INDUZIONE E NUMERI NATURALI

1. Il principio di induzione

Il principio di induzione è una tecnica di dimostrazione molto usata in matematica. Lo scopo di questa sezione è di enunciare tale principio e di mostrare con vari esempi come esso possa essere applicato.

Principio di Induzione 1.1. *Sia $\{\mathcal{P}(i)\}_{i\in\mathbf{N}}$ un insieme di proposizioni tali che:*

(1) *$\mathcal{P}(0)$ è vera;*
(2) *per ogni $n \geq 0$, se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vera.*

Allora $\mathcal{P}(i)$ è vera per ogni $i \in \mathbf{N}$.

Il principio di induzione afferma che per dimostrare la veridicità di una data proprietà per ogni numero naturale, è sufficiente verificare: (1) che essa è vera in zero; (2) che se si suppone essere vera per un naturale arbitrario n, allora essa è vera anche per il naturale successivo $n+1$. La prima verifica viene detta *passo base* dell'induzione, la seconda *passo induttivo*.

Esempio 1.2. *Si dimostri che ogni insieme con i elementi ha 2^i sottoinsiemi.*

Possiamo considerare la precedente affermazione come un insieme di proposizioni $\{\mathcal{P}(i)\}_{i\in\mathbf{N}}$; per poter applicare il principio di induzione dobbiamo verificare i due punti seguenti:

(1) $\mathcal{P}(0)$ è vera, cioè ogni insieme con 0 elementi ha 2^0 sottoinsiemi; questo è chiaro, dato che l'unico sottoinsieme di $\emptyset$ è $\emptyset$.
(2) se $\mathcal{P}(n)$ è vera, allora $\mathcal{P}(n+1)$ è vera. Questo punto si traduce nella seguente verifica: supponiamo di sapere che ogni insieme con n elementi ha 2^n sottoinsiemi e verifichiamo che ogni insieme con $n+1$ elementi ha 2^{n+1} sottoinsiemi. A tal fine, sia X un insieme con $n+1$ elementi, e sia $a \in X$; allora $X = X' \cup \{a\}$, dove X' è un insieme di n elementi e $a \notin X'$. Osserviamo che, dato un generico sottoinsieme $Y \subseteq X$, o $a \in Y$ oppure $a \notin Y$; nel primo caso $Y \subseteq X'$, nel secondo caso è $Y = Y' \cup \{a\}$, dove $Y' \subseteq X'$. Poiché si sta supponendo che i possibili sottoinsiemi di X' siano 2^n, i sottoinsiemi di X sono $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

Avendo verificato i punti (1) e (2), in base al principio di induzione possiamo concludere che $\mathcal{P}(i)$ è vera per ogni $i \in \mathbf{N}$, cioè che ogni insieme con i elementi ha 2^i sottoinsiemi, per ogni $i \in \mathbf{N}$.

Esempio 1.3. *Si dimostri che, per ogni $i \in N$, la somma dei primi i numeri naturali pari è $i^2 + i$.*

Dobbiamo dimostrare che per ogni $i \in \mathbf{N}$ vale la seguente formula: $\sum_{k=0}^{i} 2k = i^2 + i$. In base al principio di induzione è sufficiente verificare i due punti seguenti:

(1) $\sum\limits_{k=0}^{0} 2k = 0^2 + 0$, uguaglianza chiaramente vera;

(2) supponendo $\sum\limits_{k=0}^{n} 2k = n^2 + n$, allora $\sum\limits_{k=0}^{n+1} 2k = n + 1^2 + n + 1$; per verificare questa uguaglianza, osserviamo che $\sum\limits_{k=0}^{n+1} 2k = \sum\limits_{k=0}^{n} 2k + 2(n+1)$. Quindi, dall'ipotesi segue che $\sum\limits_{k=0}^{n+1} 2k = n^2 + n + 2(n+1) = (n+1)^2 + n + 1$.

