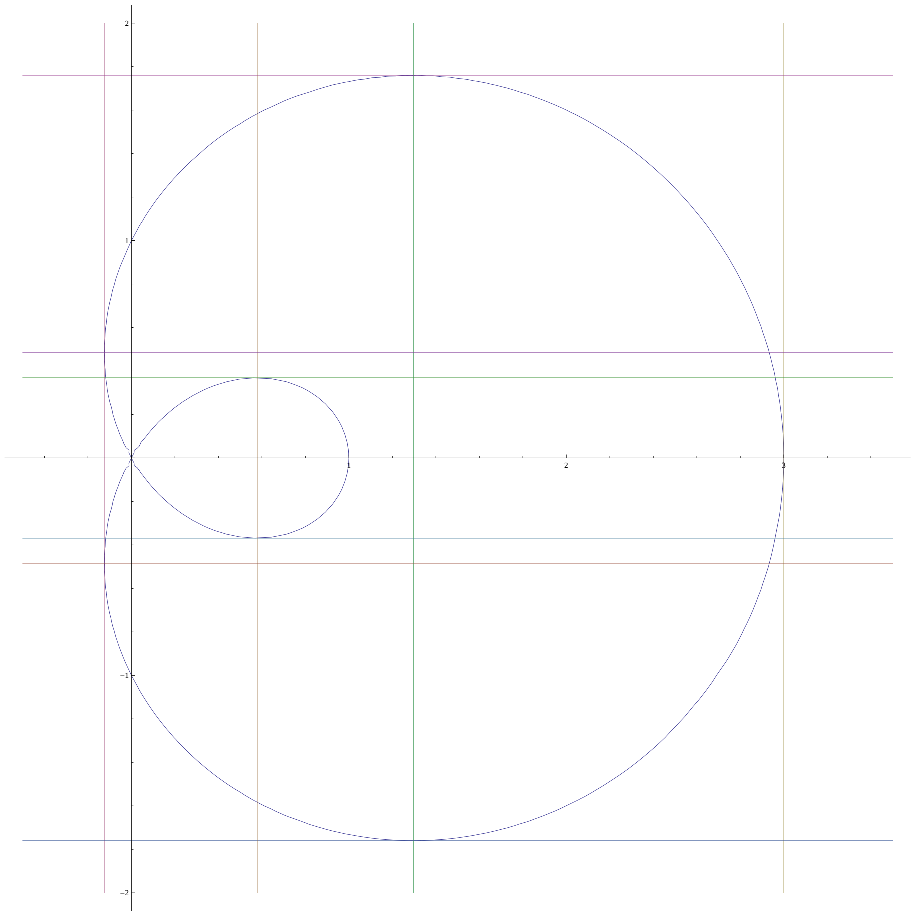


FIGURA 1. La *Chiocciola di Pascal* e alcune rette significative

(d) la retta $x = \frac{15+\sqrt{33}}{16}$ che interseca Γ in due punti, esso sono i punti di ordinata massima e minima appartenenti a Γ, e sono $\left(\frac{15+\sqrt{33}}{16}, \pm\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69+11\sqrt{33}\right)}\right)$.

(e) la retta $x = 3$, tangente a Γ nell'unico punto $(3, 0)$. Non vi sono punti di Γ con ascissa strettamente maggiore di 3.

La *Chiocciola di Pascal* è quindi inscritta nel rettangolo

$$R = [-1/8, 3] \times \left[-\frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69+11\sqrt{33}\right)}, \frac{1}{8}\sqrt{\frac{3}{2}\left(69+11\sqrt{33}\right)}\right].$$

Osservazione 1. Nella seconda versione del compito, l'insieme era dato da

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 + 2x)^2 = x^2 + y^2\}.$$

Pertanto tale insieme è il simmetrico rispetto all'asse delle ascisse di quello studiato nell'esercizio precedente, quindi tutti i risultati dell'esercizio precedente valgono in questo caso qualora si mandi x in $-x$, y rimanga invariato, e in coordinate polari si mandi θ in $\pi - \theta$ (quindi $\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$ e $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$).

Svolgimento (Esercizio 17)**.** La retta $y = x$ e l'iperbole $xy = 1$ si incontrano nel primo quadrante solo nel punto $(1, 1)$, inoltre per $x \in]0, 1[$ si ha $1/x > x$. Il dominio D è normale rispetto all'asse x, decomponiamolo nelle due parti $D \cap \{(x,y) : 0 < x < 1\}$ e $D \cap \{(x,y) : x > 1\}$. Si ha:

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \iint_D \frac{1}{x^\alpha}\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^x \frac{1}{x^\alpha}\,dy\right)dx + \int_1^{+\infty}\left(\int_0^{1/x}\frac{1}{x^\alpha}\,dy\right)dx \\ &= \int_0^1 x^{1-\alpha}\,dx + \int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Se $\alpha \leq 0$ il secondo integrale vale $+\infty$, mentre il primo è sempre maggiorato da 1 perché l'integranda è minore o uguale a 1 e l'intervallo di integrazione ha lunghezza 1, quindi $I(\alpha) = +\infty$ se $\alpha \leq 0$.
Se $\alpha \geq 2$ il primo integrale vale $+\infty$, mentre il secondo è finito quindi $I(\alpha) = +\infty$ se $\alpha \geq 2$.
Per $0 < \alpha < 2$ entrambi gli integrali sono convergenti, inoltre se $0 < \alpha < 2$ non si ha mai $1 - \alpha = -1$ oppure $1 + \alpha = 1$, e quindi

$$I(\alpha) = \frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha}.$$

Altro modo per procedere, consideriamo il dominio D normale rispetto all'asse delle y. Fissiamo $y \in [0,1]$. Allora x varia tra y e $1/y$, quindi:

$$I(\alpha) = \int_0^1 \left(\int_y^{1/y} \frac{1}{x^\alpha}\,dx\right)dy$$

Si ha allora

$$\begin{aligned} I(1) &= \int_0^1 \left(\int_y^{1/y}\frac{1}{x}\,dx\right)dy = \int_0^1 (\log(1/y) - \log(y))\,dy = -2\int_0^1 \log(y)\,dy = -2[y\log y - y]_0^1 \\ &= 2 + 2\lim_{y\to 0^+}(y\log y - y) = 2 < +\infty. \end{aligned}$$

Supponiamo ora $\alpha \neq 1$, si ha:

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_0^1 \left(\int_y^{1/y}\frac{1}{x^\alpha}\,dx\right)dy = \frac{1}{-\alpha+1}\int_0^1 [x^{-\alpha+1}]_{x=y}^{x=1/y} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 (y^{\alpha-1} - y^{-\alpha+1})\,dy = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \left(y^{\alpha-1} - \frac{1}{y^{\alpha-1}}\right)dy \end{aligned}$$

Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 2$ si ottiene

$$I(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{\alpha}y^\alpha - \frac{1}{2-\alpha}y^{-\alpha+2}\right]_\varepsilon^1$$

Se $\alpha < 0$ o $\alpha > 2$ il limite risulta $+\infty$. Inoltre:

$$\begin{aligned} I(0) &= \int_0^1 \left(\int_y^{1/y} dx\right)dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{y} - y\right)dy = +\infty, \\ I(2) &= -\int_0^1 (y - y^{-1})\,dy = +\infty \end{aligned}$$

Per $0 < \alpha < 2$ si ottiene invece:

$$I(\alpha) = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2-\alpha}\right) = \frac{1}{2-\alpha} + \frac{1}{\alpha},$$

che conferma il risultato precedente.

Osservazione 2. Nella seconda versione del compito, si aveva come D la regione illimitata del primo quadrante compresa tra l'iperbole di equazione $xy = 1$, la retta $y = x$ e l'asse delle y e si calcolava

$$\iint_D \frac{1}{y^\alpha}\,dx\,dy.$$

Rispetto alla versione dell'esercizio precedente si è applicata una simmetria rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante. Il risultato e il procedimento sono gli stessi: si scambi semplicemente x con y.

Svolgimento (Esercizio 18)**.** Maggioriamo il termine generale della serie in modo appropriato. Si ha:

$$\left|\frac{(\sqrt{5}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}}e^{-4t}\cos(nx)\right| \leq \left|\frac{(\sqrt{5}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}}\right| = \frac{2}{\sqrt{5}}\left|\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^n\right| = \frac{2}{\sqrt{5}}\left|\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right|^n$$

Poiché $|(\sqrt{5}-3)/2| < 1$, la serie geometrica di ragione $(\sqrt{5}-3)/2$ è convergente[3] e si ha

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\sqrt{5}-3}{2}} - 1 = \frac{\sqrt{5}-3}{5-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-5}{10} < +\infty.$$

Pertanto l'estremo superiore del termine generale è in modulo maggiorato dal termine generale di una serie convergente, quindi la serie converge totalmente e di conseguenza uniformemente e puntualmente su $[0,1]\times[0,2\pi]$, e la sua somma per $(t,x)=(0,0)$ è proprio $\dfrac{2}{\sqrt{5}}\dfrac{\sqrt{5}-3}{5-\sqrt{5}} = \dfrac{2}{5}\dfrac{\sqrt{5}-3}{\sqrt{5}-1} = \dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Osservazione 3. Nella seconda versione del compito, la serie era data da

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\sqrt{7}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}}e^{-12t}\cos(nx).$$

Esattamente come prima si riconosce che $|(\sqrt{7}-3)/2| < 1$, e vale la maggiorazione

$$\left|\frac{(\sqrt{7}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}}e^{-12t}\cos(nx)\right| \leq \left|\frac{(\sqrt{7}-3)^n}{2^{n-1}\sqrt{5}}\right| = \frac{2}{\sqrt{5}}\left|\left(\frac{\sqrt{7}-3}{2}\right)^n\right|$$

Ancora come prima si ottiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{7}-3}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{\sqrt{7}-3}{2}} - 1 = \frac{\sqrt{7}-4}{9} < +\infty.$$

Si ha ancora convergenza totale, uniforme e puntuale e la somma per $(t,x)=(0,0)$ vale $\dfrac{2}{\sqrt{5}}\dfrac{\sqrt{7}-4}{9}$.

Svolgimento (Esercizio 19)**.** Poniamo $\vec{F}(x,y,z) = (F_1,F_2,F_3)$.

(1) Si ha:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) &= \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 0,\\ \operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \partial_x & F_1\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3\end{pmatrix} = \vec{e}_1(\partial_y F_3 - \partial_z F_2) + \vec{e}_2(\partial_z F_1 - \partial_x F_3) + \vec{e}_3(\partial_x F_2 - \partial_y F_1)\\ &= (3+2y, -12x+2z, -1+8x).\end{aligned}$$

Il rotore non è nullo, per cui il campo non è conservativo.

(2) La curva γ è il bordo del cerchio D centrato in $(0,2,0)$ di raggio 5 contenuto nel piano $y=2$. La normale unitaria a D è costante e vale $\hat{n}(D) = (0,\pm1,0)$. Determiniamo il verso positivo dell'orientamento della normale indotta dalla parametrizzazione: si deve avere per la regola della mano destra $\hat{n}(D) = (0,-1,0)$. Altro modo: un osservatore con i piedi su D vede il bordo $\gamma(t)$ percorso in senso antiorario solo se il vettore che va dai suoi piedi alla testa è parallelo e concorde a $\hat{n}(D)$. Per il teorema di Stokes si ha:

$$\oint_\gamma \vec{F}\,d\ell = \int_D \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma,$$

nel nostro caso si ha che tali integrali sono:

$$\int_D \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_D (12x-2z)\,d\sigma = 0$$

[3]Ricordiamo che se $q\in\mathbb{C}$, $|q|<1$ si ha $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$, tuttavia nell'esercizio la somma non parte da 0 ma da 1, quindi $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = q^0 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} q^n$ da cui $\sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} - 1$.

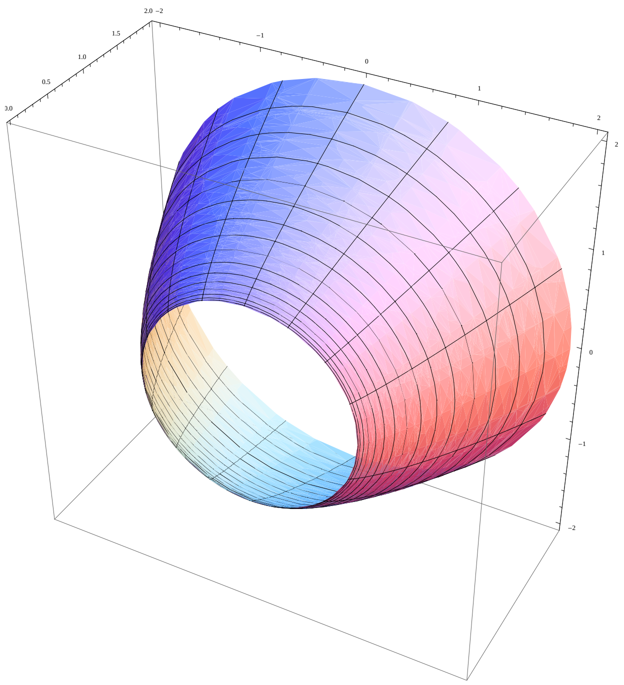


FIGURA 2. La superficie S.

perché D è simmetrico rispetto alla sostituzione $x \mapsto -x$, $y \mapsto y$ e $z \mapsto -z$ e l'integranda è dispari rispetto alla medesima sostituzione.
Verifichiamo il risultato ottenuto per calcolo diretto:

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \vec{F}\,d\ell &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\gamma(t))\dot\gamma(t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} (2+25\sin^2 t, 100\cos^2 t - 15\sin t, 150\cos^2 t + 4)\cdot(-5\sin t, 0, 5\cos t)\,dt\\ &= \int_0^{2\pi} (-10\sin t - 125\sin^3 t + 750\cos^3 t + 20\cos t)\,dt = 0,\end{aligned}$$

per le simmetrie di seno e coseno e la periodicità.

(3) Si ha

$$\operatorname{Jac}\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} 2r\cos(\theta) & -\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\\ 3r^2+2r & 0\\ 2r\sin(\theta) & \left(r^2+1\right)\cos(\theta)\end{pmatrix}.$$

Posto:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2r\cos(\theta) & -\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\\ 3r^2+2r & 0\end{pmatrix}, \qquad \det A_1 = r\left(3r^3+2r^2+3r+2\right)\sin(\theta), \tag{1}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2r\cos(\theta) & -\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\\ 2r\sin(\theta) & \left(r^2+1\right)\cos(\theta)\end{pmatrix}, \qquad \det A_2 = 2r(1+r^2), \tag{2}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 3r^2+2r & 0\\ 2r\sin(\theta) & \left(r^2+1\right)\cos(\theta)\end{pmatrix}, \qquad \det A_3 = r\left(3r^3+2r^2+3r+2\right)\cos(\theta), \tag{3}$$

Per il Teorema di Binet si ha:

$$d\sigma = \sqrt{\det^2 A_1 + \det^2 A_2 + \det^2 A_3}\,dr\,d\theta = r(r^2+1)\sqrt{9r^2+12r+8}.$$

(4) Dobbiamo trovare $(r,\theta) \in]0,1[\times]0,2\pi[$ tali per cui $\varphi(r,\theta) = (5/4, 3/8, 0)$ ossia:

$$\begin{cases} ((r^2+1)\cos\theta = 5/4, \\ r^3 + r^2 = 3/8, \\ (r^2+1)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Dall'ultima relazione si ha $\theta = 0$ oppure $\theta = \pi$. Sostituendo nella prima, si ha che $\theta = 0$ e $r^2+1 = 5/4$, quindi $r = 1/2$. Dette $\partial_r\varphi$ e $\partial_\theta\varphi$ le colonne di $\operatorname{Jac}\varphi$, si ha $\partial_r\varphi(1/2,0) = (1, 7/4, 0)$ e $\partial_\theta\varphi(0,0,5/4)$. Il prodotto vettoriale di questi vettori porge:

$$\partial_r\varphi(1/2,0) \wedge \partial_\theta\varphi(1/2,0) = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & 1 & 0 \\ \vec{e}_2 & 7/4 & 0 \\ \vec{e}_3 & 0 & 5/4 \end{pmatrix} = \left(\frac{35}{16}, -\frac{5}{4}, 0\right) = \frac{5}{4}\left(\frac{7}{4}, -1, 0\right),$$

per cui

$$\hat{n}(5/4, 3/8, 0) = \frac{\partial_r\varphi(1/2,0) \wedge \partial_\theta\varphi(1/2,0)}{|\partial_r\varphi(1/2,0) \wedge \partial_\theta\varphi(1/2,0)|} = \frac{4}{\sqrt{65}}\left(\frac{7}{4}, -1, 0\right).$$

(5) Utilizziamo il teorema della divergenza. Poniamo:

$$D_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 0, x^2+y^2 = 1\}$$
$$D_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2, x^2+y^2 = 4\}.$$

