

Registro delle lezioni di
OTTIMIZZAZIONE (A.A. 2007/08)
Prof. L. PELLEGRINI

14 gennaio 2008:

Problemi di ottimizzazione; introduzione e definizioni. Insiemi convessi, combinazione convessa, combinazione convessa propria. Proprietà degli insiemi convessi. Funzioni convesse e strettamente convesse. Interpretazione geometrica. Insiemi di livello di funzioni convesse. Funzioni quasiconvesse. Epigrafico di una funzione convessa. Alcune particolari funzioni convesse. Disuguaglianza di Jensen. Caratterizzazione delle funzioni convesse e differenziabili. Punti di minimo e punti stazionari per le funzioni convesse.

15 gennaio 2008:

Dimostrazione della disuguaglianza di Jensen. Caratterizzazione delle funzioni convesse di classe C^2 . Forme quadratiche convesse e strettamente convesse. Relazioni con il segno della matrice Hessiana. Esempi. Involucro convesso e chiusura convessa di un insieme. Punti estremi di un insieme convesso. Involucro affine e interno relativo di un insieme. Il teorema di Carathéodory.

16 gennaio 2008:

Dimostrazione della continuità delle funzioni convesse sull'interno relativo del loro dominio. Minimi locali e minimi globali per funzioni convesse. Unicità del minimo per le funzioni strettamente convesse.

21 gennaio 2008:

Proiezione di un punto di R^n su un insieme convesso. Il teorema della proiezione. Iperpiani di separazione. Teorema dell'iperpiano di supporto; teorema di separazione tra insiemi convessi; teorema di separazione stretta. Iperpiani di supporto per l'epigrafico di una funzione convessa.

22 gennaio 2008:

Definizione di cono. Caratterizzazione dei coni convessi. Coni puntati. Cono polare. Coni poliedrali, coni finitamente generati e loro proprietà. Poliedri, politopi e vertici degli insiemi poliedrali. Teorema del cono polare. Lemma di Farkas.

23 gennaio 2008:

Teoremi di alternativa. Uso dei teoremi di alternativa e di separazione in ottimizzazione. Esempi. Definizione di sottogradiente. Esistenza del sottogradiente per le funzioni convesse. Definizione di sottodifferenziale. Proprietà del sottodifferenziale delle funzioni convesse (convessità, chiusura). Esempi.

28 gennaio 2008:

Non decrescenza della derivata direzionale delle funzioni convesse. Sottogradienti e derivate direzionali. Il concetto di algoritmo in programmazione matematica. Convergenza globale e locale. Convergenza asintotica e velocità di convergenza. Ottimizzazione monodimensionale. Determinazione di un punto stazionario: il metodo di bisezione (cenni); il metodo di Newton. Non convergenza del metodo di Newton.

29 gennaio 2008:

Ottimizzazione non vincolata non lineare. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti per l'ottimalità locale per funzioni di classe C^2 . Il caso di funzioni convesse: condizione necessaria e sufficiente per l'ottimalità globale. Metodi numerici per l'ottimizzazione di funzioni differenziabili. Metodi del gradiente: metodo del gradiente con passo predeterminato, metodo del gradiente esatto.

30 gennaio 2008:

Proprietà del metodo del gradiente esatto: ortogonalità di due direzioni successive, discesa del metodo, convergenza verso un punto stazionario. Considerazioni sulla convergenza del metodo del gradiente. Un esempio numerico di applicazione del metodo del gradiente esatto.

Definizione di direzioni coniugate in R^n .

4 febbraio 2008:

Lineare indipendenza delle direzioni coniugate. Il metodo delle direzioni coniugate; dimostrazione della convergenza in al più n passi. Esempi di applicazione del metodo delle direzioni coniugate.

5 febbraio 2008:

Il metodo del gradiente coniugato per funzioni quadratiche strettamente convesse: descrizione del metodo e costruzione delle direzioni mutuamente coniugate in funzione del gradiente. Un esempio di applicazione. Il metodo del gradiente coniugato per funzioni arbitrarie. Cenno sul metodo di Newton come particolare metodo del gradiente.

