Geometria - Prova scritta del 2/7/2007

(Prof. M. Spera)

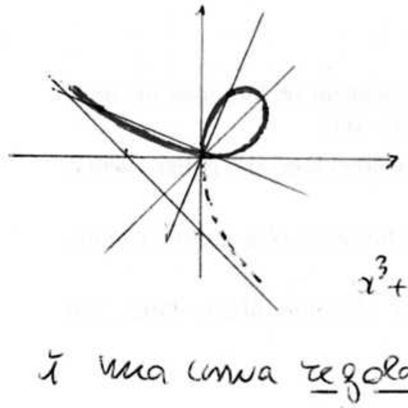
① Determinare, a meno di movimenti rigidi, le curve sferiche aventi torsione costante ... e descriverle ... qualitativamente

② Dato il toro $\Sigma: \begin{cases} x = (2+\cos v)\cos u \\ y = (2+\cos v)\sin u \\ z = \sin v \end{cases}$, $(u, v) \in [0,2\pi) \times [0,2\pi)$

Si determinino, nel punto $P_0 : (1,0,0)$, la prima e la seconda forma fondamentale, la curvatura gaussiana e media, l'operatore di forma e le relative direzioni principali e asintotiche in $T_{P_0}\Sigma$, e si abbozzi il grafico dell'indicatrice di Dupin.

③ Con riferimento al toro dell'es. 2, si consideri, su di esso, la circonferenza $\mathcal{C}: \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 1 \end{cases}$

verificare, in più modi, che $\mathcal{C}$ non è una geodetica, calcolando $k_g(\mathcal{C})$ e il trasporto parallelo di un vettore inizialmente tangente alla curva

④ 

Si consideri il folium di Cartesio

$\begin{cases} x = \dfrac{6t}{1+t^3} \\ y = t \cdot x \end{cases}$ $t \in (-1, +\infty)$

$x^3+y^3-6xy=0$ Dimostrare che $\underline{r} = \underline{r}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in (-1, +\infty)$

è una curva regolare (nel senso ristretto). Risulta essere un omeomorfismo sull'immagine? Spiegare.

◇ ◇ ◇

Svolgere l'esercizio ② e altri due a scelta.
Tempo a disposizione 2h. Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

(1) Dalla teoria di de Saint-Venant si ha, se $\tau \neq 0$ costante

$$\tau \rho + \left(\frac{\rho'}{\tau}\right)' = 0 \qquad ' = \frac{d}{ds}$$

$$\Rightarrow \quad \tau \rho + \frac{\rho''}{\tau} = 0$$

$$\rho'' + \tau^2 \rho = 0$$

(eq. oscillatore armonico)

$$\rho(s) = a \cos \tau s + b \sin \tau s$$

$$\overset{\shortparallel}{\tfrac{1}{k}} \qquad = R \cos(\tau s + \alpha)$$

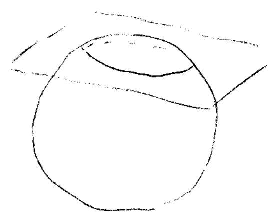
"fase" iniziale

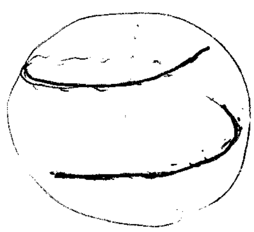
R raggio della sfera

(f. periodica)

$\Rightarrow$ in generale sono "eliche" avvolgentisi sulla sfera

se $\tau = 0$, C è piana (e sferica) $\Rightarrow$ è una circonferenza





Variante: se R è il raggio della sfera, è

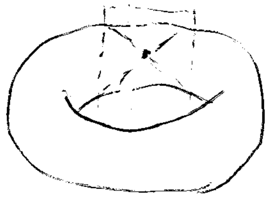
S-V) $\quad R^2 = \rho^2 + \dfrac{\rho'^2}{\tau^2} \qquad \overset{\text{cioè}}{\rho'^2 = \tau^2(R^2 - \rho^2)}$

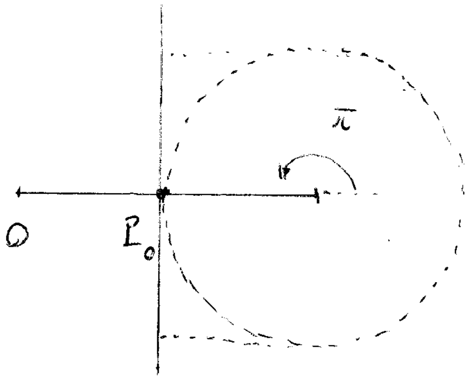
$$\rho' = \pm \tau \sqrt{R^2 - \rho^2} \qquad \frac{d\rho}{\sqrt{R^2-\rho^2}} = \pm \tau \, ds$$