La superficie formata dall'unione di D_0, D_1 e S è una superficie chiusa che racchiude il volume V. Per il teorema della divergenza, se la normale è orientata in modo da essere uscente da V, si ha:

$$\int_{D_0 \cup D_1 \cup S} \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = \int_V \operatorname{div} \vec{F}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$$

Poiché la divergenza è nulla, si ottiene:

$$\int_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = -\int_{D_0 \cup D_1 \cup S} \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = -\int_{D_0} \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma - \int_{D_1} \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma$$

La normale uscente a V in D_0 è costante e vale $(0,-1,0)$, mentre in D_1 vale $(0,1,0)$. Quindi (ricordando che D_0 e D_1 sono simmetrici rispetto alla sostituzione $z \to -z$):

$$\int_{D_0} \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = -\int_{D_0} (4x^2 - 3z)\, d\sigma = -4\int_{D_0} x^2\, d\sigma = -4\int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos^2\theta\, \rho\, d\rho\, d\theta = -\pi.$$
$$\int_{D_1} \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = -\int_{D_0} (4x^2 - 3z)\, d\sigma = 4\int_{D_1} x^2\, d\sigma = 4\int_0^2 \int_0^{2\pi} \rho^2 \cos^2\theta\, \rho\, d\rho\, d\theta = 16\pi.$$

Orientando pertanto $\hat{n}$ in modo da essere uscenti da V, si ottiene:

$$\int_S \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = -15\pi.$$

L'orientamento uscente da V è effettivamente quello indotto dalla parametrizzazione: per verificarlo osserviamo che $\hat{n}(5/4,3/8,0) = \frac{4}{\sqrt{65}}\left(\frac{7}{4}, -1, 0\right)$. Sezionando S con il piano $y = 3/8$ si ottiene la circonferenza $(5/4\cos\theta, 3/8, 5/4\sin\theta)$ e se proiettiamo la normale sul piano xz si ottiene $\frac{4}{\sqrt{65}}(7/4, 0, 0)$. Tale proiezione nel punto $(5/4, 3/8, 0)$ è uscente dal cerchio racchiuso dal tale circonferenza.
Verifichiamo il risultato per calcolo diretto:

$$\Phi(S, \vec{F}) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \det \begin{pmatrix} F_1 \circ \varphi & 2r\cos(\theta) & -\left(r^2+1\right)\sin(\theta) \\ F_2 \circ \varphi & 3r^2 + 2r & 0 \\ F_3 \circ \varphi & 2r\sin(\theta) & \left(r^2+1\right)\cos(\theta) \end{pmatrix} dr\, d\theta$$
$$= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \det \begin{pmatrix} r^3 + r^2 + (r^2+1)^2\sin^2\theta & 2r\cos(\theta) & -\left(r^2+1\right)\sin(\theta) \\ 4(r^2+1)^2\cos^2\theta - 3(r^2+1)\sin\theta & 3r^2+2r & 0 \\ 6(r^2+1)^2\cos^2\theta + (r^3+r^2)^2 & 2r\sin(\theta) & \left(r^2+1\right)\cos(\theta) \end{pmatrix} dr\, d\theta$$

Sviluppiamo il determinante D che compare nell'integranda secondo l'ultima colonna:

$$\begin{aligned}D = &\left(r^2+1\right)\cos(\theta)\Big(\left(3r^2+2r\right)\Big(r^3+\left(r^2+1\right)^2\sin^2(\theta)+r^2\Big)+\\ &-2r\cos(\theta)\Big(4\left(r^2+1\right)^2\cos^2(\theta)-3\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\Big)\Big)+\\ &+\left(-r^2-1\right)\sin(\theta)\Big(2r\sin(\theta)\Big(4\left(r^2+1\right)^2\cos^2(\theta)-3\left(r^2+1\right)\sin(\theta)\Big)+\\ &-\left(3r^2+2r\right)\Big(6\left(r^2+1\right)^2\cos^2(\theta)+\left(r^3+r^2\right)^2\Big)\Big)\end{aligned}$$

Nell'integrazione, i termini che contengono potenze dispari di seno e coseno si cancellano, quindi resta solo:

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^{2\pi} D\,dr\,d\theta &= \int_0^1\int_0^{2\pi}\Big(-8r\left(r^2+1\right)^3\cos^4(\theta)-8r\left(r^2+1\right)^3\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\Big)\,dr\,d\theta\\ &= \int_0^1\int_0^{2\pi} -8r\left(r^2+1\right)^3\left(\cos^4(\theta)+\sin^2(\theta)\cos^2(\theta)\right)\,dr\,d\theta\\ &= -8\int_0^1\left(r+3r^3+3r^5+r^7\right)\,dr\cdot\int_0^{2\pi}\cos^2(\theta)\,d\theta=-15\pi,\end{aligned}$$

che conferma il calcolo precedente.

Svolgimento (Esercizio 20)**.** In forma di equazione totale si ha

$$\omega(x,y)=p(x,y)\,dx+q(x,y)\,dy=y(1-xy)\,dx-x\,dy=0.$$

La forma ω non è esatta, tuttavia si ha:

$$\partial_y p(x,y)-\partial_x q(x,y)=1-2xy+1=2-2xy=\frac{2}{y}p(x,y)$$

pertanto l'equazione ammette il fattore integrante

$$k(y)=e^{-\int\frac{2}{y}\,dy}=e^{-2\log|y|}=e^{-\log y^2}=\frac{1}{y^2}.$$

Si ha:

$$k(y)\,\omega(x,y)=\left(\frac{1}{y}-x\right)\,dx-\frac{x}{y^2}\,dy=d\left(\frac{x}{y}\right)-d\left(\frac{x^2}{2}\right)=d\left(\frac{x}{y}-\frac{x^2}{2}\right).$$

Pertanto le soluzioni in forma implicita sono date da:

$$\frac{x}{y}-\frac{x^2}{2}=c,\ c\in\mathbb{R}$$

ovvero (ridefinendo la costante c)

$$y(x)=\frac{2x}{c+x^2}.$$

Sostituendo le condizioni $y(1)=1$ si ottiene:

$$y(x)=\frac{2x}{1+x^2},$$

che è prolungabile per continuità su tutto $\mathbb{R}$ (inizialmente il problema è posto in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$) e per $x\to\pm\infty$ ammette asintoto orizzontale $y=0$. Essa è simmetrica rispetto all'origine. La sua derivata è nulla per $x=\pm1$, cui corrispondono $y(1)=1$ e $y(-1)=-1$. Il punto con ascissa positiva è di massimo assoluto e l'altro è di minimo assoluto.

Altro metodo per trovare la soluzione: riscriviamo l'equazione

$$y'-\frac{y}{x}=y^2.$$

L'equazione data è della forma $y'+p(x)y=q(x)y^n$ con $n=2$, $n\neq 0,1$, pertanto essa è un'equazione di Bernoulli, e poiché $n>0$ essa ammette la soluzione identicamente nulla. Procediamo con la sostituzione $z=y^{1-n}=1/y$, si ha allora

$$\dot z=-\frac{y'}{y^2}=-\frac{1}{xy}-1=-\frac{z}{x}-1.$$

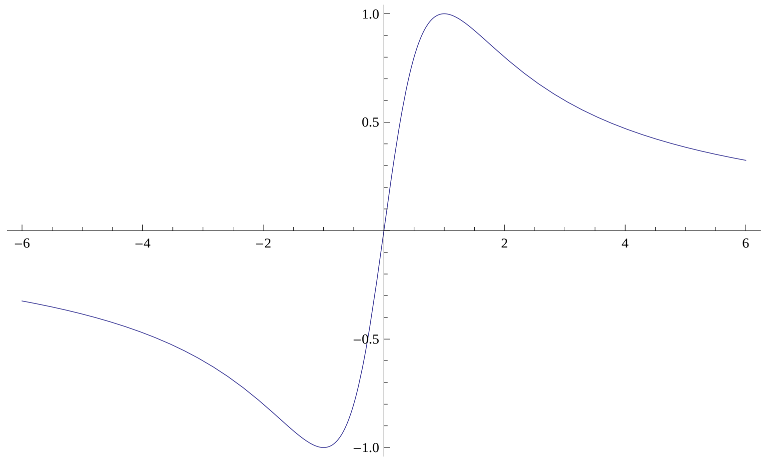


FIGURA 3. La soluzione di $\frac{dy}{dx} = -\frac{xy^2 - y}{x}$ con $y(1) = 1$.

L'equazione si riduce quindi all'equazione lineare $z' + z/x = 1$, la cui soluzione generale è data da:

$$\begin{aligned} z(x) &= e^{-\int \frac{dx}{x}} \left[\int 1 \cdot e^{\int \frac{dx}{x}\, dx}\, dx + c \right] = e^{-\log|x|} \left[\int |x|\, dx + c \right] \\ &= \frac{1}{|x|} \left(\operatorname{sgn}(x) x^2/2 + c \right) = \frac{x^2 + d}{2x} \end{aligned}$$

dove si è posto $d = 2\operatorname{sgn}(x)c$, $c \in \mathbb{R}$ da cui $d \in \mathbb{R}$. Poiché $y = 1/z$, si ottiene ancora

$$y(x) = \frac{2x}{x^2 + d},\ d \in \mathbb{R},$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 21)**.** Cerchiamo una soluzione del problema nella forma $u(t,x) = U(t)X(x)$ con $U(t) \neq 0$, $X(x) \neq 0$. Si ottiene $\dot{U}(t)X(x) - U(t)\ddot{X}(t) = 0$.

Dividendo per $U(t)X(x)$ e separando le variabili si ha $\dfrac{\dot{U}(t)}{U(t)} = \dfrac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}$.

Si ottengono quindi le due equazioni $\dot{U}(t) = \lambda U(t)$, da cui $U(t) = U(0)e^{\lambda t}$ e $\ddot{X}(x) = \lambda X(x)$, quest'ultima da accoppiarsi con le condizioni iniziali $X(0) = X(\pi) = 0$. Le soluzioni dell'equazione per $X(x)$ sono date da

$$X(x) = \begin{cases} c_0 e^{\sqrt{\lambda}x} + c_1 e^{-\sqrt{\lambda}x} & \text{se } \lambda > 0 \\ c_0 + c_1 x & \text{se } \lambda = 0 \\ c_0 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}$$

Se $\lambda > 0$ si ha $X(0) = 0 = c_0 + c_1$ da cui $c_0 = -c_1$ quindi $X(x) = c_0(e^{\sqrt{\lambda}x} - e^{-\sqrt{\lambda}x})$. Sostituendo $x = \pi$ si ha allora $X(\pi) = 0 = c_0(e^{\sqrt{\lambda}\pi} - e^{-\sqrt{\lambda}\pi})$ ed essendo $\lambda \neq 0$ si conclude che deve essere $c_0 = c_1 = 0$, soluzione non accettabile.
Se $\lambda = 0$, si ha $X(0) = 0 = c_0$, quindi $X(x) = c_1 x$ e sostituendo $X(\pi) = 0 = c_1\pi$ si conclude che deve essere $c_0 = c_1 = 0$, soluzione non accettabile.
Se $\lambda < 0$, si ha $X(0) = 0 = c_0$, quindi $X(x) = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$ e sostituendo $X(\pi) = 0 = c_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$, per avere soluzioni non nulle si deve avere $\lambda = -n^2$. Si ottengono quindi le soluzioni $X_n(x) = c_n \sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, $c_n \in \mathbb{R}$. Le soluzioni dell'equazione in U corrispondenti a tali valori di λ sono $U_n(t) = d_n e^{-n^2 t}$, pertanto le soluzioni elementari sono

$$u_n(t,x) = b_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$$

ove si è posto $b_n = c_n d_n \in \mathbb{R}$.
Cerchiamo di coprire il dato iniziale mediante una serie di soluzioni elementari:

$$u(0,x) = x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx),$$

pertanto i b_n sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier di soli seni del dato iniziale: ciò vuol dire prolungare per disparità la funzione $x(\pi - x)$ da $[0,\pi]$ a $[-\pi,\pi]$ e poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$. Si ha, integrando per parti:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x(\pi-x)\sin nx\,dx = \frac{2}{\pi}\left[x(\pi-x)\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} + \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi (\pi-2x)\cos(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{n\pi}\int_0^\pi -2x\cos(nx)\,dx = \frac{2}{n\pi}\left[-2x\frac{\sin(nx)}{n}\right]_{x=0}^{x=\pi} + \frac{4}{n^2\pi}\int_0^\pi \sin nx\,dx \\
&= -\frac{4}{n^3\pi}[\cos(nx)]_{x=0}^{x=\pi} = \frac{4}{\pi}\frac{1-(-1)^n}{n^3}.
\end{aligned}$$

In particolare se $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ si ha $b_{2k} = 0$ e se $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$ si ha $b_{2k+1} = \frac{8}{\pi(2k+1)^3}$. Pertanto la soluzione è data da:

$$u(t,x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{e^{-(2k+1)^2 t}\sin((2k+1)x)}{(2k+1)^3}.$$

Il termine generale della serie è maggiorato in modulo da $1/(2k+1)^3$, termine generale di una serie numerica convergente. Quindi la serie converge totalmente, uniformemente e puntualmente.

Svolgimento (Esercizio 22)**.** Poniamo $f(x,y) = -x^6 - 3x^4y^2 - 3x^2y^4 + 4x^2 + 8xy - y^6 + 4y^2$. Osserviamo che $f(x,y) = f(y,x)$ e $f(x,y) = f(-x,-y)$ quindi l'insieme è simmetrico rispetto all'origine e alla bisettrice $y = x$.

(1) In coordinate polari piane si ha:

$$\begin{aligned}
f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) &= -\rho^6\sin^6(\theta) - \rho^6\cos^6(\theta) - 3\rho^6\sin^2(\theta)\cos^4(\theta) - 3\rho^6\sin^4(\theta)\cos^2(\theta) \\
&\quad + 4\rho^2\sin^2(\theta) + 4\rho^2\cos^2(\theta) + 8\rho^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\
&= -\rho^6(\sin^6(\theta)+\cos^6(\theta)+3\sin^2(\theta)\cos^4(\theta)+3\sin^4(\theta)\cos^2(\theta)) + 4\rho^2 + 8\rho^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\
&= -\rho^6(\sin^2\theta+\cos^2\theta)^3 + 4\rho^2 + 8\rho^2\sin(\theta)\cos(\theta) \\
&= \rho^2(4 + 8\sin\theta\cos\theta - r^4) = \rho^2(4 + 4\sin 2\theta - r^4)
\end{aligned}$$

pertanto si ha:

$$\Gamma = \{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) : r^4 = 4 + 4\sin 2\theta\},$$

e questa scrittura comprende anche l'origine. Si osservi che $4 + 4\sin 2\theta \geq 0$ per ogni θ, pertanto $r(\theta)$ ha dominio $[0,2\pi[$.

(2) Si ha $f(x,0) = -x^6 + 4x^2$, nullo per $x = \pm\sqrt{2}$ e $x = 0$. Per simmetria, si ricava che $\Gamma \cap \{xy = 0\} = \{(0,0),(\pm\sqrt{2},0),(0,\pm\sqrt{2})\}$. Calcoliamo:

$$df(x,y) = (-6x^5 - 12x^3y^2 - 6xy^4 + 8x + 8y)\,dx + (-6x^4y - 12x^2y^3 + 8x - 6y^5 + 8y)\,dy,$$

e pertanto $df(\sqrt{2},0) = -16\sqrt{2}\,dx + 8\sqrt{2}\,dy$. Quindi la retta tangente in $P_1(\sqrt{2},0)$ ha equazione $-16\sqrt{2}\,x + 8\sqrt{2}\,y = c$, da cui, sostituendo, si ha $c = -32$ e quindi la tangente in $P_1(\sqrt{2},0)$ ha equazione $-2x + y = -2\sqrt{2}$. Ricaviamo per simmetria rispetto all'origine e alla bisettrice le altre tangenti: la tangente in $P_2(-\sqrt{2},0)$ ha equazione $2x + y = -2\sqrt{2}$, la tangente in $P_3(0,\sqrt{2})$ ha equazione $2x - y = -2\sqrt{2}$ e la tangente in $P_4(0,-\sqrt{2})$ ha equazione $2y - x = -2\sqrt{2}$. Poiché nessuna di queste tangenti è verticale, il teorema di Dini è applicabile in tutti questi punti, fornendo localmente la funzione implicita richiesta.

(3) In coordinate polari, si ha $\tilde{h}(\rho,\theta) = h(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = \rho^4$, pertanto il problema si riconduce allo studio dei massimi e minimi di $\rho^4(\theta) = 4(1+\sin 2\theta)$, $\theta \in [0,2\pi[$. Il massimo di ρ^4 è 8, raggiunto nei punti con $2\theta = \pi/2 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, quindi $\theta = \pi/4, 5/4\pi$. Tali punti di massimo corrispondono a $\pm(2\sqrt{2},2\sqrt{2})$, mentre il minimo è raggiunto nell'origine (ovvero $\theta = 3/4\pi, 7/4\pi$).