Avendo verificato sia il passo base che il passo induttivo, possiamo concludere che la formula $\sum\limits_{k=0}^{i} 2k = i^2 + i$ vale per ogni $i \in \mathbf{N}$.

Esempio 1.4. *Si dimostri che* $(1+x)^n \geq 1+nx$ *per ogni* $n \in \mathbf{N}$ *e per ogni* $x \in \mathbf{R}$, $x \geq 1$.

Dimostriamo l'enunciato per induzione su n. Poiché $(1+x)^0 = 1$, il passo base è facilmente verificato. Supponendo che $(1+x)^n \geq 1+nx$, si ha $(1+x)^{(n+1)} = (1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1 + nx + x + nx^2 = 1 + (n+1)x + nx^2$. Poiché $x \geq 1$, $x^2 \geq 1$ e quindi $1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x + n \geq 1 + (n+1)x$. Si conclude quindi $(1+x)^{(n+1)} \geq 1+(n+1)x$; pertanto abbiamo verificato anche il passo induttivo.

Una variante del principio di induzione permette di considerare come passo base un naturale qualsiasi:

Variante del Principio di Induzione 1.5. *Sia* $\{\mathcal{P}(i)\}_{i\in\mathbf{N}}$ *un insieme di proposizioni e sia* $l \in \mathbf{N}$ *tali che:*

(1) $\mathcal{P}(l)$ *è vera;*

(2) *per ogni* $n \geq l$, *se* $\mathcal{P}(n)$ *è vera allora* $\mathcal{P}(n+1)$ *è vera.*

Allora $\mathcal{P}(i)$ *è vera per ogni* $i \geq l$.

Esempio 1.6. *Si dimostri che per ogni* $i \geq 1$, *vale la seguente formula:* $\sum\limits_{k=1}^{i} k \cdot k! = (i+1)! - 1$.

Poiché si deve dimostrare la veridicità della formula per $i \geq 1$, si applica la variante del principio di induzione considerando come passo base $l = 1$. Pertanto si deve verificare:

(1) $\sum\limits_{k=1}^{1} 1 \cdot 1! = (2)! - 1$, uguaglianza chiaramente vera;

(2) se $\sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$, allora $\sum_{k=1}^{n+1} i \cdot i! = (n+2)! - 1$. Poiché $\sum\limits_{k=1}^{n+1} i \cdot i! = \sum\limits_{k=1}^{n} i \cdot i! + (n+1) \cdot (n+1)!$, per ipotesi induttiva segue $\sum\limits_{k=1}^{n+1} i \cdot i! = (n+1)! - 1 + (n+1) \cdot (n+1)! = (n+1)!(n+2) - 1$.

Si noti che il principio di induzione, se applicato erroneamente, può portare a conclusioni assurde, come mostra il seguente esempio.

Esempio 1.7. *Per ogni* $k \in \mathbf{N}$, *dati* k *punti del piano, essi sono allineati.*

Per applicare il principio di induzione, verifichiamo innanzitutto il passo base, partendo da $k = 1$: dato 1 punto del piano, esso è chiaramente allineato con se stesso! Verifichiamo ora il passo induttivo: supponiamo che dati n punti essi siano allineati, e concludiamo che anche $n+1$ punti sono allineati. A tal fine, siano $\{X_1, \ldots, X_n, X_{n+1}\}$ $n + 1$ punti del piano. Per ipotesi induttiva, esiste una retta r che passa per i punti $X_1, \ldots, X_n$; inoltre esiste una retta t che passa per i punti $X_2, \ldots, X_{n+1}$. Pertanto l'intersezione tra le rette r e t contiene i punti $X_2, \ldots, X_n$. Osserviamo che date due rette del piano, o la loro intersezione è vuota, o consiste di un unico punto, oppure le due rette sono coincidenti. Nel nostro caso $\{X_2, \ldots, X_n\} \subseteq r \cap t$, e quindi concludiamo che $r = t$; da ciò segue che gli $n + 1$ punti sono allineati. In base al principio di induzione possiamo pertanto concludere che dati k punti del piano, essi sono allineati.