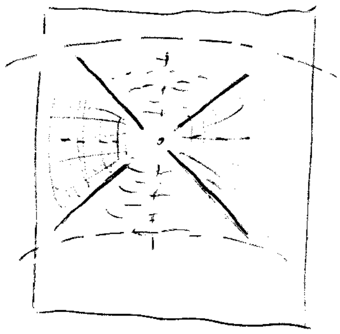
$\Rightarrow$ integrando si giunge alla medesima soluzione

② toro

$$\begin{cases} x = (2+\cos v)\cos u \\ y = (2+\cos v)\sin u \\ z = \sin v \end{cases}$$







(consideriamo $P_0 = (1, 0, 0)$)

$$\underline{r} = \big((2+\cos v)\cos u ,\ (2+\cos v)\sin u ,\ \sin v \big)$$

$$\underline{r}_u = \big(-(2+\cos v)\sin u ,\ (2+\cos v)\cos u ,\ 0 \big)$$

$$\underline{r}_v = \big(-\sin v \cos u ,\ -\sin v \sin u ,\ \cos v \big)$$

$$\underline{r}_{uu} = \big(-(2+\cos v)\cos u ,\ -(2+\cos v)\sin u ,\ 0 \big)$$

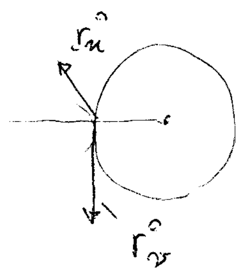
$$\underline{r}_{uv} = \big(\sin v \sin u ,\ -\sin v \cos u ,\ 0 \big) = \underline{r}_{vu}$$

$$\underline{r}_{vv} = \big(-\cos v \cos u ,\ -\cos v \sin u ,\ -\sin v \big)$$

Lavoriamo in P_0: $(1, 0, 0)$ $\qquad (u = 0 ,\ v = \pi)$

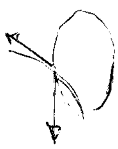
$$\underline{r}_u^0 = (0, 1, 0)$$

$$\underline{r}_v^0 = (0, 0, -1)$$

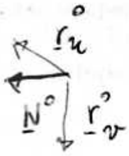


$E^0 = 1$
$F^0 = 0$
$G^0 = 1$

(Chiaro!) $\sim_o$



$$\underline{N}^0 = \frac{\underline{r}_u \times \underline{r}_v}{\underbrace{\| \quad \|}_{=1}} = (-1,\ 0,\ 0)$$



piano tangente: $\langle \underline{N}^0, \underline{r} - \underline{r}_0 \rangle = 0$

$$(-1)(x-1) + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 0 \qquad \boxed{x = 1}$$

(Chiaro!)

$$\underline{r}^0_{uu} = (-1,\ 0,\ 0) \qquad e^0 = 1$$

$$\underline{r}^0_{uv} = (0,\ 0,\ 0) \qquad f^0 = 0$$

$$\underline{r}^0_{vv} = (+1,\ 0,\ 0) \qquad g^0 = -1$$

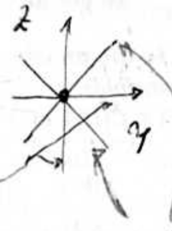
curvature principali

* operatore di forma in P_0 : $S = -dN = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & +1 \end{pmatrix}$

* Direzioni asintotiche $\quad u'^2 - v'^2 = 0 \quad$ in P_0

$$(u' + v')(u' - v') = 0$$

nel piano $x = 1$

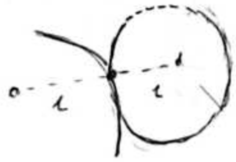


$$(y + z)(y - z) = 0$$

direzioni principali

dir. asintotiche

chiaro a priori: $\quad K^0 = -1 \qquad H^0 = 0$



indicatrice di Dupin

$$y^2 - z^2 = \pm 1$$

coppia di iperboli equilatere.