(4) L'insieme è limitato perché inscritto nella circonferenza centrata nell'origine di raggio $\sqrt[4]{8}$, inoltre è chiuso perché f è continua. Pertanto è compatto.

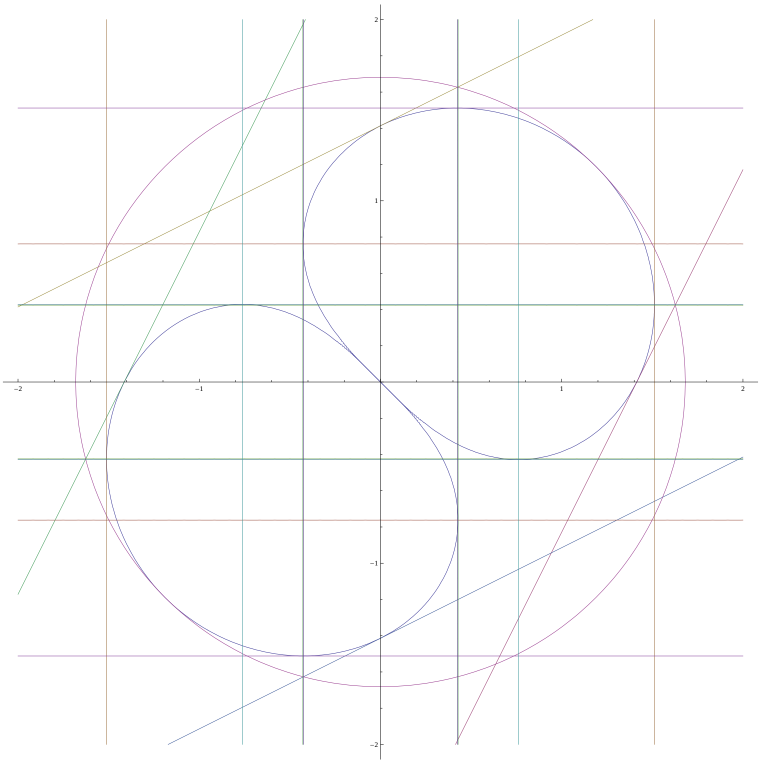


FIGURA 4. L'insieme $-x^6 - 3x^4y^2 - 3x^2y^4 + 4x^2 + 8xy - y^6 + 4y^2 = 0$ e alcune rette significative.

(5) Per tracciare il grafico di Γ, osserviamo che è sufficiente stabilire il grafico per $\theta \in [-\pi/4, 3/4\pi]$ e poi sfruttare le simmetrie. In tale intervallo, ρ cresce strettamente fino a raggiungere il suo massimo per $\theta = \pi/4$ e poi decresce strettamente a zero. Ne segue che Γ ha l'aspetto di un otto ruotato di $\pi/4$ in senso orario. Questo conclude il grafico qualitativo richiesto, possiamo però essere più precisi: Consideriamo la funzione

$$f(x, mx) = -m^6x^6 - 3m^4x^6 - 3m^2x^6 + 4m^2x^2 + 8mx^2 - x^6 + 4x^2$$

raccogliendo e semplificando x^2, si ottiene $f(x, mx) = 0$ se vale $m^6\left(-x^4\right) - 3m^4x^4 - m^2\left(3x^4 - 4\right) + 8m - x^4 + 4 = 0$, da cui si ottiene

$$|x|^4 = \frac{4(m^2 + 2m + 1)}{(m^6 + 3m^4 + 3m^2 + 1)} = \frac{4(m+1)^2}{(1+m^2)^3}.$$

La derivata di tale espressione è

$$\frac{d}{dm}x^4(m) = -\frac{8\left(2m^3 + 5m^2 + 2m - 1\right)}{\left(m^2+1\right)^4}$$

che si annulla nei punti $m_0^* = -1$, $m_1^* = (-3 - \sqrt{17})/4$, $m_2^* = (-3 + \sqrt{17})/4$. Ad essi, corrispondono i punti:

$$(x(m_0^*), m_0^*x(m_0^*)) = (0, 0)$$

$$(x(m_1^*), m_1^*x(m_1^*)) = \left(\frac{4\sqrt[4]{9-\sqrt{17}}}{\left(3\left(7+\sqrt{17}\right)\right)^{3/4}}, \frac{(-3-\sqrt{17})}{4}\frac{4\sqrt[4]{9-\sqrt{17}}}{\left(3\left(7+\sqrt{17}\right)\right)^{3/4}}\right)$$

$$(x(m_2^*), m_2^*x(m_2^*)) = \left(\frac{4\sqrt[4]{9+\sqrt{17}}}{\left(21-3\sqrt{17}\right)^{3/4}}, \frac{(-3+\sqrt{17})}{4}\frac{4\sqrt[4]{9+\sqrt{17}}}{\left(21-3\sqrt{17}\right)^{3/4}}\right)$$

e tali punti sono i massimi e minimi di $|x|$, per simmetria si ricavano massimi e minimi di $|y|$.

Svolgimento (Esercizio 23)**.** Poniamo $u = xy$ e $v = y^2/x$, da cui $y = \sqrt[3]{uv} = u^{1/3}v^{1/3}$, $x = \sqrt[3]{u^2/v} = u^{2/3}v^{-1/3}$ e quindi

$$\varphi(u,v) = (u^{1/3}v^{1/3}, u^{2/3}v^{-1/3}), \qquad \varphi^{-1}(x,y) = (xy, y^2/x).$$

Si ha $\Omega = \{\varphi(u,v) : u \in [1,2],\ v \in [1/4,1]\}$. Calcoliamo la matrice Jacobiana della parametrizzazione φ:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}u^{-2/3}v^{1/3} & \frac{1}{3}u^{1/3}v^{-2/3} \\ \frac{2}{3}u^{-1/3}v^{-1/3} & -\frac{1}{3}u^{2/3}v^{-4/3} \end{pmatrix},$$

il cui modulo del determinante è $1/|3v|$. Si può anche calcolare la matrice Jacobiana di φ^{-1}

$$\mathrm{Jac}\,\varphi^{-1}(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ -y^2/x^2 & 2y/x \end{pmatrix},$$

il cui modulo del determinante vale $|3y^2/x| = |3v|$ e osservare che $|\det \mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)| = |\det \mathrm{Jac}\,\varphi^{-1}(x,y)|^{-1} = 1/|3v|$. Pertanto l'integrale vale:

$$\int_\Omega dxdy = \int_1^2 \left(\int_{1/4}^1 |\det \mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)|\,dv \right) du = \int_1^2 \int_{1/4}^1 \frac{dv}{3v}\,du = \frac{1}{3}\left[\log\frac{1}{v}\right]_{v=1/4}^{v=1} = \frac{2}{3}\log 2.$$

Altro modo: il dominio Ω è contenuto nel primo quadrante, calcoliamo i punti di intersezione delle quattro curve che delimitano il dominio Ω: l'intersezione di $xy = 1$ con $x = y^2$ porge $(1,1)$, l'intersezione di $xy = 1$ con $x/4 = y^2$ porge $(2^{2/3}, 2^{-2/3})$, l'intersezione di $xy = 2$ con $x = y^2$ porge $(2^{2/3}, \sqrt[3]{2})$ e l'intersezione di $xy = 2$ con $x/4 = y^2$ porge $(2^{4/3}, 2^{-1/3})$.
Si ha quindi:

$$\begin{aligned}
\iint_\Omega dxdy &= \int_1^{2^{2/3}} \int_{1/x}^{\sqrt{x}} dy\,dx + \int_{2^{2/3}}^{2^{4/3}} \int_{\sqrt{x}/2}^{2/x} dydx \\
&= \int_1^{2^{2/3}} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right) dx + \int_{2^{2/3}}^{2^{4/3}} \left(\frac{2}{x} - \frac{\sqrt{x}}{2}\right) dydx \\
&= \left[\frac{2}{3}x^{3/2} - \log x\right]_{x=1}^{x=2^{2/3}} + \left[2\log x - \frac{1}{3}x^{3/2}\right]_{x=2^{2/3}}^{x=2^{4/3}} \\
&= \frac{4}{3} - \frac{2}{3}\log 2 - \frac{2}{3} + \frac{8}{3}\log 2 - \frac{4}{3} - \frac{4}{3}\log 2 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\log 2,
\end{aligned}$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 24)**.** Si veda Esercizio 19.

Svolgimento (Esercizio 25)**.** Si veda Esercizio 20.

Svolgimento (Esercizio 26)**.** Si veda Esercizio 19.

Svolgimento (Esercizio 27)**.** Si veda Esercizio 21.

Svolgimento (Esercizio 28)**.** Riscrivendo il sistema dato, si ha: $\begin{cases} -2y = \dot{x} - 3x - e^{4t} \\ \dot{y} = -6x + y \end{cases}$.

Derivando la prima equazione, si ottiene $-2\dot{y} = \ddot{x} - 3\dot{x} - 4e^{4t}$.
Sostituiamo l'espressione di $\dot{y}$ ottenuta dalla seconda equazione:

$$-2(-6x + y) = \ddot{x} - 3\dot{x} - 4e^{4t}.$$

Riscrivendo tale espressione si ha $\ddot{x} - 3\dot{x} - 12x + 2 - 4e^{4t} = 0$.
Sostituiamo l'espressione di $-2y$ ottenuta dalla prima equazione:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} - 12x - (\dot{x} - 3x - e^{4t}) - 4e^{4t} = 0.$$

Otteniamo quindi l'equazione nella sola variabile x:

$$\ddot{x} - 3\dot{x} - 12x - \dot{x} + 3x + e^{4t} - 4e^{4t} = 0.$$

Tale equazione si riscrive come:

$$\ddot{x} - 4\dot{x} - 9x = 3e^{4t}.$$

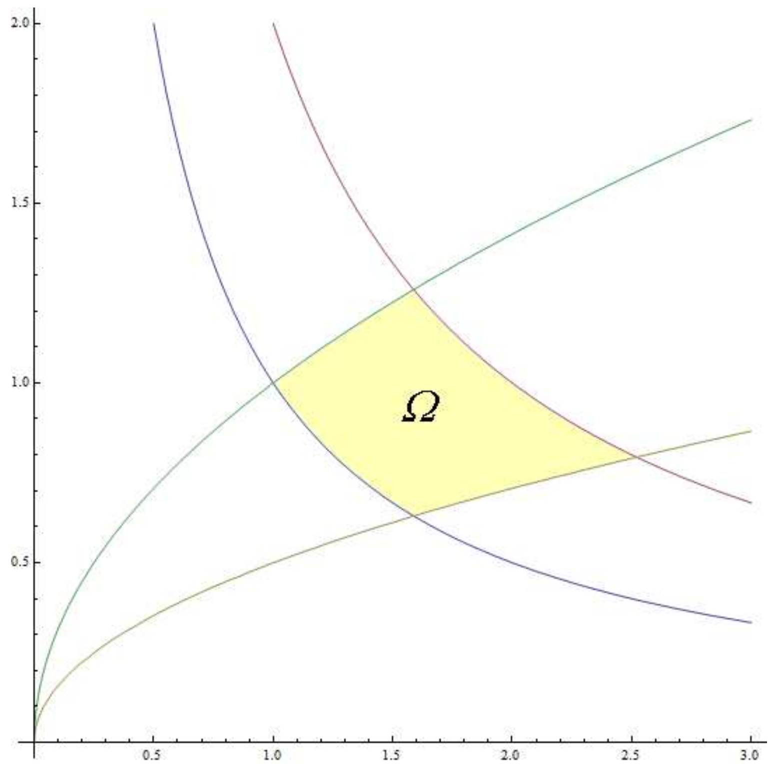


FIGURA 5. L'insieme $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < xy < 2, x/4 < y^2 < x\}$.

L'equazione caratteristica dell'omogenea associata è $\lambda^2 - 4\lambda - 9 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 2 - \sqrt{13}$, $\lambda_2 = 2 + \sqrt{13}$. Tali valori sono gli autovalori della matrice del sistema omogeneo associato: essi sono reali non nulli di segno discorde, quindi si ha una sella e l'unica soluzione stazionaria è l'origine.
La soluzione generale dell'omogenea associata è $\Phi(c_1, c_2, t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$ al variare di $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Per trovare la soluzione $t \mapsto x(t)$, è necessario sommare a $\Phi(c_1, c_2, t)$ una *soluzione particolare* $x_p(t)$ dell'equazione $\ddot{x} - 4\dot{x} - 9\,x = 3e^{4t}$. Poiché 4 non è radice dell'equazione caratteristica, cerchiamo $x_p(t) = Ae^{4t}$: si ha $16Ae^{4t} - 16Ae^{4t} - 9Ae^{4t} = 3e^{4t}$ da cui $A = -1/3$ e quindi

$$x(t) = c_1 e^{(2-\sqrt{13})t} + c_2 e^{(2+\sqrt{13})t} - \frac{e^{4t}}{3},$$

$$\dot{x}(t) = c_1(2 - \sqrt{13})e^{(2-\sqrt{13})t} + c_2(2 + \sqrt{13})e^{(2+\sqrt{13})t} - \frac{4}{3}\,e^{4t}.$$

Dalla prima equazione si ha:

$$y(t) = -\frac{1}{2}(\dot{x} - 3x(t) - e^{4t}/3) = \frac{1}{6}e^{-\left(\sqrt{13}-2\right)t}\left(-3\left(\sqrt{13}-1\right)c_2 e^{2\sqrt{13}t} + 3\left(1+\sqrt{13}\right)c_1 + 4e^{\left(2+\sqrt{13}\right)t}\right).$$

Svolgimento (Esercizio 29)**.** Poniamo

$$f(x, y) := -\frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x^4 + 2x^2y^2 + y^4.$$

Poiché $f(x, y) = f(-x, y)$ si ha che l'insieme è simmetrico rispetto all'asse y. In coordinate polari $x = \rho\cos\theta$,

$y = \rho \sin\theta$ si ha, ricordando che $\rho \neq 0$:

$$\begin{aligned}
f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) &= \rho^4 \sin^4\theta + \rho^4\cos^4\theta + 2\rho^4 \sin^2\theta\cos^2\theta - \frac{\rho^3 \sin\theta\cos^2\theta}{\sqrt{\rho^2\sin^2\theta + \rho^2\cos^2(\theta)}} \\
&= \rho^4(\sin^4\theta + \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta) - \rho^2 \sin\theta\cos^2\theta \\
&= \rho^4(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - \rho^2\sin\theta\cos^2\theta \\
&= \rho^2(\rho^2 - \sin\theta\cos^2\theta).
\end{aligned}$$

Poiché $\rho > 0$ possiamo dividere per ρ^2 ottenendo $\rho^2 = \sin\theta\cos^2\theta$ accoppiato con le condizioni $\rho \geq 0$, $\rho \neq 0$. Si ha quindi che il dominio di θ è $]0,\pi[\setminus\{\pi/2\}$ ovvero

$$\Gamma = \{(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta) : \rho(\theta) = \sqrt{\sin\theta}|\cos\theta| : \theta \in]0,\pi[\setminus\{\pi/2\}\}.$$

L'insieme Γ non è chiuso: si prenda una successione $\{\theta_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che $\theta_n \to 0^+$. Se $r_n := \sin\theta_n\cos^2\theta_n$ si ha che $(x_n, y_n) := (\rho_n\cos\theta_n, \rho_n\sin\theta_n)$ è una successione in Γ convergente a $(0,0) \in \mathbb{R}^2\setminus\Gamma$. Poiché Γ non è chiuso, non può essere compatto. D'altra parte, la funzione $\rho(\theta)$ può essere estesa per continuità all'intervallo compatto $[0,\pi]$, e quindi l'insieme

$$\overline{\Gamma} = \{(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta) : \rho(\theta) = \sqrt{\sin\theta}|\cos\theta| : \theta \in [0,\pi]\},$$

è immagine continua di un compatto, quindi compatto.
L'insieme $C \cap \Gamma$ è contenuto nel semipiano $y > 0$, per cui da $x^2 = y^2$ si ottiene $|x| = |y|$ e quindi $y = |x|$, da cui $y = \pm x$. Dobbiamo quindi risolvere $F(x, \pm x) = 0$, $x \neq 0$, da cui $x = \pm 2^{-5/4}$ e $y = 2^{-5/4}$. Il differenziale di f è dato da

$$df(x,y) = \left(4x^3 - \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{x^3y}{(x^2+y^2)^{3/2}} + 4xy^2\right) dx + \left(\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + 4x^2y + 4y^3\right) dy$$

