Analisi Matematica per Bio-Informatici
Esercitazione 09 – a.a. 2007-2008

Dott. Simone Zuccher

31 Gennaio 2008

Nota. Queste pagine potrebbero contenere degli errori: chi li trova è pregato di segnalarli all'autore (zuccher@sci.univr.it).

1 Calcolo di limiti tramite sviluppi in serie di Taylor

Richiami utili al calcolo di limiti tramite sviluppi in serie di Taylor

- Sviluppi di McLaurin (ossia sviluppi di Taylor centrati nell'origine) per le principali funzioni.

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)\\
\log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)\\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots +\\
&\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\cdots\cdot(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)\\
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})\\
\arctan x &= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})\\
\tan x &= x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4)\\
\arcsin x &= x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\\
\arccos x &= \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)
\end{aligned}
$$

- Proprietà del simbolo “o piccolo” o. $\forall m, n \in \mathbb{N}$ si ha:
  1. $o(x^n) \pm o(x^n) = o(x^n)$
  2. $a \cdot o(x^n) = o(x^n)$
  3. $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
  4. $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n})$
  5. $o(o(x^n)) = o(x^n)$
  6. $o(x^n + o(x^n)) = o(x^n)$

Esercizio 1.1 *Determinare gli sviluppi di McLaurin (ossia gli sviluppi di Taylor centrati nell'origine) di*

$$\frac{1}{1+x} \qquad e \qquad \sqrt{1+x}$$

arrestati al second'ordine.

Risoluzione. Considerando lo sviluppo di $(1+x)^\alpha$, posto rispettivamente $\alpha = -1$ e $\alpha = 1/2$, si ha $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2)$ e $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$. Alternativamente, si poteva procedere calcolando le funzioni e le rispettive derivate (fino alla seconda) nel punto $x = 0$. ∎

Esercizio 1.2 *Verificare che, per $x \to 0$, valgono gli sviluppi*

$$\log(\cos x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{12}x^4 + o(x^4) \qquad e \qquad e^{\sin x} = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 + o(x^4)$$

Risoluzione. Dagli sviluppi del coseno, $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, e del logaritmo, $\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2)$, posto $1 + y = \cos x \Rightarrow y = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$, si ha $\log(\cos x) = \left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right] - \frac{1}{2}\left[-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right]^2 + o([x^2]^2) = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)$. Lo stesso ragionamento si applica agli sviluppi dell'esponenziale e del seno. ∎

Esercizio 1.3 *Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli*

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + \log \cos x}{x^4}$$

Risoluzione. Dall'esercizio precedente è noto lo sviluppo del $\log \cos x$ per $x \to 0$, pertanto

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x + \log \cos x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - [1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)] + [-\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)]}{x^4} =$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{-\frac{x^4}{24} - \frac{x^4}{12} + o(x^4)}{x^4} = -\frac{1}{8}.$$ ∎

Esercizio 1.4 *Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}+\sin x}{\tan x}$$

Risoluzione. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}+\sin x}{\tan x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}+o(\sqrt{x})}{x} = +\infty.$ ■

Esercizio 1.5 *Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli*

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)-\sin x+x^2/2}{x^3}$$

Risoluzione. $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(1+x)-\sin x+x^2/2}{x^3} =$
$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{[x-x^2/2+x^3/3+o(x^3)]-[x-x^3/6+x^5/120+o(x^6)]+x^2/2}{x^3} =$
$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3/3+x^3/6+o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{2}.$ ■

Esercizio 1.6 *Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

Risoluzione. Dopo aver notato che lo sviluppo del $\sin^2 x = \left[x-x^3/6+o(x^4)\right]^2 = x^2-x^4/3+o(x^4)$, si ha $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-x^2}{x^2\sin^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^4/3+o(x^4)}{x^4+o(x^6)} = -\frac{1}{3}.$
■

Esercizio 1.7 *Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1-x^2+\log(1+x^3)}{\sin x - x}$$

