ANALISI MATEMATICA I (Bioinformatica; a.a 2007/08)

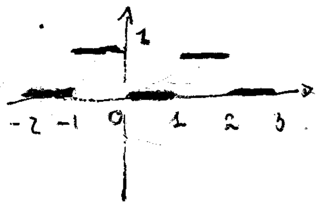
Proff. M. Spera e M. Squassina

Prova scritta del $\boxed{9/9/2008}$

Prologo

1. Determinare il dominio di $f(x) = x^{\pi}$

2. Calcolare, ove definita, la derivata f' della f del punto 1.

3. 

Sia data la funzione in figura, definita in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$; dire se essa è continua.

4. La funzione precedente (def. in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$) è derivabile? Quanto vale f'?

5. Sia $f(x) = \int_0^x \log(1+t)\, dt \qquad (x > 0)$

   calcolare $f'(x)$

6. Calcolare $L = \lim_{x \to 0^+} \dfrac{\int_0^x \log(1+t)\, dt}{x}$

◆ ◆ ◆

E1. Calcolare $L = \lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(x^2) - \sin(1-\cos x)}{x^2}$

E2. Calcolare $\int_{-3}^{3} \left(|x-2| + x|x| e^{\sin(x^2)} \right) dx$

⟶

E3 a) Studiare la convergenza di

$$\int_1^2 \frac{1}{(x^3-1)^\alpha}\,dx$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

b) Stesso problema per $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^3-1)^\alpha}\,dx$

E4 Studiare la funzione

$$f(x) = x^2 e^{-x} + 1$$

dominio, segno, asintoti, pti critici, flessi...
e se ne abbozzi il grafico.

T1 a) Def. di f. primitiva di una f. data
= = f. integrale

Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo (per f. continue su $[a,b]$)

b) Calcolare f', con $f(x) = \displaystyle\int_0^{\sin x} \cos t\, dt$

T2 Enunciare il teorema di Weierstrass per le f. continue e dare un'idea della dimostrazione.

Sol.

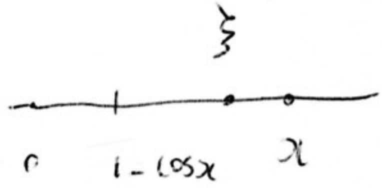
(1) $$L = \lim_{x \to 0} \frac{\sin(x^2) - \sin(1-\cos x)}{x^2}$$

$1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

Conviene utilizzare Lagrange:

N: $\sin(x^2) - \sin(1-\cos x) =$

$$= \cos\xi \, [x^2 - (1-\cos x)]$$



$$= \cos\xi \cdot \left[x^2 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right]$$

$(\forall x > 0)$

$$= \underset{\to 1}{\cos\xi} \cdot \left[\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right]$$

$\forall x \to 0$
$(\xi \to 0)$

Si ha subito, pertanto,

$$L = \frac{1}{2}$$

(*) variante

$$\frac{\sin(x^2)}{x^2} - \frac{\sin(1-\cos x)}{x^2}$$

$$= \underset{\downarrow \\ 1}{\frac{\sin(x^2)}{x^2}} - \underset{\downarrow \\ 1}{\frac{\sin(1-\cos x)}{1-\cos x}} \, \underset{\downarrow \\ \frac{1}{2}}{\frac{1-\cos x}{x^2}}$$

$$L = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

(*) oppure, ancora, McLaurin, direttamente

$$\sin(x^2) - \sin(1-\cos x) = x^2 - \frac{x^6}{6} + o(x^6) - \left[(1-\cos x) - \frac{(1-\cos x)^3}{6} + o(\;)\right]$$

$(1-\cos x) = \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

$$= \frac{x^2}{2} + o(x^2) \implies \dots \; L = \frac{1}{2}$$

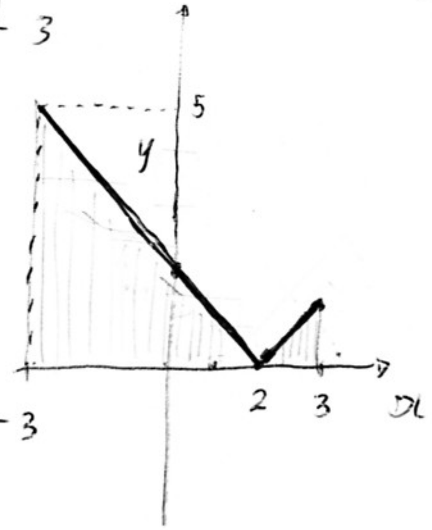
②

$$\int_{-3}^{3} \left(|x-2| + \underbrace{x|x|\, e^{\sin(x^2)}}_{\text{è f. dispari}} \right) dx$$

$$\Rightarrow \int_{-3}^{3} \cdot \; = 0$$

Si deve calcolare

$$I = \int_{-3}^{3} |x-2| \, dx$$



Si ha (cf. figura)

$$I = \int_{-3}^{2} (2-x)\,dx + \int_{2}^{3} (x-2)\,dx$$

$$= 2\cdot 5 - \frac{x^2}{2}\Big|_{-3}^{2} + \frac{x^2}{2}\Big|_{2}^{3} - 2\cdot 1$$

$$= \underbrace{10-2}_{8} - \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-3} + \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{3} - \left(\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{2}$$

$$= 8 - \cancel{2}\,\frac{4}{\cancel{2}} + \cancel{2}\,\frac{9}{\cancel{2}}$$

$$= 8 - 4 + 9 = 13$$

Controlliamo il calcolo elementarmente (v. figura)

$$I = \frac{5 \cdot 5}{2} + \frac{1}{2} 1 \cdot 1 = \frac{25+1}{2} = \frac{26}{2} = 13 \quad !$$

