Fondamenti della matematica

10 Febbraio 2006

Si era rimasti ad affermare che se vale il principio del buon ordinamento si dimostra l'assioma della scelta e viceversa, o meglio che l'assioma della scelta non è un ipotesi in più da prendere. Ci si era però arenati ad un certo punto della dimostrazione, infatti tutto andava bene se consideravamo insiemi finiti, ma nel momento in cui passavamo a quelli infiniti non si riusciva più ad applicare l'assioma della scelta per dimostrare il principio del buon ordinamento. Per fare tutto questo abbiamo bisogno degli ordinali che ci permettono di procedere ordinatamente. Questi quindi risolveranno il problema.

Che cos'è un insieme ordinato?
Innanzitutto è un insieme, ma sappiamo che l'insieme generico non ha ordine. Infatti nel contare gli elementi di un insieme finito possiamo prendere prima un elemento e poi un altro in moltissimi modi: il numero di elementi non cambia, ma l'ordine in cui sono considerati sarà ogni volta diverso. Questo negli insiemi finiti. E in quelli infiniti?
Cos'è allora l'ordine? Cos'è una relazione d'ordine? Cos'è una relazione?
In matematica col termine relazione si intende il sottoinsieme del prodotto cartesiano di due insiemi. Nel senso comune invece si intende un rapporto tra individui ad esempio "essere padre di...", "essere cliente di...", "essere prezzo di...". Ma poiché sia nel linguaggio comune che in matematica si usa lo stesso termine "relazione" ci dovrà essere un rapporto tra i due concetti. E allora che rapporto c'è tra il termine in senso matematico e lo stesso nel linguaggio comune? Nel senso comune quando si pensa ad una relazione si osservano molteplici aspetti come la convenienza, la stima, le conseguenze… Prendiamo ad esempio la posizione di un oggetto in caduta libera in relazione al tempo. Gli aspetti da considerare sono molteplici, infatti possiamo domandarci: perché cade, cosa l'ha fatto cadere, chi l'ha spinto, …? Ad un matematico, però, tutto ciò non interessa, poiché pone l'attenzione solamente su ciò che sta accadendo (nell'istante x il corpo si trova in y). Chiamiamo questo modo di considerare i fenomeni atteggiamento estensionale. In una relazione il matematico si accontenta di cogliere chi è in relazione con chi, tralasciando ogni altro aspetto della relazione (appartiene, ...). Per cogliere questo sono sufficienti le coppie ordinate costituite da due elementi che sono in relazione. E da qui

l’affermare che una relazione è un insieme di coppie ordinate.
Torniamo allora a chiederci cos’è una relazione d’ordine.
Il concetto di ordine deriva da quello di tempo, ma quest’ultimo, a sua volta, da quello di memoria. Facciamo chiarezza con un esempio: mentre sto tornando a casa so che stamattina sono uscito e che ieri ero in vacanza. Quindi la memoria definisce l’ordine nel tempo. Succede di poter ricordare un fatto e di avere nello stesso ricordo anche il ricordo di un altro fatto. Diciamo che questo secondo fatto è precedente rispetto al fatto ricordato.

Si pensi ai numeri naturali, che possono essere composti o primi, se uno è ottenuto da un altro moltiplicato per qualcosa esso può essere considerato ottenuto posteriormente, sicchè è stato introdotto un particolare ordine tra i numeri. Rispetto a questo ordine i numeri primi (che sono infiniti) sono i più piccoli, ma in quest'ordine non ci sono elementi che non ne abbiano di più grandi (ogni elemento ne ha di più grandi).

Che proprietà ha l’ordine?
Innanzitutto la transitività: per ogni a, b, c se $a \leq b$ e $b \leq c$ allora $a \leq c$, ma la transitività è anche una proprietà della relazione di equivalenza e una relazione d’ordine non è una relazione di equivalenza e quindi ho bisogno di qualcos’altro. Ma dal punto di vista ingenuo bisogna capire se si vuol considerare un ordine stretto o un ordine largo.
Che differenza c'è tra ordine stretto e ordine largo?
Per l’ordine stretto ($<$, $>$) ci pare consona la proprietà antiriflessiva (per ogni a, a non è in relazione con a), mentre per l’ordine largo ($\leq$, $\geq$) ci pare consona la proprietà riflessiva (per ogni a, a è in relazione con a). Ancora l'ordine largo non sarebbe distinguibile da una relazione d'equivalenza, la proprietà antisimmetrica (per ogni a, b se a è in relazione con b e b in relazione con a, allora a e b sono uguali) pare consona all'ordine largo e anche questo si differenzia dall'equivalenza.
Decidiamo di chiamare una relazione antiriflessiva e transitiva un ordine stretto e una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva un ordine largo.