Risoluzione. Noti gli sviluppi $e^{x^2} = 1+x^2+x^4/2+o(x^4)$, $\log(1+x^3) = x^3+o(x^3)$ e $\sin x = x-x^3/6+o(x^4)$, si ha $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2+\log(1+x^3)}{\sin x-x} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4/2+o(x^4)+x^3+o(x^3)}{-x^3/6+o(x^4)} =$
$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^3+o(x^3)}{-x^3/6+o(x^4)} = -\frac{1}{6}.$
Attenzione: se si fosse arrestato lo sviluppo di e^{x^2} a $e^{x^2} = 1+x^2+o(x^2)$ si sarebbe ottenuto $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}-1-x^2+\log(1+x^3)}{\sin x-x} = \lim_{x\to 0}\frac{o(x^2)}{-x^3/6+o(x^4)} = \infty$, che è evidentemente sbagliato! ■

Esercizio 1.8 *Utilizzando gli sviluppi di Taylor, discutere al variare del parametro a il seguente limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\log(1+x) - 6x + 3x^2 - 2x^3}{x^4}$$

Risoluzione.

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\log(1+x) - 6x + 3x^2 - 2x^3}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{a[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)] - 6x + 3x^2 - 2x^3}{x^4} =$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{(a-6)x + (3-\frac{a}{2})x^2 + (\frac{a}{3}-2)x^3 - \frac{a}{4}x^4}{x^4}.$$

Quindi, per $a = 6$ il limite vale $-\frac{3}{2}$; per $a \neq 6$ vale ∞. ■

Esercizio 1.9 *Utilizzando gli sviluppi di Taylor si calcoli*

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$$

Risoluzione.

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\log\frac{\sin x}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\log\frac{x - x^3/6 + o(x^3)}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\log[1 - x^2/6 + o(x^2)]} =$$
$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{-x^2/6 + o(x^2)}{x^2}} = e^{-1/6}$$ ■

Esercizio 1.10 *Utilizzando gli sviluppi di Taylor calcolare i seguenti limiti*

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^{1/x^2}$ *b)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{1/x^2}$ *c)* $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x}$

Risoluzione.

Procedendo come nell'esercizio precedente, si ricava facilmente (*a*) $e^{-2/3}$; (*b*) $e^{-3/2}$; (*c*) 1.
■

2 Determinazione di eventuali asintoti di una funzione

Richiami utili per la determinazione degli asintoti.

- Asintoti orizzontali.

  1. Se $\lim_{x\to +\infty} f(x) = l_1 \in \mathbb{R}$, allora la retta $y = l_1$ si dice asintoto orizzontale destro per $f(x)$.

2. Se $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l_2 \in \mathbb{R}$, allora la retta $y = l_2$ si dice asintoto orizzontale sinistro per $f(x)$.

3. Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = l$, allora la retta $y = l$ si dice asintoto orizzontale per $f(x)$.

- Asintoti verticali.
  Se una funzione ammette limite (o semplicemente limite destro, oppure limite sinistro) infinito per $x \to x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}$, allora la retta $x = x_0$ si dice asintoto verticale per $f(x)$ (anche in questo caso si può distinguere tra asintoto da destra e da sinistra nel caso uno dei due limiti sia infinito e l'altro o non lo sia o non esista). In pratica, basta che sia verificata una delle seguenti condizioni $\lim_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = +\infty$ oppure $-\infty$ oppure ∞.

- Asintoto obliquo.
  Se $f(x) \sim mx + q$ per $x \to +\infty$ (oppure per $x \to -\infty$), allora la retta $y = mx + q$ si dice asintoto obliquo per $f(x)$ (anche qui si può distinguere tra asintoto destro e sinistro nel caso siano diversi tra loro). Questa condizione si può riscrivere come $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$ (rispettivamente $\lim_{x \to -\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0$). Praticamente, m e q vengono determinati come segue, purchè entrambi i limiti esistano finiti:
  $$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - mx]$$

Esercizio 2.11 *Determinare eventuali asintoti di* $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ *e* $f(x) = x + \sqrt[3]{x}$.

Risoluzione. $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Asintoto orizzontale $y = 1$, asintoto verticale $x = -1$.
$f(x) = \sqrt{x^2+1}$. Asintoto obliquo $y = x$ per $x \to +\infty$, e altro asintoto obliquo $y = -x$ per $x \to -\infty$.
$f(x) = x + \sqrt[3]{x}$. Non ammette asintoti. Infatti, $f(x) \sim x$ per $x \to +\infty$, ma $[f(x) - x] \to +\infty$ per $x \to +\infty$. ■