Poiché l'affermazione dimostrata è chiaramente assurda, abbiamo commesso un errore nell'applicare il principio di induzione. L'errore consiste nella verifica del passo induttivo: per esempio, mentre è ovviamente vero che due punti del piano sono sempre allineati, non è vero che lo sono anche tre punti. Per esercizio lo studente individui l'errore commesso.

Concludiamo questa sezione osservando come l'argomento che sta alla base del principio di induzione può essere applicato non solo per dimostrare proprietà, ma anche per dare definizioni. Si consideri per esempio la definizione di potenza con esponente naturale di una data base $a \in \mathbf{R}$. Tale definizione si può enunciare nel modo seguente: $a^0 = 1$ e $a^{n+1} = a \cdot a^n$, per ogni $n \in \mathbf{N}$; in altre parole, si costruisce a^0 e poi, supponendo di conoscere a^n, si costruisce a^{n+1}. In tal modo si costruisce qualsiasi potenza naturale di a. Queste definizioni si dicono *definizioni per ricorrenza.*

Esempio 1.8. Si definisca $1! = 1$ e, per ogni $n \in \mathbf{N}$, sia $(n + 1)! = (n + 1)n!$. In questo modo si definisce per ricorrenza il prodotto fattoriale $n!$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

2. Il principio di induzione: dimostrazione.

Nel sezione precedente abbiamo visto come si enuncia e come si applica il principio di induzione. In questa sezione vogliamo invece capire *perché* vale tale principio. La dimostrazione della validità del principio di induzione si basa essenzialmente sulla proprietà di buon ordinamento dei numeri naturali, sul fatto cioè che ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbf{N}$ ammette elemento minimo (vedi Esempio 4.6, Capitolo 2).

Teorema 2.1. *Sia* $\{\mathcal{P}(i)\}_{i\in\mathbf{N}}$ *un insieme di proposizioni tali che:*

(1) $\mathcal{P}(0)$ *è vera;*
(2) *se* $\mathcal{P}(n)$ *è vera, allora* $\mathcal{P}(n + 1)$ *è vera.*

Allora $\mathcal{P}(i)$ *è vera per ogni* $i \in \mathbf{N}$.

Dimostrazione. Sia $M = \{m \in \mathbf{N} \mid P_m \text{ è falsa}\}$. Supponiamo che l'insieme M sia non vuoto; allora M, in quanto sottoinsieme dei numeri naturali, ammette elemento minimo $\overline{m}$. Dal punto (1) segue che $\overline{m} \neq 0$, e pertanto $\overline{m} \geq 1$. Inoltre, poiché $\overline{m} - 1 \in \mathbf{N}$ e $\overline{m} - 1 \notin M$, la proposizione $P_{\overline{m}-1}$ è vera; dal punto (2) segue pertanto che $P_{\overline{m}}$ è vera, contrariamente all'ipotesi $\overline{m} \in M$. □

Dal buon ordinamento di $\mathbf{N}$, segue anche un'utile variante del principio di induzione.

Teorema 2.2 (Seconda forma del principio di induzione). *Sia $\{\mathcal{P}(i)\}_{i\in\mathbf{N}}$ un insieme di proposizioni e sia $l \in \mathbf{N}$ tali che:*

(1) *$\mathcal{P}(l)$ è vera;*

(2) *se $\mathcal{P}(k)$ è vera per ogni $l \leq k < n$, allora $\mathcal{P}(n)$ è vera.*

Allora $\mathcal{P}(i)$ è vera per ogni $i \geq l$.