6 febbraio 2008:

Ottimizzazione vincolata su un insieme convesso. Definizione di punto stazionario, condizioni necessarie e sufficienti per l'ottimalità. Definizione di direzione ammissibile; cono delle direzioni ammissibili. Metodo delle direzioni ammissibili; scelta del passo. Metodi di linearizzazione: il metodo di Frank-Wolfe.

11 febbraio 2008:

Un esempio di applicazione dell'algorithmo di Frank-Wolfe. Problemi di ottimo vincolato con vincoli di uguaglianza; la funzione Lagrangiana; il teorema di Lagrange. Interpretazione geometrica della condizione necessaria. Regolarità dei vincoli. Dimostrazione del teorema di Lagrange nel caso di vincoli lineari.

12 febbraio 2008:

Dimostrazione del teorema di Lagrange nel caso generale. Esempio di un problema in cui non esistono moltiplicatori di Lagrange (non regolarità dei vincoli). Un esempio di applicazione del teorema di Lagrange.

13 febbraio 2008:

Esempi di applicazione del teorema di Lagrange a problemi elementari di geometria (minimo perimetro con area fissata, minima distanza). Problemi di ottimo vincolato con vincoli di disuguaglianza. Vincoli attivi e vincoli inattivi. Il teorema di Kuhn-Tucker.

18 febbraio 2008:

Interpretazione geometrica del teorema di Kuhn-Tucker. Segno dei moltiplicatori, condizione di complementarità. Il caso misto (vincoli di uguaglianza e disuguaglianza). Verifica della regolarità dei vincoli. Un esempio di applicazione del teorema di Kuhn-Tucker.

19 febbraio 2008:

Definizione di arco ammissibile e di direzione raggiungibile; cono delle direzioni raggiungibili; confronto con il cono delle direzioni ammissibili. Condizione di qualifica dei vincoli tramite il linearizzato della regione ammissibile espressa da vincoli di disuguaglianza. Condizioni sufficienti per la qualifica dei vincoli. Esempi.

20 febbraio 2008:

Dimostrazione del teorema di Kuhn-Tucker tramite il lemma di Farkas. Estensione al caso misto. Qualifica dei vincoli e condizioni sufficienti per la qualifica dei vincoli nel caso misto.

25 febbraio 2008:

Definizione di Lagrangiana completa. Il teorema di F. John; i moltiplicatori di John, non unicità dei moltiplicatori di John. Esempio di applicazione. La funzione di perturbazione. Il teorema di sensitività. Il significato del moltiplicatore.

26 febbraio 2008:

Esempio di determinazione della funzione di perturbazione. Definizione di punto di sella della Lagrangiana. Caratterizzazione del punto di sella. Sufficienza della condizione di punto di sella per l'ottimalità. Esempi di applicazione della condizione sufficiente.

27 febbraio 2008:

Esempio di non esistenza del punto di sella. Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di un punto di sella (tramite la funzione di perturbazione). Esempio di determinazione della funzione di perturbazione e verifica della condizione necessaria e sufficiente. Interpretazione geometrica della validità o non validità della condizione.

3 marzo 2008:

Esempio di determinazione della funzione di perturbazione nel caso di non esistenza del punto di sella. Connessione tra l'esistenza del punto di sella e le condizioni di Kuhn-Tucker. Le condizioni di Kuhn-Tucker nel caso convesso. Interpretazione economica dei moltiplicatori di Kuhn-Tucker. Definizione di duale Lagrangiano. Il duale nel caso lineare.

4 marzo 2008:

Il teorema di dualità debole. Definizione di divergenza di dualità. Concavità della funzione duale. Esempi di costruzione del duale Lagrangiano; il caso convesso, il caso lineare a variabili intere. Determinazione della divergenza di dualità.

5 marzo 2008:

Il teorema di dualità forte; equivalenza tra esistenza del punto di sella e divergenza di dualità nulla. Esercizi riassuntivi.