E’ possibile rappresentare una relazione d’ordine attraverso gli insiemi?
Consideriamo le coppie ordinate (a,b) e (c,d).
Possiamo dire che:

- se $c \neq a$ allora $(a,b) \neq (c,d)$ e se $a \neq b$ allora $(a, b) \neq (b,a)$
- se invece $a=c$ e $b=d$ allora $(a,b) = (c,d)$

Però dal punto di vista degli insiemi coppia questa implicazione non è vera, perché per tali insiemi {a,b} = {b,a} in ogni caso.
Come posso rappresentare con gli insiemi le coppie ordinate?
Devo riuscire a dire qual è il primo e il secondo elemento.
Dato l'insieme {a,b}, per farlo diventare una coppia ordinata, devo specificare l'ordine e quindi definire qual è il primo elemento, un modo per farlo è considerare {{a},{a,b}}.
Consideriamo allora gli insiemi ordinati {{a},{a,b}} e {{c},{c,d}}. Se sono uguali vogliamo far vedere che allora a = c e b = d come si conviene alle coppie ordinate.

Due insiemi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi, ne seguono le seguenti osservazioni:
se {a} $\in$ A allora {a} $\in$ B

1. {a}={c} => a=c
2. {a}={c,d} => c=a e d=a => c=d

Dal punto 2. avrò che: se c=d allora {{c}}={{c},{c}} => (poichè si è presupposto che i due insiemi siano uguali avrò che {{a},{a,b}} e {{c},{c,c}}) {c}={a} e {c}={a,b} => c=a, c=b => a=b=c => (poichè siamo nel caso in cui c=d) a=b=c=d, altrimenti se c≠d allora {a}≠{c,d} => (poichè si è presupposto che i due insiemi siano uguali avrò che {{a},{a,b}} e {{c},{c,d}}) {c}={a} e {a,b}={c,d} => (poichè c≠d) a≠b e a=c => {c,b}={c,d} => b=d.

In conclusione: o ci troviamo nel caso in cui tutti gli elementi sono uguali o siamo nel caso in cui a=c e b=d e tutto questo deriva dall'aver accettato la convenzione che abbiamo messo in evidenzia il primo elemento. Usando solo strumenti insiemistici e nessuna convenzione non posso dire cos'è l'ordine, ma avendo l'ordine come idea di partenza, può essere rappresentato con un insieme e la rappresentazione insiemistica delle coppie ordinate può essere accettabile.
La coppia ordinata si può rappresentare come insieme, ma anche la terna, la quaterna, la cinquina, ...?
Si può ridurre anche ad una n-upla ordinata a coppie ordinate convenendo di accettare le equivalenze seguenti:
$(a_1,a_2,\dots,a_n) = (a_1,(a_2,\dots, a_n)) = (a_1,(a_2,(a_3,\dots, a_n)))$.

Un insieme ordinato sarà dunque un certo insieme A con una relazione d'ordine R e la coppia ordinata (A,R) rappresenta adeguatamente l'insieme ordinato. R sarà contenuto AxA (prodotto cartesiano). R sarà antiriflessiva e transitiva nel caso si voglia considerare un ordine stretto, altrimenti la coppia ordinata (A,R_1) con R_1 contenuto in AxA e R_1 riflessiva antisimmetrica e transitiva rappresenta adeguatamente un ordine largo. Però R e R_1 hanno delle caratteristiche diverse.

Di relazioni d'ordine stretto (d'ordine largo) ce ne sono molte con caratteristiche diverse.

Facciamo esempi di relazione d'ordine stretto con caratteristiche diverse: il primo esempio considera i numeri naturali uno successivo all'altro. Quanti numeri sono compresi tra questi due? Zero. Invece se consideriamo i razionali vi sono infiniti numeri fra due qualsiasi di essi, diversamente da quanto avviene con in naturali.

La diversità tra ordine stretto (ordine largo) può essere colta mediante una delle seguenti proprietà:

- proprietà della densità (esempio precedente)
- proprietà di avere (o non) un elemento maggiore di tutti (massimo)
- proprietà di avere (o non) un elemento minore di tutti (minimo)
- proprietà di avere (o non) un elemento che non ne ha di più grandi (massimale)
- proprietà di avere (o non) un elemento che non ne ha di più piccoli (minimale)

Un altro esempio: prendiamo i naturali e la relazione "divide". È questa una relazione d'ordine? Per esserlo deve essere transitiva e antiriflessiva. La transitività viene verificata facilmente e pure l'antiriflessività, messo in presupposto che un numero non divide se stesso. Questa relazione d'ordine che caratteristiche ha? Un numero primo sarà minimale, ma non esistono minimo, massimo o massimale.

Definiamo inoltre l'ordine totale: una relazione d'ordine sarà totale quando ogni due elementi sono confrontabili (proprietà di tricotomia $a<b$ o $a>b$ o $a=b$). L'esempio precedente non è di ordine totale.

Definiamo inoltre il buon ordine: una relazione d'ordine sarà di buon ordine se ogni sottoinsieme non vuoto ha minimo (ad esempio i numeri naturali). Un buon ordine è anche un ordine totale.