Sostituendo, si ottiene $df(2^{-5/4}, 2^{-5/4}) = 2^{-11/4}\,dx + 3\cdot 2^{-11/4}\,dy = 2^{-11/4}\,(dx + 3dy)$, pertanto la retta tangente avrà equazione $x + 3y = c$. Imponendo il passaggio per $(2^{-5/4}, 2^{-5/4})$ si ottiene $x + 3y = 2^{3/4}$. Simmetricamente, la tangente in $(2^{-5/4}, 2^{-5/4})$ è $-x + 3y = 2^{3/4}$. Entrambe le tangenti non sono verticali, il teorema di Dini fornisce le applicazioni implicitamente definite richieste.
Si ha che $h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^2\sin\theta$. Se cerchiamo massimi e minimi vincolati a $\overline{\Gamma}$ il problema si riduce a determinare massimi e minimi di $\rho^2(\theta)\sin\theta = \sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{4}\sin^2 2\theta$ vincolati a $\theta \in [0,\pi]$. Il minimo è assunto in $\theta = 0, \pi/2, \pi$ e vale 0, il punto corrispondente è l'origine. Il massimo è assunto in $\theta = \pi/4, 3/4\pi$, cui corrisponde il punto $(\pm 2^{-5/4}, 2^{-5/4})$, e il valore massimo di h è $1/4$.
Per quanto riguarda il grafico qualitativo, poniamo $g(\theta) = \rho^2(\theta)$ e studiamo per $\theta \in [0,\pi]$. Si ha $g(0) = g(\pi) = 0$, e

$$g'(\theta) = \cos^3\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta = \cos\theta(\cos^2\theta - 2\sin^2\theta) = \cos\theta(1 - 3\sin^2\theta).$$

Tale derivata per $\theta \in]0,\pi[$ è nulla nel punto $\theta_m = \pi/2$, e $g(\pi/2) = 0$, punto di minimo, oppure nei punti corrispondenti a θ_M per cui vale $\sin^2\theta_M = 1/3$ e quindi $\cos^2\theta_M = 2/3$. Si ha $\rho(\theta_M) = 2\sqrt{3}/9$. I punti corrispondenti in coordinate cartesiane sono $(\pm 2\sqrt{2}/9, 2/9)$ e sono i punti di Γ più lontani dall'origine.
Per disegnare l'insieme, quindi, partiamo dall'angolo $\theta = 0$ e dall'origine, la distanza cresce con l'angolo fino al suo valore massimo e poi decresce fino a 0 per $\theta = \pi/2$. Si ricostruisce il grafico per simmetria nel secondo quadrante. L'aspetto è quello di un quadrifoglio tagliato a metà.
Questo conclude lo studio qualitativo richiesto. Per completezza forniamo ulteriori dati. Studiamo il massimo di $y^2(\theta) := \rho^2(\theta)\sin^2\theta = \sin^3\theta\cos^2\theta$. Si ha

$$\frac{d}{d\theta}(y^2(\theta)) = -2\cos\theta\sin^4\theta + 3\sin^2\theta\cos^2\theta = \sin^2\theta(3\cos^2\theta - 2\sin^2\theta) = \sin^2\theta(5\cos^2\theta - 2).$$

Tale derivata per $\theta \in]0,\pi[$ è nulla se $\cos^2\theta = 2/5$, cui corrisponde $\sin^2\theta = 3/5$ e $\rho^2(\theta) = \sqrt{60}/25$. I punti di ordinata massima sono quindi $(\pm\sqrt{2/5}\sqrt[4]{60}/5, \sqrt{3/5}\sqrt[4]{60}/5)$.
Studiamo il massimo di $x^2(\theta) := \rho^2(\theta)\cos^2\theta = \sin\theta\cos^4\theta$

$$\frac{d}{d\theta}(x^2(\theta)) = \cos^5\theta - 4\cos^3\theta\sin^2\theta = \cos^3\theta(\cos^2\theta - 4\sin^2\theta) = \cos^3\theta(1 - 5\sin^2\theta).$$

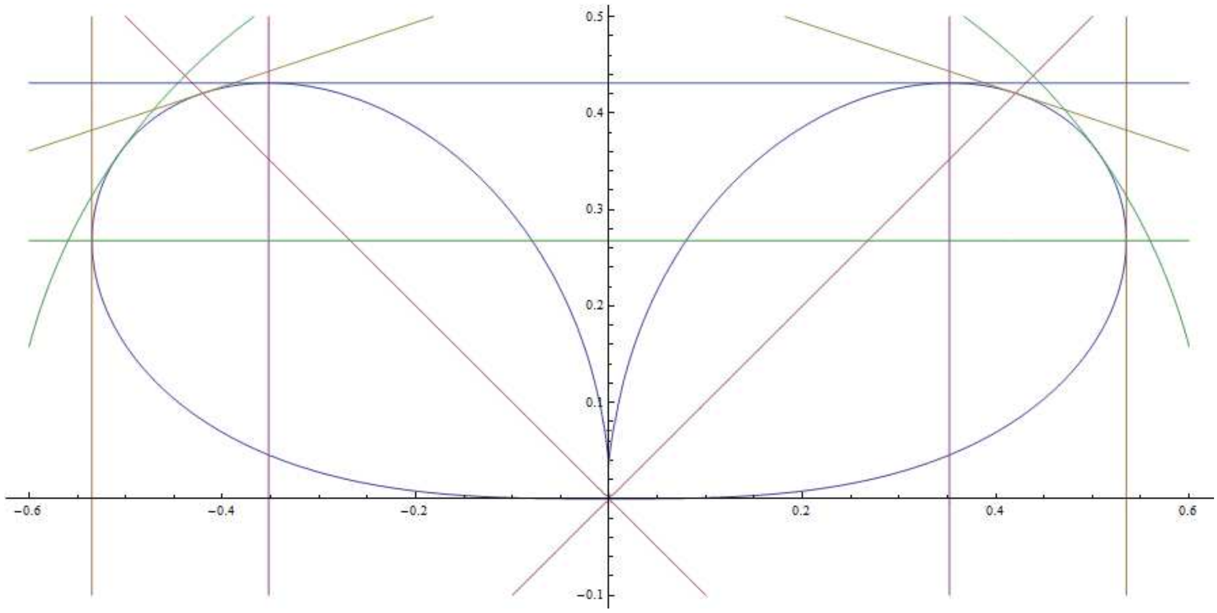


FIGURA 6. L'insieme $-\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}+x^4+2x^2y^2+y^4=0$ e alcune rette significative.

Tale derivata se $\theta \in]0,\pi[\setminus\{\pi/2\}$ si annulla per $\sin^2\theta = 1/5$ cui corrisponde $\cos^2\theta = 4/5$ e $\rho^2(\theta) = 4\cdot 5^{-3/2}$ I punti di ascissa di modulo massimo sono quindi $(\pm 4\cdot 5^{-5/4}, 2\cdot 5^{-5/4}$. L'insieme è inscritto nel rettangolo con lati paralleli agli assi

$$Q := [-4\cdot 5^{-5/4}, 4\cdot 5^{-5/4}]\times[0, \sqrt{3/5}\sqrt[4]{60}/5].$$

Svolgimento (Esercizio 30)**.** Si ha (ponendo $t = y/x$):

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\Omega) &= \iiint_\Omega dx\,dy\,dz = \int_1^2 \int_{x^2}^{2x^2} \int_0^{\frac{x}{x^2+y^2}} dz\,dy\,dx = \int_1^2 \int_{x^2}^{2x^2} \frac{x}{x^2+y^2}\,dy\,dx = \int_1^2 \int_x^{2x} \frac{x^2}{x^2+x^2t^2}\,dt\,dx \\
&= \int_1^2 \int_x^{2x} \frac{1}{1+t^2}\,dt\,dx = \int_1^2 (\arctan(2x) - \arctan x)\,dx \\
\text{(per parti)} &= [x(\arctan(2x) - \arctan x)]_{x=1}^{x=2} - \int_1^2 \left(\frac{2x}{1+4x^2} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx \\
&= 2(\arctan 4 - \arctan 2) - \arctan 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\int_1^2 \frac{8x}{1+4x^2}\,dx + \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{1+x^2}\,dx \\
&= 2\arctan 4 - 3\arctan 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}[\log(1+4x^2)]_{x=1}^{x=2} + \frac{1}{2}[\log(1+x^2)]_{x=1}^{x=2} \\
&= 2\arctan 4 - 3\arctan 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}[\log(1+4x^2)]_{x=1}^{x=2} + \frac{1}{2}[\log(1+x^2)]_{x=1}^{x=2} \\
&= 2\arctan 4 - 3\arctan 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\log(17/5) - \frac{1}{2}\log(2/5) \\
&= 2\arctan 4 - 3\arctan 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}\log(17/5) - \frac{1}{4}\log(4/25) \\
&= 2\arctan 4 - 3\arctan 2 + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\log(125/68).
\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 31)**.** Poniamo $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z))$.

(1) Si ha:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) &= \partial_x\vec{F}(x,y,z) + \partial_y\vec{F}(x,y,z) + \partial_z\vec{F}(x,y,z) = -4y^2 + 10y - 4z^2, \\
\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) &= \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z) \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z) \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & 6y \\ \vec{e}_2 & \partial_y & 6x - 4yz^2 + 5z^2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & 10yz - 4y^2 z \end{pmatrix} \\
&= ((10z - 8yz) - (-8yz + 10z), 0, 6-6) = (0,0,0).
\end{aligned}$$

Poiché il rotore è nullo, il campo è conservativo.

(2) Poiché il campo è conservativo, l'integrale di linea non dipende dal cammino, ma solo dagli estremi: $\gamma(0) = (1,0,0)$ e $\gamma(2\pi) = (1,1,0)$. Possiamo quindi integrare sul segmento $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{R}^3$, $\tilde{\gamma}(t) = (1,t,0)$. Si ottiene quindi:

$$\int_\gamma \vec{F}\,d\ell = \int_0^1 \vec{F}\circ\tilde{\gamma}(t)\,\tilde{\gamma}'(t)\,dt = \int_0^1 (6t,6,0)(0,1,0)\,dt = 6.$$

(3) Si ha:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} 2u-3v & -3u \\ v^3+1 & 3uv^2 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}$$

Determiniamo l'elemento d'area con la regola di Binet: formiamo le tre sottomatrici quadrate:

$$\begin{aligned}
B_1 &:= \begin{pmatrix} 2u-3v & -3u \\ v^3+1 & 3uv^2 \end{pmatrix}, & \det B_1 &= 6u^2v^2 - 6uv^3 + 3u; \\
B_2 &:= \begin{pmatrix} 2u-3v & -3u \\ 2u & 2v \end{pmatrix}, & \det B_2 &= 6u^2 + 4uv - 6v^2; \\
B_3 &:= \begin{pmatrix} v^3+1 & 3uv^2 \\ 2u & 2v \end{pmatrix}, & \det B_3 &= -6u^2v^2 + 2v^4 + 2v.
\end{aligned}$$

Per Binet:

$$\begin{aligned}
d\sigma &= \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}\,du\,dv \\
&= \sqrt{(6u^2+4uv-6v^2)^2 + (-6u^2v^2+2v^4+2v)^2 + (6u^2v^2-6uv^3+3u)^2}\,du\,dv.
\end{aligned}$$

È necessario trovare $(u_P, v_P) \in [-1,1] \times [-1,1]$ tali per cui $P = \varphi(u_P, v_P)$, ovvero risolvere il sistema:

$$\begin{cases} u^2 - 3uv + 1 = 1, \\ uv^3 + u = 3/1600 + 3/(2\sqrt{10}), \\ u^2 + v^2 = 1/4. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene $u^2 - 3uv = 0$, quindi $u(u - 3v) = 0$ per cui $u = 0$ o $u = 3v$. Se $u = 0$ la seconda non può essere risolta. Quindi $u = 3v$. Dalla terza si ottiene $v = \pm 1/(2\sqrt{10})$, per cui $u = \pm 3/(2\sqrt{10})$. La seconda equazione è soddisfatta prendendo i segni positivi $u_P = 3/(2\sqrt{10})$, $v_P = 1/(2\sqrt{10})$. Si ha quindi:

$$\operatorname{Jac}\varphi(u_P, v_P) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2\sqrt{10}} & -\frac{9}{2\sqrt{10}} \\ 1 + \frac{1}{80\sqrt{10}} & \frac{9}{80\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$$

La normale indotta è quindi:

$$\det\left(\begin{array}{c|c} \vec{e}_1 & \\ \vec{e}_2 & \operatorname{Jac}\varphi(u_P, v_P) \\ \vec{e}_3 & \end{array}\right) = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \frac{3}{2\sqrt{10}} & -\frac{9}{2\sqrt{10}} \\ \vec{e}_2 & 1 + \frac{1}{80\sqrt{10}} & \frac{9}{80\sqrt{10}} \\ \vec{e}_3 & \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{13}{400}, -\frac{3}{2}, \frac{9}{400} + \frac{9}{2\sqrt{10}}\right)$$

Il versore normale è

$$\hat{n}(P) = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{13}{400}, -\frac{3}{2}, \frac{9}{400} + \frac{9}{2\sqrt{10}}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{10}} - \frac{13}{400}\right)^2 + \frac{9}{4} + \left(\frac{9}{400} + \frac{9}{2\sqrt{10}}\right)^2}}.$$

Posto $\vec{G} = (G_1, G_2, G_3)$, il flusso richiesto è:

$$\Phi(\vec{G}, S) := \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det\left(\begin{array}{c|c} G_1 \circ \varphi(u,v) & \\ G_2 \circ \varphi(u,v) & \operatorname{Jac}\varphi(u_P, v_P) \\ G_3 \circ \varphi(u,v) & \end{array}\right) du\,dv = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \det\begin{pmatrix} 6\left(uv^3 + u\right) & 2u - 3v & -3u \\ 1 & v^3 + 1 & 3uv^2 \\ 1 & 2u & 2v \end{pmatrix}$$

$$= \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 6\left(uv^3 + u\right)\left(2v(v^3+1) - 6u^2v^2\right) dv\,du + \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} -(2v(2u - 3v) + 6u^2)\,du\,dv +$$

$$+ \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} ((2u - 3v)3uv^2 + 3u(v^3 + 1))\,du\,dv$$

Tutti i termini nello sviluppo che contengono potenze dispari di u o v sono nulli perché tali termini sono funzioni dispari di u o di v integrate su un intervallo simmetrico. Si ha quindi che il primo integrale è nullo e:

$$\Phi(\vec{F}, S) := \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} (6v^2 - 6u^2 + 6u^2v^2)\,du\,dv = 6\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} v^2 - 6\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u^2 + 6\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u^2v^2\,du\,dv$$

$$= 6\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} u^2v^2\,du\,dv = 8/3.$$

Svolgimento (Esercizio 32)**.** Applichiamo il metodo di separazione delle variabili, cerchiamo soluzioni non nulle nella forma $u(t,x) = U(t)X(x)$. Si ottiene: $\dot{U}(t)X(x) - U(t)\ddot{X}(x) + 4U(t)X(x) = 0$. Dividendo per $u(t,x) = U(t)X(x)$ si ottiene allora:

$$\frac{\dot{U}(t) + 4}{U(t)} = \frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si ottiene quindi il sistema:

$$\begin{cases} \dot{U}(t) = (\lambda - 4)U(t) \\ \ddot{X}(x) - \lambda X(x) = 0 \end{cases}$$

Consideriamo l'equazione per $X(x)$ accoppiata con le condizioni $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$. L'equazione caratteristica è $\mu^2 - \lambda = 0$, il cui discriminante è $\Delta = 4\lambda$. Se $\lambda > 0$ allora $\Delta > 0$ e l'equazione ammette due radici reali distinte non nulle μ_1, μ_2, la soluzione generale diviene $X(x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x}$. Derivando, si ha $\dot{X}(x) = c_1\mu_1 e^{\mu_1 x} + c_2\mu_2 e^{\mu_2 x}$ da cui il sistema nelle incognite c_1 e c_2.

$$\begin{cases} \dot{X}(0) = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 = 0 \\ \dot{X}(\pi) = c_1 e^{\mu_1\pi}\mu_1 + c_2 e^{\mu_2\pi}\mu_2 = 0. \end{cases}$$

Poiché $\mu_1 \neq \mu_2$, le due equazioni sono indipendenti e quindi l'unica soluzione è $c_1 = c_2 = 0$ non accettabile. Se $\lambda = 0$, si ha $\mu_1 = \mu_2 = 0$, quindi la soluzione generale dell'equazione è $X(x) = c_0 + c_1 x$. Derivando, e sostituendo le condizioni al contorno si ottiene $c_1 = 0$. Quindi si ha la soluzione accettabile $X_0(x) = c_0$, $c_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Se $\lambda < 0$, si ottengono due radici complesse coniugate $\mu_1 = i\sqrt{-\lambda}$, $\mu_2 = -i\sqrt{-\lambda}$, quindi la soluzione generale è $X(x) = c_1 \cos\sqrt{-\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{-\lambda}x$, la cui derivata risulta

$$\dot{X}(x) = \sqrt{-\lambda}(-c_1 \sin\sqrt{-\lambda}x + c_2 \cos\sqrt{-\lambda}x).$$

Sostituendo la condizioni al contorno $\dot{X}(0) = 0$ si ha $c_2 = 0$, da cui $\dot{X}(x) = -c_1\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda}x$, e dato che $\dot{X}(\pi) = 0$ e $c_1 \neq 0$, si deve avere $\sqrt{-\lambda} \in \mathbb{N}$ e perciò $\lambda_n = -n^2$, $n \in \mathbb{N}$. La soluzione corrispondente risulta quindi $X_n(x) = c_n \cos(nx)$, $n \in \mathbb{N}$, che include anche il caso precedente. L'equazione per $U(t)$ con i valori λ_n ha soluzione $U_n(t) = d_n e^{-(n^2+4)t}$, pertanto le soluzioni elementari sono del tipo

$$u_n(t,x) = U_n(t)X_n(x) = a_n e^{-(n^2+4)t}\cos(nx).$$

Cerchiamo soluzioni in forma di serie, quindi:

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x),$$

in particolare:

$$u(0,x) = \left|\frac{\pi}{2} - x\right| = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t,x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

Per confronto, si ricava che i coefficienti a_n, $n > 0$ sono i coefficienti dello sviluppo di Fourier della funzione $u(0,x)$ prolungata per parità in $[-\pi,\pi]$ e per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$, mentre a_0 è metà del coefficiente corrispondente di tale sviluppo.