Dimostrazione. Sia $M = \{m \in \mathbf{N} \mid m \geq l \text{ e } P_m \text{ è falsa}\}$. Supponiamo che l'insieme M sia non vuoto; allora M, in quanto sottoinsieme dei numeri naturali, ammette elemento minimo $\overline{m}$. Dal punto (1) segue che $\overline{m} > l$; inoltre, per la minimalità di $\overline{m}$, le proposizioni $P_l, P_{l+1}, \ldots, P_{\overline{m}-1}$ sono vere; dal punto (2) segue pertanto che $P_{\overline{m}}$ è vera, contrariamente all'ipotesi $\overline{m} \in M$. □

Esempio 2.3. *Si dimostri che ogni numero naturale maggiore o uguale a 2 o è primo o è prodotto di primi.*

Dimostriamo l'enunciato applicando la seconda forma del principio di induzione, assumendo come passo base $n = 2$.

(1) Passo base: per $n = 2$ l'enunciato è vero, dato che 2 è primo.

(2) Passo induttivo: sia $n > 2$ e supponiamo che per ogni $2 \leq k < n$, k è primo o è prodotto di primi; dobbiamo concludere che n è primo o prodotto di primi. Se n è primo, allora si conclude. Se n non è primo, allora esistono due numeri naturali r e s tali che $r < n$, $s < n$ e $n = rs$. Per ipotesi induttiva, r e s o sono primi o sono prodotto di numeri primi; pertanto n è prodotto di numeri primi.

3. I numeri naturali

Nel dimostrare il principio di induzione a partire dal buon ordinamento di $\mathbf{N}$, si è assunta nota la struttura e la costruzione dell'insieme dei numeri naturali. È tuttavia importante cercare di dare una definizione formale di $\mathbf{N}$, da cui derivino tutte le proprietà comunemente note di tale insieme. Concludiamo questo capitolo con un cenno all'approccio assiomatico a tale problema introdotto da Peano.

Assiomi di Peano 3.1. *Sia $(\mathcal{N}, 0, s)$ una terna dove $\mathcal{N}$ è un insieme, 0 un elemento di $\mathcal{N}$ e $s\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ una funzione, tali che valgano le seguenti proprietà:*

P1. *la funzione s è iniettiva;*

P2. *l'elemento 0 non appartiene all'immagine di s;*

P3. *Se $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ ha la proprietà che $0 \in \mathcal{M}$ e $s(x) \in \mathcal{M}$ per ogni $x \in \mathcal{M}$, allora $\mathcal{M} = \mathcal{N}$.*

Si dimostra che la terna $(\mathcal{N}, 0, s)$ costruita con le proprietà $P1$, $P2$ e $P3$ è essenzialmente unica, nel senso che se $(\mathcal{N}', 0', s')$ è un'altra terna soddisfacente le stesse proprietà, allora esiste una funzione biiettiva $\varphi\colon \mathcal{N} \to \mathcal{N}'$ tale che $\varphi(s(x)) = s'(\varphi(x))$ per ogni $x \in \mathcal{N}$. Una volta dimostrata l'unicità della terna $(\mathcal{N}, 0, s)$, definiamo l'insieme dei numeri naturali come l'insieme $\mathcal{N}$. Si osservi che, per ogni $x \in \mathcal{N}$, il ruolo di $s(x)$ è quello del successore di x, cioè del numero naturale $x + 1$.

A partire da questa definizione assiomatica dell'insieme dei numeri naturali, possiamo dare una definizione rigorosa delle usuali operazioni di addizione e moltiplicazione. Si consideri infatti la funzione $F\colon \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ tale che $F(x, 0) = x$ e $F(x, s(y)) = s(F(x, y))$ per ogni $x, y \in \mathcal{N}$. Si può dimostrare che tale funzione esiste ed è unica; poiché F corrisponde all'usuale addizione, si denota comunemente con $+$. Analogamente si consideri la funzione $G\colon \mathcal{N} \times \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ tale che $G(x, 0) = 0$ e

$G(x, s(y)) = G(x, y) + x$. Si può dimostrare che tale funzione esiste ed è unica: poiché G corrisponde all'usuale moltiplicazione, si denota comunemente con $\times$. Applicando gli assiomi $P1$, $P2$ e $P3$ si dimostra che le operazioni $+$ e $\times$ godono di ben note proprietà, come ad esempio la proprietà commutativa, associativa o distributiva. A titolo di esempio, dimostriamo esplicitamente come l'operazione $+$ sia associativa.