Prologo

(1) $x > 0$ $\qquad f(x) = e^{\pi \log x}$

(2) $f'(x) = \pi x^{\pi - 1}$

Notare anche: $f'(x) = e^{\pi \log x} \cdot \pi \frac{1}{x} = \pi x^{\pi - 1}$

(3) f è continua (costante a tratti) in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$

(4) f è derivabile e $f' \equiv 0$

[non lo sarebbe se estendessimo, in un modo qualsiasi, il suo dominio a tutto $\mathbb{R}$ def. anche in $\mathbb{Z}$]

(5) $f'(x) = \log(1+x)$ (T.F.C.)

(6) $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \frac{\log(1+x)}{1} = \overset{\log 1}{\overset{\shortparallel}{0}} \underset{(\ast)}{=} L$

(T2) parte b) : $f'(x) = \cos(\sin x) \cdot \cos x$

(T.F.C + der. f. composte)

$$F(x) := \int_a^{\alpha(x)} f(t)\,dt$$

$$F'(x) = f(\alpha(x))\,\alpha'(x)$$

sotto ipotesi opportune

- T

③

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x^3-1)^\alpha}\,dx$

$$(x^3-1)^\alpha = (x-1)^\alpha (x^2+x+1)^\alpha$$

si $x \to 1^+$ $\qquad (x^3-1)^\alpha \sim 3^\alpha (x-1)^\alpha$

$\Rightarrow$ si ha convergenza per $\alpha < 1$,

b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^3-1)^\alpha}\,dx$

per $x \to 1^+$ si ha conv. per $\alpha < 1$; per $x \to +\infty$

$$\frac{1}{(x^3-1)^\alpha} \sim \frac{1}{x^{3\alpha}} \Rightarrow \text{deve essere}$$

$$3\alpha > 1 \quad , \quad \alpha > \frac{1}{3}$$

dunque, si ha conv. per $\frac{1}{3} < \alpha < 1$

④ $f(x) = x^2 e^{-x} + 1$

dominio: $\mathbb{R}$ $\qquad f(x) > 0 \quad \forall x \qquad f(0) = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \dots = 1$$ [asintoto orizzontale destro]

non vi sono altri asintoti.

$$f'(x) = 2x\, e^{-x} + x^2 (-e^{-x})$$
$$= e^{-x} \left[2x - x^2 \right]$$
$$= e^{-x} (2 - x)\, x$$

$f(2) = 4e^{-2} + 1 = \frac{4}{e^2} + 1$

f': $- - - \; 0 \; +++ \; 2 \; - - -$

minimo rel (in 0) $\qquad$ massimo rel (in 2)

$$f''(x) = -e^{-x} [2x - x^2] + e^{-x} [2 - 2x]$$
$$= e^{-x} \left[2 - 2x - 2x + x^2 \right]$$
$$= e^{-x} (x^2 - 4x + 2)$$

$$x^2 - 4x + 2 = 0$$

$$x = 2 \pm \sqrt{4-2} = 2 \pm \sqrt{2} \quad \begin{cases} \sim 3{,}4 \\ \sim 0{,}6 \end{cases}$$

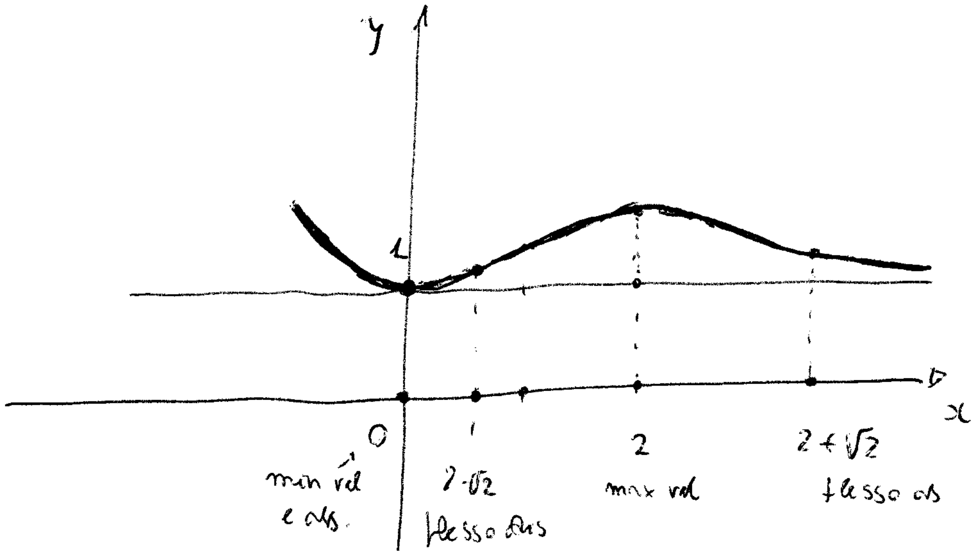
$2-\sqrt{2}$ 2 $2+\sqrt{2}$

f'' ——— 0 - - - - 0 ———

convessa   concava   convessa

flesso

disc   asc.



Abbozzo del grafico

$x = 0$ minimo rel e assoluto

$x = 2$ max relativo

[non ass. poiché $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$]

$x = 2-\sqrt{2}$ flesso disc

$x = 2+\sqrt{2}$ =   asc