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\pi}{2} - x\right| dx = \frac{\pi}{4} \text{ (è l'area di un triangolo moltiplicata per un coefficiente.)} \\
a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left|\frac{\pi}{2} - x\right| \cos(nx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos(nx)\, dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \cos(nx)\, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]_{x=0}^{x=\pi/2} + \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi/2} \sin nx\, dx + \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin(nx)}{n}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right]_{x=\pi/2}^{x=\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \sin nx\, dx \\
&= \frac{2(1 + (-1)^n - 2\cos(n\pi/2))}{n^2\pi},
\end{aligned}$$

dove si è integrato per parti e osservato che i termini tra quadre sono nulli. La soluzione è quindi:

$$u(t,x) = e^{-4t}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 t}\frac{1 + (-1)^n - 2\cos(n\pi/2)}{n^2\pi}\cos(nx)\right).$$

Il termine generale delle serie è maggiorato in modulo da $4/n^2$, termine generale di serie convergente. La serie converge totalmente, quindi uniformemente e puntualmente. Si può anche fare la seguente osservazione: per n dispari si ha $a_n = 0$. Per $n > 0$ pari e multiplo di 4, ovvero $n = 4k$, $k > 0$ si ha ancora $a_{4k} = 0$. Per $n > 0$ pari ma non multiplo di 4, ovvero $n = 4k - 2$, $k > 0$, si ha $a_{4k-2} = \frac{2}{\pi(2k-1)^2}$, quindi la soluzione diviene:

$$u(t,x) = e^{-4t}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-4(2k-1)^2 t}}{(2k-1)^2}\cos(2(2k-1)x)\right).$$

Svolgimento (Esercizio 33)**.** Osserviamo che $F(x,y) = F(-x,y)$, $F(x,-y) = F(x,y)$ quindi l'insieme Γ è simmetrico rispetto agli assi.

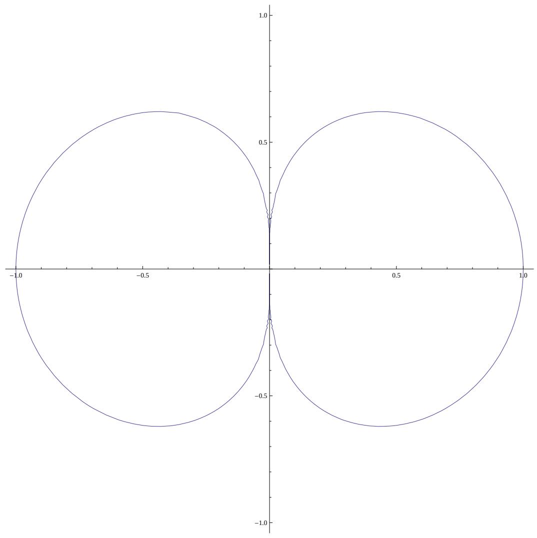


FIGURA 7. L'insieme $-\dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^2}+x^2+y^2=0$.

(1) In coordinate polari piane si ha

$$F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\rho^2-\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}, \qquad \rho\neq 0,$$
$$\Gamma=\{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta:\ \rho^4=\cos^2\theta,\rho\neq 0\}$$

Γ non è chiuso perché data $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset]0,+\infty[$, $\rho_n\to 0^+$, per n sufficientemente grande è possibile determinare $\theta_n:=\arccos\rho^2$ in modo da avere $(\rho_n\cos\theta_n,\rho_n\sin\theta_n)\in\Gamma$. Tuttavia tale successione di punti di Γ converge a $(0,0)\notin\Gamma$. La chiusura di Γ è $\bar{\Gamma}=\Gamma\cup\{(0,0)\}$.

(2) Si ha $F(x,0)=x^2-1/x^2$ che si annulla per $x=\pm1$, da cui i punti $(\pm1,0)$, invece $F(0,y)=y^2$ che si annulla in $y=0$, però il punto $(0,0)\notin\Gamma$. Pertanto Γ interseca gli assi in $(\pm1,0)$.
Si ha:

$$\begin{cases}\partial_x F(x,y) &= -\frac{2x}{(x^2+y^2)^2}+\frac{4x^3}{(x^2+y^2)^3}+2x,\\ \partial_y F(x,y) &= \frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^3}+2y\end{cases}$$

Nella fattispecie $\partial_y F(\pm1,0)=0$ e $\partial_x F(\pm1,0)=\pm4$, pertanto è possibile applicare il teorema di Dini e concludere l'esistenza di funzioni $x=\phi^+(y)$ e $x=\phi^-(y)$ definite in un intorno di 0 tali per cui $\phi^\pm(0)=\pm1$. Poiché $F\in C^1$ tali funzioni sono C^1. Si ha

$$\frac{d\phi^\pm}{dy}(0)=-\frac{\partial_y F(\pm1,0)}{\partial_x F(\pm1,0)}=0.$$

Le tangenti a Γ in tali punti sono verticali e quindi sono $x=\pm1$.

(3) Osserviamo che h è una funzione strettamente monotona di ρ^2, pertanto massimi e minimi di h sono raggiunti nei massimi e minimi di ρ^2. In particolare vi è un minimo in $(0,0)$ che vale $h(0,0)=0$. ρ raggiunge il suo massimo per $\cos^2\theta=1$, pertanto i massimi sono in $(\pm1,0)$ e $h(\pm1,0)=\arctan\log 2$.

(4) Γ non è compatto perché non è chiuso. Dall'espressione in coordinate polari sua chiusura $\bar{\Gamma}$ si ricava che ρ è limitato, quindi $\bar{\Gamma}$ è compatto.

(5) Oltre alle già citate simmetrie rispetto agli assi, osserviamo che la funzione $\theta\mapsto\cos^2\theta$ è π-periodica, pertanto l'insieme è invariante per rotazioni di angolo π. I massimi di $|x|$ coincidono con i massimi di ρ in quanto questi ultimi sono assunti su punti dell'asse x. La funzione $\theta\mapsto\cos^2\theta$ è strettamente monotona decrescente da 0 a $\pi/2$, e in $\pi/2$ vale 0. Per simmetria è possibile ricostruire da questo il grafico di Γ.

Svolgimento (Esercizio 34)**.** Definiamo la seguente mappa $\varphi : \Omega \to [0,2]\times[0,2\pi]$, $\varphi(x,y)=(x+y,x-y)$. Tale mappa è invertibile:

$$\mathrm{Jac}(\varphi)(x,y)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

il cui determinante è $-2\neq 0$. La sua funzione inversa $\psi : [0,2]\times[0,2]\to\Omega$ ha determinante Jacobiano pari a

$$\mathrm{Jac}(\psi)(u,v)=\frac{1}{\mathrm{Jac}(\varphi)(\psi(u,v))}=-\frac{1}{2}.$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega}\cos^2(x+y)\sin(3(x-y))\,dx\,dy&=\int_{\varphi(\Omega)}\cos^2 u\sin 3v|\det(\mathrm{Jac}(\psi)(u,v))|\,du\,dv=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^2\cos^2 u\sin 3v\,du\,dv\\&=\frac{1}{2}\left(\int_0^{2\pi}\sin 3v\,dv\right)\cdot\left(\int_0^2\cos^2 u\,du\right)=0.\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 35)**.** Poniamo $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$

(1) Si ha

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\vec{F}(x,y,z)&=\partial_x F_1+\partial_y F_2+\partial_z F_3=0,\\ \mathrm{rot}\,\vec{F}(x,y,z)&=\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z)\\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z)\\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z)\end{pmatrix}=(-16z,3-12x,1-18y).\end{aligned}$$

Poiché il rotore non è nullo, il campo non è conservativo.

(2) Posto $C=\{(x,0,y): x^2+y^2\le 1\}$, si ha $\gamma=\partial C$. Il bordo di C è γ, e la normale indotta positivamente è $(0,-1,0)$. Per il teorema di Stokes, la circuitazione su γ è il flusso del rotore attraverso C, quindi:

$$\oint_\gamma \vec{F}\,d\vec{\ell}=\iint_C \mathrm{rot}(\vec{F})\cdot\hat{n}\,d\sigma=\iint_C(-16z,3-12x,1-18y)(0,-1,0)\,d\sigma=\iint_C(12x-3)\,dx\,dy=-3\pi.$$

dove si è sfruttata nell'ultimo passaggio la simmetria del dominio C. Verifichiamo il risultato per calcolo diretto:

$$\begin{aligned}\oint_\gamma \vec{F}\,d\vec{\ell}&=\int_0^{2\pi}\vec{F}\circ\gamma(t)\dot{\gamma}(t)\,dt=\int_0^{2\pi}(3\sin t,\cos t,6\cos^2 t)(-\sin t,0,\cos t)\,dt\\&=\int_0^{2\pi}(-3\sin^2 t+6\cos^3 t)\,dt=-3\int_0^{2\pi}\sin^2 t=-3\pi.\end{aligned}$$

(3) Si ha:

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(u,v)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ -2u & -4v^3\end{pmatrix}$$

Dalla regola di Binet si ricava $d\sigma=\sqrt{1+16v^6+4u^2}\,du\,dv$.

(4) Il punto $P=\varphi(1/\sqrt{2},0)$, pertanto la normale è data dal prodotto vettoriale delle colonne dello Jacobiano della parametrizzazione. Dividendo per il modulo di tale vettore (ossia per $d\sigma(P)$) si ottiene il versore normale richiesto:

$$\hat{n}(P)=\frac{(\sqrt{2},0,1)}{\sqrt{3}}.$$

(5) Consideriamo la superficie $\Sigma:=\{(u,v,0):\ u^2+v^4\le 1\}$. Si ha che $\Sigma\cup S$ è superficie chiusa, inoltre la normale uscente da S indotta dalla parametrizzazione è la normale esterna al volume V racchiuso da $\Sigma\cup S$. Se orientiamo Σ con la normale verso il basso, dal Teorema della divergenza si ha:

$$\int_{S\cup\Sigma}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma=\int_V \mathrm{div}\vec{F}\,dx\,dy\,dz=0$$

Pertanto

$$\begin{aligned}\int_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma &= -\int_\Sigma \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma\\ &= -\int_\Sigma (9y^2+3z, 8z^2+x, 6x^2)(0,0,-1) = 6\int_\Sigma x^2\,dx\,dy = 6\int_{-1}^1 \left(\int_{-(1-y^4)}^{1-y^4} x^2\,dx\right)dy\\ &= 4\int_{-1}^1 (1-y^4)^3\,dy = 8\int_0^1 (1-y^4)^3\,dy = \frac{1024}{195}.\end{aligned}$$

Svolgimento (Esercizio 36)**.** In forma di equazione totale si ha

$$\omega(x,y) = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = -y\,dx + x(1-xy)\,dy = 0.$$

La forma ω non è esatta, tuttavia si ha:

$$\partial_y p(x,y) - \partial_x q(x,y) = -1-1-2xy = -\frac{2}{x}q(x,y)$$

pertanto l'equazione ammette il fattore integrante

$$k(x) = \exp\left(\int f(x)\,dx\right) = e^{-\int 2/x\,dx} = \frac{1}{x^2}$$

Si ha:

$$k(x,y)\omega(x,y) = -\frac{y}{x^2}\,dx + \frac{1}{x}(1-xy)\,dy$$

Moltiplicando l'equazione data per $\frac{1}{x^2}$, si ottiene:

$$0 = -\frac{y}{x^2}\,dx + \frac{1}{x}\,dy - y\,dy = d\left(\frac{y}{x} - \frac{y^2}{2}\right)$$

Pertanto in forma implicita le soluzioni sono descritte da

$$\frac{y}{x} - \frac{y^2}{2} = c, \qquad c\in\mathbb{R}.$$

Si ricavano le due soluzioni al variare di $c\in\mathbb{R}$

$$y(x) = \frac{1\pm\sqrt{1-2cx^2}}{x}.$$

Se $y(1) = 3$, si ha

$$y(x) = \frac{1+\sqrt{1+3x^2}}{x}.$$

Tale soluzione è definita in $]0,+\infty[$ e ammette un asintoto orizzontale $y=\sqrt{3}$ e verticale per $x=0$, il limite a 0^+ è $+\infty$ ed è strettamente decrescente.

Svolgimento (Esercizio 37)**.** Poniamo $F(x,y) = x^2+y^2-\cos(6xy)-1$. Si ha che l'insieme è simmetrico rispetto agli assi e alle bisettrici perché $F(x,y) = F(y,x) = F(x,-y) = F(-x,y)$.

(1) In coordinate polari, si ha

$$F(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) = \rho^2 - \cos(6\rho^2\cos\theta\sin\theta) - 1 = \rho^2 - \cos(3\rho^2\sin 2\theta) - 1.$$

Quindi:

$$\Gamma = \{(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta) : \rho^2-\cos(3\rho^2\sin 2\theta)-1 = 0, \rho>0, \theta\in[0,2\pi]\}.$$

(2) Si ha $F(x,0) = x^2-2$ da cui, sfruttando anche le simmetrie, le quattro intesezioni con gli assi sono $(\pm\sqrt{2},0)$, $(0,\pm\sqrt{2})$. Il differenziale di F è

$$dF(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\,dy = (2x+6y\sin(6xy))\,dx + (2y+6x\sin(6xy))\,dy.$$

Nei punti $(\pm\sqrt{2},0)$ si ha $\partial F_x(\pm\sqrt{2},0) = 0$, quindi le tangenti sono verticali e sono $x=\pm\sqrt{2}$. Per simmetria, nei punti $(0,\sqrt{2})$ le tangenti sono orizzontali e sono $y=\pm\sqrt{2}$. Nei punti $(0,\sqrt{2})$ il teorema di Dini è applicabile per ottenere una funzione implicita $y=\varphi(x)$ che esplicita Γ. Nei punti $(\pm\sqrt{2},0)$ invece no.

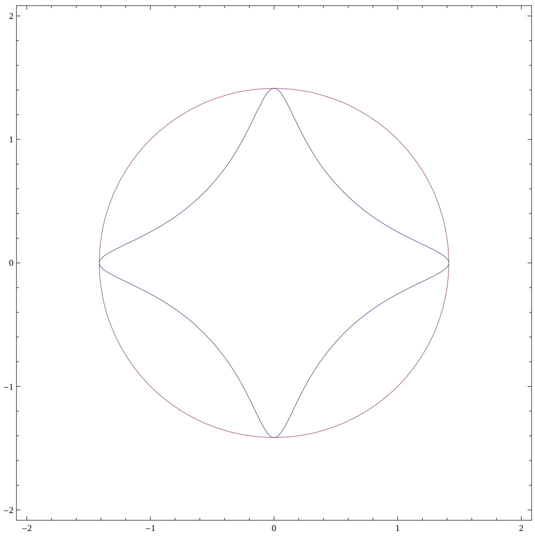


FIGURA 8. L'insieme $x^2 + y^2 - \cos(6xy) - 1 = 0$.

(3) Dall'espressione in coordinate polari si ha
$$\rho^2 = \cos(3\rho^2 \sin 2\theta) + 1 \leq 2,$$
e l'uguaglianza vale per $3\rho^2 \sin 2\theta = 0$ o in generale per $3\rho^2 \sin 2\theta = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Si ha che $F(0,0) \neq 0$, quindi $\rho \neq 0$. Allora dalla prima deve essere $\sin 2\theta = 0$ da cui $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. D'altra parte se $3\rho^2 \sin 2\theta = 2k\pi$, si ottiene $\rho^2 = 2$ quindi $6 \sin 2\theta = 2k\pi$ quindi $\sin 2\theta = k\pi/3$. Ma se $k \neq 0$, si ha $|k\pi/3| > 1$ quindi non ci sono soluzioni. Allora ρ^2 raggiunge il suo massimo nei punti di intersezione con gli assi e tale massimo vale 2. Essendo h composizione di funzioni strettamente monotone, il massimo di h è raggiunto nelle intersezioni con gli assi e vale $e^{\sqrt{2}} + 1$. Sebbene non richiesto, osserviamo che d'altra parte la derivata rispetto a θ di
$$g(\rho, \theta) = \rho^2 - \cos(3\rho^2 \sin 2\theta) - 1$$
è
$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = 6\rho^2 \cos(2\theta) \sin(3\rho^2 \sin(2\theta))$$
che si annulla per $\rho = 0$ (non accettabile), $\sin(2\theta) = 0$ (già discusso), $\cos 2\theta = 0$ il che implica $\theta = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$. In tali punti, si ha $\rho^2 = \cos(3\rho^2) + 1$ e tali punti sono punti di minimo per ρ^2.