Proposizione 3.2. *Per ogni* $a, b, c \in \mathcal{N}$, $F(a, F(b, c)) = F(F(a, b), c)$.

Dimostrazione. Siano a e b due arbitrari elementi di $\mathcal{N}$, e si consideri l'insieme $\mathcal{M} = \{c \in \mathcal{N} \mid F(a, F(b, c)) = F(F(a, b), c)\}$. Vogliamo dimostrare che $\mathcal{M} = \mathcal{N}$. A tal fine, in base all'assioma $P3$, basta verificare che $0 \in \mathcal{M}$ e che $s(x) \in \mathcal{M}$ per ogni $x \in \mathcal{M}$. Il fatto che $0 \in \mathcal{M}$ segue dalla prima proprietà di F, dato che $F(a, F(b, 0)) = F(a, b) = F(F(a, b), 0)$. Sia quindi $c \in \mathcal{M}$; dobbiamo verificare l'uguaglianza $F(a, F(b, s(c))) = F(F(a, b), s(c))$. Dalla seconda proprietà di F segue $F(a, F(b, s(c))) = F(a, s(F(b, c)) = s(F(a, F(b, c))$; inoltre, poiché $c \in \mathcal{M}$, si ha $s(F(a, F(b, c)) = s(F(F(a, b), c) = F(F(a, b), s(c))$. Si conclude pertanto $F(a, F(b, s(c))) = F(F(a, b), s(c))$, cioè $s(c) \in \mathcal{S}$. $\square$

Dopo aver introdotto l'operazione $+$, possiamo definire in modo rigoroso anche l'usuale relazione d'ordine $<$, procedendo nel modo seguente. Sia $R = \{(x, y) \mid x, y \in \mathcal{N}$ ed esiste $k \in \mathcal{N}$ tale che $y = x + k\}$; si dimostra che R è una relazione d'ordine stretto su $\mathcal{N}$. Applicando gli assiomi P1, P2 e P3, si dimostra che R gode delle ben note proprietà di $<$, come ad esempio la tricotomia o il buon ordinamento.

Remark 3.3. Si osservi che l'assioma $P3$ è equivalente al principio di induzione; in altre parole nell'approccio assiomatico di Peano il principio di induzione è implicitamente assunto come assioma, da cui segue anche il buon ordinamento di $\mathbf{N}$. Si noti la differenza tra questo approccio e quello seguito nella sezione 2, dove il principio di induzione è stato ottenuto come conseguenza del principio del minimo.

4. Esercizi

Esercizio 1. Si dimostri che $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Esercizio 2. Si dimostri che, per ogni $n \geq 1$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i} = \frac{2^n-1}{2^n}$

Esercizio 3. Ricordando che $\mathrm{D}(fg) = \mathrm{D}(f)g + f\,\mathrm{D}(g)$ e che $\mathrm{D}(x) = 1$, si dimostri che $\mathrm{D}(x^n) = nx^{n-1}$.

Esercizio 4. Si dimostri che, per ogni $n \geq 1$, $2^3 + 4^3 + \cdots + (2n)^3 = 2n^2(n+1)^2$.

Esercizio 5. Si dimostri che, per ogni $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Esercizio 6. Si dimostri per induzione che $n! > n2^n$ per $n > 5$.

Esercizio 7. Si dimostri che, per ogni $n > 3$, $n! > 2^n + n$

Esercizio 8. Si dimostri per induzione che per ogni intero $n \geq 1$ risulta

$$\sum_{i=1}^{n} i\left(i + \frac{1}{3}\right) = \frac{n(n+1)^2}{3}.$$

ESERCIZIO 9. Si dimostri per induzione che, per ogni $a, b, c \in \mathbf{N}$, $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$. (Si supponga di aver già dimostrato la proprietaà associativa della somma.)