3 La curva $\mathcal{C}$ ha equazione

circonferenza $\rightsquigarrow \begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \\ z = 1 \end{cases}$

$$\underline{r} = (2\cos t,\ 2\sin t,\ 1)$$

$$\dot{\underline{r}} = (-2\sin t,\ 2\cos t,\ 0)$$

$$\ddot{\underline{r}} = (-2\cos t,\ -2\sin t,\ 0)$$

$$\Rightarrow \frac{\nabla}{dt}\dot{\underline{r}} = P\,\ddot{\underline{r}} = \ddot{\underline{r}} \neq \underline{0} \Rightarrow \dot{\underline{r}} \text{ non è parallelo lungo } \mathcal{C}$$

proiezione sul piano tangente

non è una geodetica

È subito visto che $k_g = \frac{1}{2}$ $(\neq 0)$

Possiamo calcolare il trasporto parallelo da $\vartheta' = k_g$, $\vartheta' = \frac{d\vartheta}{ds}$

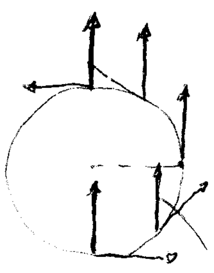
$$\vartheta' = \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{d\vartheta}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\vartheta}{dt}\cdot\frac{1}{2}$$

qui $s = 2t$

$ds = 2dt$

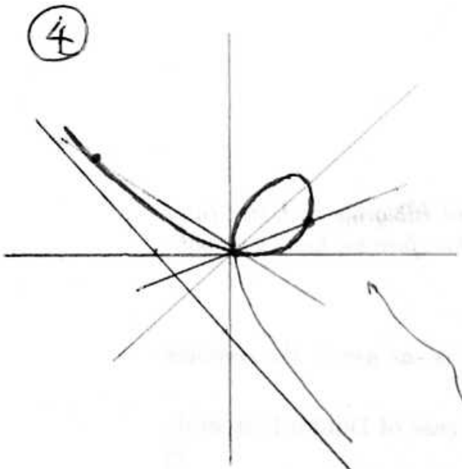
$$\cancel{\tfrac{1}{2}}\,\dot{\vartheta} = \cancel{\tfrac{1}{2}} \qquad \dot{\vartheta} = 1 \qquad \vartheta = \int_0^{2\pi} d\tilde{\vartheta} = 2\pi$$

(Chiaro anche intrinsecamente)



"répère mobile": $\uparrow$ è $\parallel$ lungo $\mathcal{C}$

4



$$\begin{cases} x = \dfrac{6t}{1+t^3} \\ y = t \cdot x = \dfrac{6t^2}{1+t^3} \end{cases}$$

folium di Cartesio

$t \in \mathbb{R}$

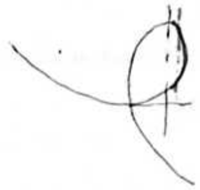
$x^3 + y^3 - 6xy = 0$

$t \in (-1, \infty)$

$x + y + 2 = 0$

$\underline{r} = \left(\dfrac{6t}{1+t^3}, \dfrac{6t^2}{1+t^3} \right)$

$\underline{r} = \underline{r}(t)$ è iniettiva per $t \in (-1, +\infty)$ $\quad (\underline{r} \in C^\infty)$



assumiamo ad esempio che $\dot{x}(t) = 6 \dfrac{1+t^3 - t \cdot 3t^2}{(1+t^3)^2} = 6 \dfrac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}$

è $\gtrless 0$ per $t \lessgtr 2^{-\frac{1}{3}}$ $\Rightarrow$ $x = x(t)$ è

($t^3 = \frac{1}{2} = 2^{-1}$) str. crescente in tali intervalli

($\Rightarrow \underline{r} = \underline{r}(t)$ è iniettiva) ; sull'arco

da $y = tx$, si vede subito che y è str. crescente

Pertanto $\underline{r} = \underline{r}(t)$ è iniettiva per $t \in (-1, \infty)$

Quanto alla regolarità $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2 + (\dot{\overline{tx}})^2$

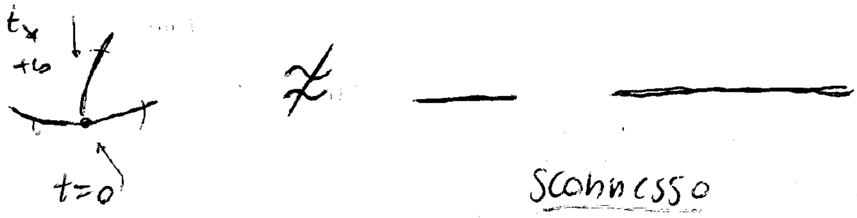
$= \dot{x}^2 + (x + t\dot{x})^2 = 0 \Rightarrow \dot{x} = 0$ e

$x = 0$, che non sono compatibili (v. calcolo sopra)

$\Rightarrow \dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$

infine: $\underline{\gamma}$ non può essere un omeomorfismo (sull'im.

poiché



Sconnesso

Connesso

gli archi $\Rightarrow$ connesso