(4) Si ha $\rho^2 \leq 2$ quindi l'insieme è limitato, poiché F è continua, l'insieme è chiuso quindi è compatto.

(5) l'insieme è invariante per rotazioni di periodo $\pi/2$ (dall'equazione in coordinate polari) e inoltre è simmetrico rispetto alle bisettrici del primo quadrante.

Svolgimento (Esercizio 38)**.** Consideriamo la mappa $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da $\varphi(x, y) = (x+y, x-y) =: (u, v)$. Si ha:
$$\mathrm{Jac}\, \varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$
Il determinante di tale matrice è $-2 \neq 0$, Quindi la trasformazione è globalmente invertibile. Sia $\psi = \varphi^{-1}$. Si ha $\Omega = \psi(D)$ con $D := \{(u, v) : |u| < 2, |v| < \pi\}$. L'elemento d'area è dato dal modulo del determinante dello Jacobiano di ψ, ovvero l'inverso del medesimo di φ, quindi $1/2$. Pertanto l'integrale richiesto vale:
$$\frac{1}{2} \int_{-2}^{2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{u^3}{27} \sin^2 v \, du \, dv = 0.$$
in quanto funzione dispari di u estesa ad un intervallo simmetrico rispetto all'origine.

Svolgimento (Esercizio 39)**.** Poniamo $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

(1) Si ha:

$$\operatorname{div}\vec{F}(x,y,z) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = 0.$$
$$\operatorname{rot}\vec{F}(x,y,z) = \det\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1(x,y,z) \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2(x,y,z) \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3(x,y,z) \end{pmatrix} = (-10z, 6-4x, 4-4y).$$

Poiché il rotore non è nullo, il campo non è conservativo.

(2) La curva γ è bordo del cerchio C centrato nell'origine, di raggio 1 e appartenente al piano $z = 0$. Per ottenere l'orientamento dato, è necessario orientare il cerchio con la normale verso l'alto, ovvero $(0,0,1)$. A questo punto per il teorema di Stokes si ha:

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_C \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_C (4-4y)\,d\sigma = 4\pi.$$

Verifichiamo il risultato per calcolo diretto:

$$\oint_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} \vec{F}\circ\gamma\cdot\dot{\gamma}d\theta = \int_0^{2\pi} (2\sin^2, 4\cos\theta, 2\cos^2)\cdot(-\sin\theta,\cos\theta,0)\,d\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} (-2\sin^3\theta + 4\cos^2\theta)\,d\theta = 4\pi.$$

(3) Si ha:

$$\operatorname{Jac}\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \big(3r^2-2r\big)\cos\theta & -\big(r^3-r^2+1\big)\sin(\theta) \\ \big(3r^2-2r\big)\sin\theta & \big(r^3-r^2+1\big)\cos(\theta) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

L'elemento d'area $d\sigma$, per la formula di Binet, è dato dalla radice della somma dei quadrati dei determinanti delle sottomatrici di ordine 2:

$$B_1 := \begin{pmatrix} \big(3r^2-2r\big)\cos\theta & -\big(r^3-r^2+1\big)\sin(\theta) \\ \big(3r^2-2r\big)\sin\theta & \big(r^3-r^2+1\big)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$
$$B_2 := \begin{pmatrix} \big(3r^2-2r\big)\cos\theta & -\big(r^3-r^2+1\big)\sin(\theta) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$B_3 := \begin{pmatrix} \big(3r^2-2r\big)\sin\theta & \big(r^3-r^2+1\big)\cos(\theta) \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$d\sigma = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3} = \big|r^3-r^2+1\big|\,\sqrt{9r^4-12r^3+4r^2+1}.$$

(4) si ha $(1,0,1) = \varphi(1,0)$. La normale è quindi il prodotto vettoriale delle colonne di $\operatorname{Jac}\varphi(1,0)$, ovvero il prodotto vettoriale di $(1,0,1)$ e $(0,1,0)$ quindi $(-1,0,1)$. La normale unitaria si ottiene dividendo tale prodotto per il modulo:

$$\hat{n}(1,0,1) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1,0,1).$$

(5) Il campo assegnato ha divergenza nulla. La superficie S non è una superficie chiusa, e il suo bordo è dato dalle circonferenze ($\theta\in[0,2\pi]$):

$$\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t, 0),\ \gamma_2(t) = (5\cos\theta, 5\sin\theta, 2)$$

Consideriamo quindi i due cerchi ausiliari C_1 e C_2, di cui γ_1 e γ_2 sono i bordi. Orientiamo C_1 con la normale $(0,0,-1)$, C_2 con la normale $(0,0,1)$ e S con la normale uscente a $C_1\cup C_2\cup S$. Per il teorema della divergenza si ha:

$$\begin{aligned}
\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma &= -\left(\iint_{C_1}\vec{F}\cdot\ \hat{n}\,d\sigma + \iint_{C_2}\vec{F}\cdot\ \hat{n}\,d\sigma\right)\\
&= -\left(\int_{C_1}(2y^2,4x,2x^2)(0,0,-1)\,dx\,dy + \int_{C_2}(2y^2+12,20+4x,2x^2)(0,0,1)\,dx\,dy\right)\\
&= 2\int_{C_1}x^2\,dx\,dy - 2\int_{C_2}x^2\,dx\,dy\\
&= 2\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\cos^2\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta - 2\int_0^{2\pi}\int_0^5 \rho^2\cos^2\theta\,\rho\,d\rho\,d\theta\\
&= 2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\cdot\int_0^1\rho^3\,d\rho - 2\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\cdot\int_0^5\rho^3\,d\rho\\
&= -312\pi.
\end{aligned}$$

Se sezioniamo S con il piano $z=1$, otteniamo il cerchio di raggio 1. La normale esterna a tale cerchio nel punto $(1,0)$ è $(1,0)$, mentre la proiezione della normale indotta dalla parametrizzazione è $(-1,0)$. Pertanto il flusso richiesto è l'opposto di quello calcolato, ossia 312π. Verifichiamo il risultato per calcolo diretto:

$$\iint_S \vec{F}\cdot\hat{n}\,d\sigma = \int_0^2\int_0^{2\pi}\det\left(\begin{array}{c|c} F_1\circ\varphi & \\ F_2\circ\varphi & \mathrm{Jac}\,\varphi \\ F_3\circ\varphi & \end{array}\right)d\rho\,d\theta$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi}\det\begin{pmatrix} 2\left(r^3-r^2+1\right)^2\sin^2(t)+6r & \left(3r^2-2r\right)\cos(t) & \left(-r^3+r^2-1\right)\sin(t)\\ 5r^2+4\left(r^3-r^2+1\right)\cos(t) & \left(3r^2-2r\right)\sin(t) & \left(r^3-r^2+1\right)\cos(t)\\ 2\left(r^3-r^2+1\right)^2\cos^2(t) & 1 & 0\end{pmatrix}dr\,dt$$

$$= 312\pi,$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 40)**.** Per applicare il metodo di separazione delle variabili cerchiamo soluzioni non nulle $u(x,t)=U(t)X(x)$. Sostituendo nell'equazione e dividendo per $U(t)X(x)$ si ha:

$$\frac{\dot{U}(t)}{U(t)} = 3\frac{\ddot{X}(x)}{X(x)} = \lambda\in\mathbb{R},$$

le equazioni divengono allora:

$$\dot{U}(t)=\lambda U(t), \qquad 3\ddot{X}(x)-\lambda X(x)=0$$

e dalle condizioni al contorno si ricava $\dot{X}(0)=\dot{X}(\pi)=0$. L'equazione caratteristica per $X(x)$ è $3\mu^2-\lambda=0$. Se $\lambda>0$ si ottiene la soluzione

$$X(x)=c_0e^{\sqrt{\lambda/3}x}+c_1e^{-\sqrt{\lambda/3}x}$$

Derivando:

$$\dot{X}(x)=c_0\sqrt{\lambda/3}e^{\sqrt{\lambda/3}x}-c_1\sqrt{\lambda/3}e^{-\sqrt{\lambda/3}x}$$

Valutando in 0 e ricordando le condizioni al contorno si ha $c_0=c_1$ perché $\lambda\neq 0$, da cui:

$$\dot{X}(x)=c_0\sqrt{\lambda/3}(e^{\sqrt{\lambda/3}x}-e^{-\sqrt{\lambda/3}x})$$

che valutata in π si annulla solo per $c_0=c_1=0$, quindi non è accettabile. Se $\lambda=0$ si ottiene la soluzione $X_0(x)=c_0+c_1x$, derivando e sostituendo le condizioni in $0,\pi$ si ottiene $c_1=0$, quindi la soluzione $X_0=c_0\in\mathbb{R}$ è accettabile. Se $\lambda<0$ si ottiene

$$X(x)=c_0\cos(\sqrt{|\lambda|/3}x)+c_1\sin(\sqrt{|\lambda|/3}x).$$

Derivando:

$$\dot{X}(x)=-c_0\sqrt{|\lambda|/3}\sin(\sqrt{|\lambda|/3}x)+c_1\sqrt{|\lambda|/3}\cos(\sqrt{|\lambda|/3}x).$$

Sostituendo la condizione in 0 si ottiene $c_1=0$ da cui:

$$\dot{X}(x)=-c_0\sqrt{|\lambda|/3}\sin(\sqrt{|\lambda|/3}x).$$

e sostituendo la condizione in π (e richiedendo $c_0 \neq 0$) si ha $\sqrt{|\lambda|/3} = n$ da cui $\lambda = -3n^2$ (si ricordi che $\lambda < 0$). Si ottiene quindi la soluzione accettabile $X_n(x) = c_n \cos(nx)$ relativa a $\lambda = -3n^2$, e questa scrittura comprende anche il caso $n = 0$. La soluzione per $U(t)$ relativa a questo dato è $U_n(t) = d_n e^{-3n^2 t}$. Pertanto rimangono definite le soluzioni elementari:

$$u_n(x,t) = U_n(t)X_n(x) = a_n e^{-3n^2 t}\cos(nx).$$

Cerchiamo di realizzare il dato iniziale con una sovrapposizione di soluzioni elementari. A tal proposito, consideriamo lo sviluppo in serie di Fourier di soli coseni di $x(\pi - x)$. Prolunghiamo tale funzione per parità in $[-\pi, \pi]$ e poi per 2π-periodicità:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|(\pi - |x|)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\cos nx\,dx = -\frac{2}{n^2}(1 + (-1)^n)$$
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |x|(\pi - |x|)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x(\pi - x)\,dx = \frac{\pi^2}{6}$$

I coefficienti dispari sono nulli. Si ricava ponendo $n = 2k$:

$$x(1 - x) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{k^2}.$$

La soluzione risulta allora:

$$u(x,t) = \frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-12k^2 t}\cos(2kx)}{k^2}.$$

Il termine generale della serie è maggiorato in modulo da $1/k^2$, quindi la serie converge totalmente e quindi assolutamente e uniformemente. Derivando due volte in x o una volta in t (per $t > 0$) si ottiene che il termine generale è maggiorato da una costante moltiplicata per $k^2 e^{-12k^2 t}$ termine generale di serie geometrica convergente, quindi la serie delle derivata prima in t e seconda in x convergono per $t > 0$, fornendo quindi una soluzione del problema.

Svolgimento (Esercizio 41)**.** Poniamo $F(x,y) = x^2 + y^2 - 4 + x^3y^3$. L'insieme è simmetrico rispetto all'origine perché $F(x,y) = F(-x,-y)$ e alla bisettrice del primo e terzo quadrante perché $F(x,y) = F(y,x)$.

(1) In coordinate polari si ha:

$$\Gamma = \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 : \rho^2 - 4 = \rho^6 \sin^3(2\theta)/8\}.$$

(2) Si ha $F(x,0) = x^2 - 4$ nullo in $x = \pm 2$. Pertanto i punti cercati sono $(\pm 2, 0)$ e i simmetrici rispetto alla bisettrice $(0, \pm 2)$. Calcoliamo il differenziale di F ricordando che $\partial_x F(x,y) = \partial_y F(y,x)$ per le simmetrie:

$$dF(x,y) = \partial_x F(x,y)\,dx + \partial_y F(x,y)\,dy = (3x^2y^3 + 2x)\,dx + (3y^2x^3 + 2y)\,dy$$

In particolare $dF(2,0) = 4\,dx$, quindi la retta tangente in $(2,0)$ è verticale ed ha equazione $x = 2$. Per simmetria, la tangente in $(-2,0)$ ha equazione $x = -2$ e le tangenti in $(0, \pm 2)$ hanno equazione $y = \pm 2$. Per il teorema di Dini, si ha la definizione di una funzione implicita $y = \varphi(x)$ in un intorno dei punti $(0, \pm 2)$, in quanto ivi $\partial_y F(0, \pm 2) \neq 0$, mentre $\partial_y F(\pm 2, 0) = 0$.

(3) Γ è chiuso perché F è continua. Osserviamo che

$$8\,\frac{\rho^2 - 4}{\rho^6} = \sin^3(2\theta).$$

Per $\rho > 0$ sufficientemente grande, il membro di sinistra è più piccolo di 1, ed è positivo, quindi la sua radice cubica è più piccola di 1 e quindi si ha

$$\sin(2\theta) = \sqrt[3]{8\,\frac{\rho^2 - 4}{\rho^6}}.$$

che è risolubile in θ. Pertanto per ogni valore di $\rho > 0$ sufficientemente grande si ha che esiste un valore di θ tale per cui il punto $(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \Gamma$, quindi Γ non è limitato, perciò non è compatto.

(4) In Γ si ha $\rho^2 - 4 = -\rho^6 \sin^3(2\theta)/8$, da cui $h(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)_{|\Gamma} = \frac{\rho^2}{4} e^{-\rho^2/4}$. Studiamo la funzione $h(r) = \frac{r^2}{4} e^{-r^2/4}$ per $r > 0$: essa ammette un unico punto di minimo assoluto in $r = 0$ e si ha $h(0) = 0$, inoltre per $r \to +\infty$ si ha $h(r) \to 0^+$. La derivata è

$$h'(r) = -\frac{1}{8} e^{-\frac{r^2}{4}} r \left(r^2 - 4\right),$$

che si annulla in $r = 2$. Ivi la funzione raggiunge il suo massimo e vale $1/e$. Si ha che $(0, 0) \neq \Gamma$, quindi $\rho = 0$ non è accettabile. Osserviamo che poiché Γ non è limitato, esiste una successione di punti in Γ lungo cui h tende a zero, pertanto non esistono punti di minimo. L'estremo inferiore di h è 0 che non è assunto. Invece esistono punti in Γ tali per cui $\rho = 2$. Infatti tali punti soddisfano

$$0 = -4 \sin^3(2\theta)/8$$

da cui $\sin 2\theta = 0$ quindi $\theta = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$. I punti di massimo vincolato sono quindi $(\pm 2, 0)$ e $(0, \pm 2)$.

(5) Studiamo i segni di $\partial_x F$ e $\partial_y F$. Si ha $\partial_x F(x, y) > 0$ per $3x^2y^3 + 2x > 0$ da cui $x(3xy^3 + 2) > 0$. Consideriamo le curve $x = 0$, $3xy^3 + 2 = 0$ da cui $x = -2/(3y^3)$ e le simmetriche $y = 0$, $y = -2/(3x^3)$ dividono il piano in varie regioni. Le curve $x = -2/(3y^3)$ e $y = -2/(3x^3)$ si incontrano nel punto della bisettrice $y = -x$ dato da $x^4 = 2/3$ ossia $x = \pm\sqrt[4]{2/3}$. Il piano risulta quindi diviso in varie regioni a seconda del segno delle derivate parziali di F. In particolare, sappiamo che attorno al punto $(2, 0)$ è possibile esplicitare Γ come funzione $y = \varphi(x)$, il che vuol dire che attorno a $(0, 2)$ vi sono punti di Γ del primo quadrante ossia con $x > 0$, $y > 0$. In tutto il primo quadrante si ha $\partial_x F(x, y) > 0$ e $\partial_y F(x, y) > 0$ quindi $-\dfrac{\partial_y F(x, y)}{\partial_x F(x, y)} < 0$, quindi se $(x_0, y_0) \in \Gamma$ appartiene a questa regione, localmente Γ attorno a tale punto è grafico di una funzione strettamente decrescente. Pertanto da $(0, 2)$ parte una curva $y = \psi(x)$ nel primo quadrante strettamente decrescente e simmetrica rispetto a $y = x$ che raggiunge l'unica intersezione con l'asse delle x ovvero $(2, 0)$. Poiché $\nabla F(x, y) \neq 0$ in tutto il quadrante, non si hanno altri rami di Γ nel primo quadrante.
Per $x < 0$ sufficientemente piccolo, e y vicino a 2, si ha che $\partial_y F(x, y) > 0$ (in quanto $\partial_y F(0, 2) = 4 > 0$), mentre $\partial_x F(x, y) < 0$ in quanto per x piccolo tale derivata è $2x + (2-\varepsilon)x^2 < 2x + x^2y^3 < 2x + (2+\varepsilon)x^2 < 0$ se $x < 0$ è sufficientemente piccolo. Pertanto il punto $x = 0$ è un massimo locale per la curva $y = \varphi(x)$ che esplicita localmente Γ. Osserviamo ora i seguenti fatti: nel punto $x = -1/3$, sostituendo nella curva $3y^3x + 2 = 0$ si ottiene $y = \sqrt[3]{2}$ e si ha $F(-1/3, \sqrt[3]{2}) < 0$, mentre per $x \to 0^-$ si ha $y \to +\infty$ e $F(x, y) \to +\infty$ per (x, y) vincolato a $3y^3x + 2 = 0$. Quindi la curva che esplicita Γ incontra la curva $3y^3x + 2 = 0$ in un punto compreso tra $x = -1/3$ e 0, entrando così in una regione di crescita, da cui non esce più. Per simmetria, si ricostruisce il grafico completo.

Svolgimento (Esercizio 42)**.** Consideriamo la mappa $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^2$ data da $\varphi(x, y) = (x - y, x + y)$. Lo Jacobiano di tale mappa è

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

il cui determinante è 2. Poiché esso è diverso da zero, la trasformazione è invertibile, sia $\psi = \varphi^{-1}$. Poniamo $D = \varphi(\Omega)$. Si ha $D = [-\pi, \pi] \times [-1, 1]$ dalla definizione di Ω e di φ, inoltre $\Omega = \psi(D)$ e

$$\mathrm{Jac}\,\psi(u, v) = [\mathrm{Jac}\,\varphi]^{-1}(\varphi(u, v))$$

da cui $\det\mathrm{Jac}\,\psi(u, v) = 1/2$, pertanto

$$\iint_\Omega f(x, y)\, dx\, dy = \iint_D f \circ \psi(u, v) |\mathrm{Jac}\,\psi(u, v)|\, du\, dv.$$

Nel nostro caso si ha:

$$\iint_\Omega \frac{\sin(x - y)}{1 + (x + y)^2}\, dx\, dy = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sin u}{1 + v^2}\, du\, dv = 0.$$

Svolgimento (Esercizio 43)**.** Poniamo $\varphi(\theta, y) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ e $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$.

(1) Si ha

$$\mathrm{div}\vec{F}(x, y, z) = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3 = -3,$$

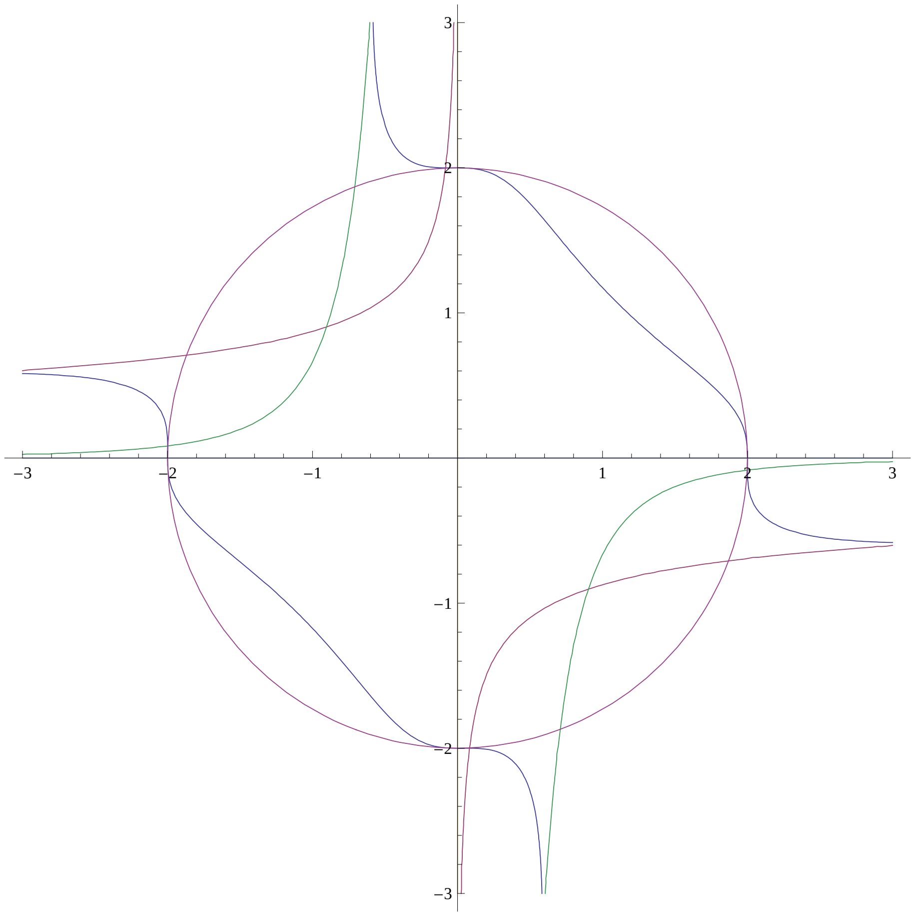


FIGURA 9. L'insieme $x^2 + y^2 - 4 + x^3y^3 = 0$ e alcune curve significative.

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \partial_x & F_1 \\ \vec{e}_2 & \partial_y & F_2 \\ \vec{e}_3 & \partial_z & F_3 \end{pmatrix} = (1, 2x + 8z, -1).$$

Poiché il rotore non è nullo, il campo non è conservativo.

(2) Per calcolo diretto si ha:

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{F}\, d\gamma &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} \Big(3\cos(t), -6\sin(t) - \cos(t) + 2, \sin(t) - \cos^2(t)\Big) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} -\cos t(-2 + \cos t + 9 \sin t)\, dt = \int_0^{2\pi} -\cos^2 t\, dt = -\pi \end{aligned}$$

Quindi la circuitazione non è nulla, il che conferma come $\vec{F}$ non sia conservativo.

(3) La matrice Jacobiana è

$$\operatorname{Jac} \varphi(\theta, y) = \begin{pmatrix} \left(v^2+1\right)^2 \cos(u) & 4v\left(v^2+1\right)\sin(u) \\ 0 & 4v^3 \\ -\left(v^2+1\right)^2 \sin(u) & 4v\left(v^2+1\right)\cos(u) \end{pmatrix}$$

Per la formula di Binet, l'elemento d'area è:

$$\omega_2 = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}$$

dove

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 4v^3 \\ -\left(v^2+1\right)^2\sin(u) & 4v\left(v^2+1\right)\cos(u) \end{pmatrix},$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} \left(v^2+1\right)^2\cos(u) & 4v\left(v^2+1\right)\sin(u) \\ -\left(v^2+1\right)^2\sin(u) & 4v\left(v^2+1\right)\cos(u) \end{pmatrix},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} \left(v^2+1\right)^2\cos(u) & 4v\left(v^2+1\right)\sin(u) \\ 0 & 4v^3 \end{pmatrix},$$

da cui

$$\omega_2 = 4\sqrt{v^2\left(v^2+1\right)^4\left(2v^4+2v^2+1\right)} = 4v\left(v^2+1\right)^2\sqrt{2v^4+2v^2+1},$$

ove si può omettere il modulo su v perché $0 \le v \le 1$.

(4) Una base dello spazio tangente è data dalle colonne della matrice Jacobiana di φ. In particolare, nel punto $\left(\frac{25}{16}, \frac{1}{16}, 0\right) = \varphi(\pi/2, 1/2)$ si ha $(0,0,-25/16)$ e $(5/2,1/2,0)$. La normale (non unitaria) è data dal prodotto vettoriale di tali vettori ed è pari a

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & 0 & 5/2 \\ \vec{e}_2 & 0 & 1/2 \\ \vec{e}_3 & -25/16 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{25}{32}, -\frac{125}{32}, 0\right).$$

Pertanto

$$\hat{n}(P) = \frac{16\sqrt{\frac{2}{13}}}{25}\left(\frac{25}{32}, -\frac{125}{32}, 0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{26}}, -\frac{5}{\sqrt{26}}, 0\right).$$

(5) Per il teorema di Stokes, il flusso del rotore è pari alla circuitazione del campo sul bordo della superficie con l'orientamento indotto. Tale bordo è contenuto nell'insieme parametrizzato dalle curve $\gamma_1, \gamma_3 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ e $\gamma_2, \gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ che descrivono l'immagine tramite φ della frontiera dello spazio dei parametri percorsa in senso antiorario, ossia

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= \varphi(t,0) = (\sin(t), 0, \cos(t)),\\
\gamma_2(t) &= \varphi(2\pi, t) = \left(0, t^4, -\left(t^2+1\right)^2\right),\\
\gamma_3(t) &= \varphi(2\pi - t, 1) = (4\sin(t), 1, -4\cos(t)),\\
\gamma_4(t) &= \varphi(0, 1-t) = (0, (1-t)^4, \left((1-t)^2+1\right)^2).
\end{aligned}$$

Il contributo dato da γ_1 e γ_3 deve essere complessivamente nullo, in quanto si tratta della stessa curva percorsa nei due sensi opposti. Per il teorema di Stokes:

$$\begin{aligned}
\Phi(S, \operatorname{rot}\vec{F}) &= \int_{\gamma_1}\vec{F}\cdot d\ell + \int_{\gamma_2}\vec{F}\cdot d\ell + \int_{\gamma_3}\vec{F}\cdot d\ell + \int_{\gamma_4}\vec{F}\cdot d\ell\\
&= \int_0^{2\pi} \sin^3(t) + \cos(t)\left(3\sin(t) + 4\cos^2(t)\right)\,dt + \int_0^1 4\left(t^2+1\right)t^5 + 4\left(2-6t^4\right)t^3\,dt+\\
&+ \int_0^{2\pi} -4\sin(t)\left(1-16\sin^2(t)\right) - 4\cos(t)\left(64\cos^2(t) - 12\sin(t)\right)\,dt+\\
&+ \int_0^1 -4\left((1-t)^2+1\right)(1-t)^5 - 4\left(2-6(1-t)^4\right)(1-t)^3\,dt.
\end{aligned}$$

Gli integrali estesi da 0 a 2π si annullano in quanto:

$$\int_0^{2\pi}\sin^3 t\,dt = \int_{-\pi}^{\pi}\sin^3 t\,dt = 0 (\text{periodicità e disparità della funzione seno}),$$

$$\int_0^{2\pi}\cos^3 t\,dt = \int_0^{2\pi}\cos t(1-\sin^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi}\cos t\,dt - \int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos t\,dt = -[\sin^3 t]_{t=0}^{t=2\pi}/6 = 0.$$

$$\int_0^{2\pi}\sin t\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin 2t\,dt = 0.$$

Risulta quindi:

$$\Phi(S,\operatorname{rot}\vec{F}) = \int_0^1 (-40t^7 + 140t^6 - 412t^5 + 680t^4 - 644t^3 + 356t^2 - 96t + 8)\,dt = 0.$$

Per calcolo diretto si ha:

$$\Phi(S,\operatorname{rot}\vec{F}) = \int_0^1 \int_0^{2\pi} \det \begin{pmatrix} 1 & \left(v^2+1\right)^2\cos(u) & 4v\left(v^2+1\right)\sin(u) \\ 8\cos(u)\left(v^2+1\right)^2 + 2\sin(u)\left(v^2+1\right)^2 & 0 & 4v^3 \\ -1 & -\left(v^2+1\right)^2\sin(u) & 4v\left(v^2+1\right)\cos(u) \end{pmatrix} du\,dv$$

$$\begin{aligned} &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} -\left(2\left(v^2+1\right)^2\sin(u) + 8\left(v^2+1\right)^2\cos(u)\right)\left(4v\left(v^2+1\right)^3\sin^2(u) + 4v\left(v^2+1\right)^3\cos^2(u)\right) + \\ &\quad - 4v^3\left(\left(v^2+1\right)^2\cos(u) - \left(v^2+1\right)^2\sin(u)\right)\,du\,dv = 0, \end{aligned}$$

che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 44)**.** In forma di equazione totale si ha

$$\omega(x,y) = p(x,y)\,dx + q(x,y)\,dy = \left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\,dx + (x^2+y^2)\,dy = 0.$$

Si ha

$$\partial_y p - \partial_x q = x^2 + y^2 = 1 \cdot q(x,y),$$

quindi si ha un fattore integrante della forma $h(x) = e^{\int 1\,dx} = e^x$. Pertanto l'equazione totale

$$e^x\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\,dx + e^x(x^2+y^2)\,dy = 0$$

è esatta. Per trovare una primitiva, integriamo la forma lungo una spezzata con i lati paralleli agli assi congiungente $(0,0)$ al generico punto (x_0,y_0):

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{y_0} e^{x_0}(x_0^2 + y^2)\,dy = e^{x_0}y_0(x_0^2 + y_0^2/3)$$

Pertanto $V(x,y) = ye^x(x^2 + y^2/3)$ e la soluzione in forma implicita è $V(x,y) = C$, $C \in \mathbb{R}$. La soluzione corrispondente alle condizioni iniziali si ottiene ponenedo $C = V(0,\sqrt[3]{2}) = 1$, ossia: $ye^x(x^2+y^2/3) = 1$.

Svolgimento (Esercizio 45)**.** Poniamo $F(x,y) = \left(x^2+y^2\right)^{5/2} - \left(x^2+y^2\right)^2 - \left(3x^2+y^2\right)^2$. L'insieme è simmetrico rispetto agli assi e origine: $F(\pm x, \pm y) = F(x,y)$ per ogni scelta possibile dei segni.

(1) In coordinate polari si ha:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 :\ \rho^4\left(-\left(2\cos^2(\theta)+1\right)^2 + \rho - 1\right) = 0\} \\ &= \{(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \in \mathbb{R}^2 :\ \rho = 1 + \left(2\cos^2(\theta)+1\right)^2\} \cup \{(0,0)\} \end{aligned}$$

(2) Per $\theta = 0, \pi$, si ottiene $\rho = 10$ e per $\rho = \pi/2, 3\pi/2$ si ha $\rho = 2$. Quindi i punti cercati sono $(\pm 10, 0)$, $(0,\pm 2)$, $(0,0)$. Calcoliamo il differenziale di F:

$$\begin{aligned} dF(x,y) &= \partial_x F(x,y)\,dx + \partial_y F(x,y)\,dy \\ &= x\left(5\left(x^2+y^2\right)^{3/2} - 40x^2 - 16y^2\right)\,dx + \\ &\quad + y\left(5\left(x^2+y^2\right)^{3/2} - 16x^2 - 8y^2\right)\,dy. \end{aligned}$$

In particolare $\partial_y F(\pm 10, 0) = 0$, quindi le retta tangenti in $(\pm 10, 0)$ sono verticali ed hanno equazione $x = \pm 10$. Analogamente, $\partial_x F(0,\pm 2) = 0$ e le tangenti in $(0,\pm 2)$ hanno equazione $y = \pm 2$ (rette orizzontali). Per il teorema di Dini, si ha la definizione di una funzione implicita $y = \varphi(x)$ in un intorno dei punti $(0,\pm 2)$, in quanto ivi $\partial_y F(0,\pm 2) \neq 0$, mentre $\partial_y F(\pm 10, 0) = 0$.

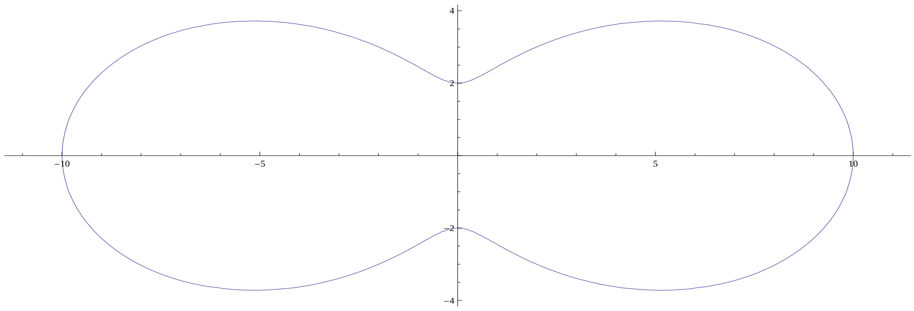


Figura 10. L'insieme $\left(x^2+y^2\right)^{5/2}-\left(x^2+y^2\right)^2-\left(3x^2+y^2\right)^2=0$.

(3) Γ è chiuso perché F è continua. Dall'equazione in coordinate polari, abbiamo che ρ è limitato, quindi Γ è compatto. Sempre dall'equazione in coordinate polari, osserviamo che se $(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\in\Gamma)$ allora o $\rho=0$ oppure $\rho\geq 1$, quindi l'origine è un punto isolato. Pertanto $\Gamma\setminus\{(0,0)\}$ e chiuso e limitato (perché Γ lo è) quindi compatto.
(4) Osserviamo che $h(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)=\log\arctan\rho^2$ è una funzione strettamente crescente di ρ, quindi i suoi massimi e minimi sono raggiunti in corrispondenza dei massimi e minimi di ρ vincolati a $\Gamma\setminus\{(0,0)\}$. Tali massimi sono raggiunti per $\rho=10$, $\theta\in\{0,\pi\}$, quindi nei punti $(\pm 10,0)$ e il valore massimo è $\log\arctan(100)$, mentre i minimi sono raggiunti per $\rho=2$ quindi nei punti con $\cos\theta=0$, ovvero $\theta=\pi/2,3\pi/2$, ossia $(0,\pm 2)$, e il valore minimo è $\log\arctan 4$.
(5) Osserviamo che per $0<\theta<\pi/2$ si ha che ρ è strettamente crescente dal suo massimo 10 al suo minimo 2. Si ricostruisce grazie alle simmetrie il grafico completo.

Svolgimento (Esercizio 46)**.** Consideriamo la mappa $\varphi:\Omega\to\mathbb{R}^2$ data da $\varphi(x,y)=(x-y,x+y)$. Lo Jacobiano di tale mappa è

$$\mathrm{Jac}\,\varphi(x,y)=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix},$$

il cui determinante è 2. Poiché esso è diverso da zero, la trasformazione è invertibile, sia $\psi=\varphi^{-1}$. Poniamo $D=\varphi(\Omega)$. Si ha $D=[-\pi,\pi]\times[-1,1]$ dalla definizione di Ω e di φ, inoltre $\Omega=\psi(D)$ e

$$\mathrm{Jac}\,\psi(u,v)=[\mathrm{Jac}\,\varphi]^{-1}(\varphi(u,v))$$

da cui $\det\mathrm{Jac}\,\psi(u,v)=1/2$, pertanto

$$\iint_\Omega f(x,y)\,dx\,dy=\iint_D f\circ\psi(u,v)|\mathrm{Jac}\,\psi(u,v)|\,du\,dv.$$

Nel nostro caso si ha:

$$\iint_\Omega \frac{(x-y)e^{-(x-y)^2}}{1+(x+y)^2}\,dx\,dy=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{ue^{-u^2}}{1+v^2}\,du\,dv=0.$$

Svolgimento (Esercizio 43)**.** Poniamo $\varphi(\theta,y)=(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ e $\vec{F}=(F_1,F_2,F_3)$.

(1) Si ha

$$\mathrm{div}\vec{F}(x,y,z)=\partial_x F_1+\partial_y F_2+\partial_z F_3=4,$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{F}=\det\begin{pmatrix}\vec{e}_1&\partial_x&F_1\\\vec{e}_2&\partial_y&F_2\\\vec{e}_3&\partial_z&F_3\end{pmatrix}=(3,2x+8z,-4).$$

Poiché il rotore non è nullo, il campo non è conservativo.

(2) Per calcolo diretto si ha:

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \vec{F}\, d\gamma &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\cos t, \sin t, 0) \cdot (-\sin t, 3\cos t, 0)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(6\sin(t) + 5\cos(t), -3\sin(t) - 2\cos(t), 12\sin(t) - \cos^2(t)\Big) \cdot (-\sin t, \cos t, 0)\, d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} -6 - 7\sin 2t\, dt = -12\pi.
\end{aligned}$$

Quindi la circuitazione non è nulla, il che conferma come $\vec{F}$ non sia conservativo.
Più brevemente: la curva γ è il bordo di un'ellisse $\mathcal{E}$ nel piano $z = 0$ centrata nell'origine e di semiassi 1 e 3. Dalla regola della mano destra, per indurre l'orientamento richiesto sul bordo, è necessario che la normale a tale ellisse sia rivolta verso l'alto, ossia $\hat{n} = (0, 0, 1)$. Per il teorema di Stokes, la circuitazione è il flusso del rotore, quindi

$$\int_\gamma \vec{F}\, d\gamma = \int_{\mathcal{E}} \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \hat{n}\, d\sigma = -4 \int_{\mathcal{E}} d\sigma = -4\, \operatorname{Area}(\mathcal{E}) = -12\pi,$$

essendo l'area di un'ellisse pari a π moltiplicato per il prodotto dei semiassi.

(3) La matrice Jacobiana è

$$\operatorname{Jac}\varphi(\theta, y) = \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ v^2\cos(u) & 2v\sin(u) \\ -\left(v^2+1\right)\sin(u) & 2v\cos(u) \end{pmatrix}$$

Per la formula di Binet, l'elemento d'area è:

$$\omega_2 = \sqrt{\det^2 B_1 + \det^2 B_2 + \det^2 B_3}$$

dove

$$\begin{aligned}
B_1 &= \begin{pmatrix} v^2\cos(u) & 2v\sin(u) \\ -\left(v^2+1\right)\sin(u) & 2v\cos(u) \end{pmatrix}, \\
B_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ -\left(v^2+1\right)\sin(u) & 2v\cos(u) \end{pmatrix}, \\
B_3 &= \begin{pmatrix} 0 & 2v \\ v^2\cos(u) & 2v\sin(u) \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

da cui

$$\omega_2 = \sqrt{4v^6\cos^2(u) + \left(-v\cos(2u) + 2v^3 + v\right)^2 + 4\left(v^2+1\right)^2 v^2\sin^2(u)}.$$

Allo stesso risultato si ottiene calcolando il prodotto esterno delle colonne della matrice Jacobiana della parametrizzazione.

(4) Una base dello spazio tangente è data dalle colonne della matrice Jacobiana di φ. In particolare, nel punto $P(2, 1, 0) = \varphi(\pi/2, 1)$ si ha $(0, 0, -2)$ e $(2, 2, 0)$. La normale (non unitaria) è data dal prodotto vettoriale di tali vettori ed è pari a

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 & 0 & 2 \\ \vec{e}_2 & 0 & 2 \\ \vec{e}_3 & -2 & 0 \end{pmatrix} = (4, -4, 0)\,.$$

Pertanto

$$\hat{n}(P) = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(1, -1, 0)\,.$$

(5) Per il teorema di Stokes, il flusso del rotore è pari alla circuitazione del campo sul bordo della superficie con l'orientamento indotto. Tale bordo è contenuto nell'insieme parametrizzato dalle curve γ_1, γ_3 :

$[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ e $\gamma_2, \gamma_4 : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ che descrivono l'immagine tramite φ della frontiera dello spazio dei parametri percorsa in senso antiorario, ossia

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &= \varphi(t,0) = (1,0,\cos(t)),\\
\gamma_2(t) &= \varphi(2\pi,t) = \left(t^2+1, 0, t^2+1\right),\\
\gamma_3(t) &= \varphi(2\pi - t, 1) = (2, -\sin(t), 2\cos(t)),\\
\gamma_4(t) &= \varphi(0, 1-t) = ((1-t)^2+1, 0, (1-t)^2+1).
\end{aligned}$$

Il contributo dato da γ_2 e γ_4 deve essere complessivamente nullo, in quanto si tratta della stessa curva percorsa nei due sensi opposti. Per il teorema di Stokes:

$$\begin{aligned}
\Phi(S, \operatorname{rot}\vec{F}) &= \int_{\gamma_1} \vec{F}\cdot d\ell + \int_{\gamma_2} \vec{F}\cdot d\ell + \int_{\gamma_3} \vec{F}\cdot d\ell + \int_{\gamma_4} \vec{F}\cdot d\ell\\
&= \int_0^{2\pi} (4\cos^2(t)+5, \cos(t)-2, -1)(0,0,-\sin(t))\, dt +\\
&+ \int_0^1 \left(4\left(t^2+1\right)^2 + 5\left(t^2+1\right), t^2 - 2\left(t^2+1\right)+1, -\left(t^2+1\right)^2\right)(2t, 0, 2t)\, dt +\\
&+ \int_0^{2\pi} \left(-2\sin(t) + 16\cos^2(t) + 10, \sin(t) + 2\cos(t) - 4, -4\sin(t) - 4\right)(0, -\cos(t), -2\sin(t))\, dt +\\
&+ \int_0^1 (4\left((1-t)^2+1\right)^2 + 5\left((1-t)^2+1\right), (1-t)^2 - 2\left((1-t)^2+1\right)+1, -\left((1-t)^2+1\right)^2)\cdot\\
&\cdot (-2(1-t), 0, -2(1-t))\, dt.
\end{aligned}$$

Gli integrali estesi da 0 a 1 sono l'uno opposto dell'altro (si usi il cambio di variabile $y = 1-t$) Risulta quindi:

$$\begin{aligned}
\Phi(S, \operatorname{rot}\vec{F}) &= \int_0^{2\pi} \sin t\, dt + \int_0^{2\pi} \left(-2(-4\sin(t)-4)\sin(t) - \cos(t)(\sin(t) + 2\cos(t) - 4)\right)\, dt\\
&= \int_0^{2\pi} (8\sin^2(t) + 8\sin(t) - 2\cos^2(t) + 4\cos(t) - \sin(t)\cos(t))\, dt = 6\pi
\end{aligned}$$

Per calcolo diretto si ha:

$$\begin{aligned}
\Phi(S, \operatorname{rot}\vec{F}) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \det \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2v \\ 8\cos(u)\left(v^2+1\right) + 2\left(v^2+1\right) & v^2\cos(u) & 2v\sin(u) \\ -4 & -\left(v^2+1\right)\sin(u) & 2v\cos(u) \end{pmatrix} du\, dv\\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(v^2\cos(u)(6v\cos(u) + 8v) + \right.\\
&\quad \left. + \left(v^2+1\right)\sin(u)\left(-16v^3\cos(u) + 6v\sin(u) - 16v\cos(u) - 4v^3 - 4v\right)\right) du\, dv\\
&= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(-4v^5\sin(u) - 16v^5\sin(u)\cos(u) + 6v^3\sin^2(u) - 8v^3\sin(u) + 6v^3\cos^2(u) + 8v^3\cos(u) + \right.\\
&\quad \left. -32v^3\sin(u)\cos(u) + 6v\sin^2(u) - 4v\sin(u) - 16v\sin(u)\cos(u)\right) du\, dv = 6\pi,
\end{aligned}$$

(ricordando che i termini in cui compaiono potenze dispari di seno e coseno si annullano nell'integrazione) che conferma il risultato precedente.

Svolgimento (Esercizio 48)**.** Applichiamo il metodo di separazione delle variabili cercando soluzioni non identicamente nulle della forma $u(t,x) = U(t)X(x)$. Sostituendo e dividendo per $U(t)X(x)$, si ottiene:

$$\frac{\dot{U}(t)X(t)}{U(t)X(x)} - \frac{2U(t)\ddot{X}(x)}{U(t)X(x)} + 1 = 0$$

da cui:

$$\frac{\dot{U}(t)}{U(t)} = \frac{2\ddot{X}(x)}{X(x)} - 1 = \lambda \in \mathbb{R}$$

pertanto si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} \dot{U}(t) & = \lambda U(t), \\ 2\ddot{X}(x) & = (\lambda+1)X(x). \end{cases}$$

L'equazione per U ha soluzione $U(t) = de^{-\lambda t}$. Le condizioni al contorno $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ porgono $\dot{X}(0) = \dot{X}(\pi) = 0$. L'equazione caratteristica per $X(x)$ è $2\mu^2 - (\lambda+1) = 0$. Se $\lambda > 1$ si ottengono due soluzioni reali distinte μ_1, μ_2, di cui almeno una diversa da zero e di segno opposto. e la soluzione è $X(x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x}$. Derivando, $\dot{X}(x) = c_1\mu_1 e^{\mu_1 x} + c_2\mu_2 e^{\mu_2 x}$ Imponendo le condizioni al contorno in 0 si ha $c_1 + c_2 = 0$, quindi $\dot{X}(x) = c_1(\mu_1 e^{\mu_1 x} - \mu_2 e^{\mu_2 x})$ Le condizioni in π impongono o $c_1 = 0$ oppure $\mu_1 e^{\mu_1 \pi} = \mu_2 e^{\mu_2 \pi}$. La seconda eventualità va esclusa, perché le soluzioni hanno segno opposto e non nulle. Quindi $c_1 = c_2 = 0$, ma questo non è accettabile.
Se $\lambda = -1$ si ha la soluzione doppia $\mu = 0$, la soluzione generale è $X(x) = c_1 + c_2 x$, la cui derivata è identicamente c_2, che quindi deve essere nulla. Allora si ha la soluzione costante $X(x) = c_1$, $c_1 \neq 0$.
Se $\lambda < -1$ si hanno due soluzioni puramente immaginarie di segno opposto: $\mu_1 = i\sqrt{|\lambda+1|/2}$, $\mu_2 = -i\sqrt{|\lambda+1|/2}$. La soluzione generale ha forma $X(x) = c_1\cos(\sqrt{|\lambda-1|/2}\,x) + c_2\sin(\sqrt{|\lambda+1|/2}\,x)$, la cui derivata è $\dot{X}(x) = \sqrt{|\lambda+1|/2}(-c_1\sin(\sqrt{|\lambda+1|/2}\,x) + c_2\cos(\sqrt{|\lambda+1|/2}\,x))$. La condizione in $x = 0$ porge $c_2 = 0$, e la condizione in π porge $c_1 = 0$ (non accettabile) oppure $\sqrt{|\lambda+1|/2} = n$, $n \in \mathbb{Z}$. Quindi $\lambda = -2n^2 - 1$ tenendo conto del fatto che $\lambda + 1 < 0$. Si ottiene quindi la soluzione $X_n(x) = c_n \cos nx$ relativa a $\lambda = -2n^2 - 1$. Questa scrittura comprende anche il caso $\lambda = -1$. Sostituendo i valori di λ accettabili, si ottiene $U_n(t) = d_n e^{(-2n^2-1)t}$. Quindi si hanno le soluzioni elementari, posto $a_n = c_n d_n$:

$$u_n(t,x) = U_n(t)X_n(x) = a_n e^{(-2n^2-1)t}\cos nx.$$

Per determinare i coefficienti a_n, sviluppiamo in serie di Fourier di soli coseni il dato iniziale, ovvero prolunghiamo il dato iniziale ad una funzione pari definita in $[-\pi,\pi]$ e poi per 2π-periodicità a tutto $\mathbb{R}$.

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_{[0,\pi/2]}(|x|)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}dx = 1,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\chi_{[0,\pi/2]}(|x|)\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos nx\,dx = \frac{2}{n\pi}[\sin nx]_{x=0}^{x=\pi/2} = \frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi}.$$

Quindi:

$$\chi_{[0,\pi/2]}(|x|) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi}\cos(nx).$$

La soluzione è pertanto:

$$u(t,x) = \frac{e^{-t}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi}e^{(-2n^2-1)t}\cos(nx).$$

Si ha per $t > 0$, $x \in]0,\pi[$:

$$\sum_{n=1}^{N}|u_n(t,x)| = \sum_{n=1}^{N}\left|\frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi}e^{(-2n^2-1)t}\cos(nx)\right| \le \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}e^{(-2n^2-1)t},$$

$$\sum_{n=1}^{N}|\partial_t u_n(t,x)| = \sum_{n=1}^{N}\left|\frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi}(-2n^2-1)e^{(-2n^2-1)t}\cos(nx)\right| \le \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\frac{2n^2+1}{n}e^{(-2n^2-1)t},$$

$$\sum_{n=1}^{N}|\partial_{xx} u_n(t,x)| = \sum_{n=1}^{N}n^2\left|\frac{2\sin(n\pi/2)}{n\pi}e^{(-2n^2-1)t}\cos(nx)\right| \le \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}ne^{(-2n^2-1)t}.$$

Se $t_0 > 0$ è fissato, per n sufficientemente grande e $t > t_0$, si ha che $\frac{2n^2+1}{n}e^{(-2n^2-1)t} < \frac{2n^2+1}{n}e^{(-2n^2-1)t_0}$, $ne^{(-2n^2-1)t} < ne^{(-2n^2-1)t_0}$ e $e^{(-2n^2-1)t}/n < e^{(-2n^2-1)t_0}/n$, e tutti e tre sono minori di $1/n^2$, quindi le serie convergono puntualmente e uniformemente su ogni sottinsieme $[\varepsilon,+\infty[\times]0,\pi[$ con $\varepsilon > 0$, e pertanto $u(t,x)$ è soluzione del problema.

Dipartimento di Informatica, Università di Verona
Strada Le Grazie 15 - I-37134 Verona, Italy.
E-mail address: antonio.marigonda@univr.it