Esercitazione III: Calcolo dei funzionali di performance

Il modello in esame è il seguente

$$y(k) = b\,u(k-1) + E(k)$$

dove

$$E(k) \sim WGN(0,\lambda),\ u(k) = 1\ \ k = 1, \dots N \text{ ed } N = 100$$

Stima ML (Maximum likelihood)

Il calcolo della verosimiglianza prevede che si considerino i dati di uscita come delle variabili casuali che risultano distribuite normalmente $Y_k \sim N(\theta,\lambda)$ aventi quindi le seguenti d.d.p

$$f_{Y_k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\, e^{-\frac{(y_k-\theta)^2}{2\lambda}}$$

Considerando gli eventi come indipendenti la distribuzione congiunta relativa alle N vv.cc. Y_k risulta essere la seguente

$$f_{Z^N} = \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}}\, e^{-\frac{(y_k-\theta)^2}{2\lambda}} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\lambda}\right)^N} \prod_{k=1}^{N} e^{-\frac{(y_k-\theta)^2}{2\lambda}}$$

Essendo noi interessati a minimizzare su θ possiamo trascurare il coefficiente della produttoria. Si ha infatti che

$$\hat{\theta}^{ML} = \arg\max_{\theta} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\lambda}\right)^N} \prod_{k=1}^{N} e^{-\frac{(y_k-\theta)^2}{2\lambda}} = \arg\max_{\theta} \prod_{k=1}^{N} e^{-\frac{(y_k-\theta)^2}{2\lambda}}$$

Inoltre, poichè il logaritmo naturale, dove viene definito, è una funzione continua strettamente crescente il precedente problema di massimo può essere ulteriormente semplificato.

$$\hat{\theta}^{ML} = \arg\max_{\theta} \prod_{k=1}^{N} e^{-\frac{(y_k-\theta)^2}{2\lambda}} = \arg\max_{\theta} \ln \prod_{k=1}^{N} e^{-\frac{(y_k-\theta)^2}{2\lambda}} = \arg\max_{\theta} \sum_{k=1}^{N} -\frac{(y_k-\theta)^2}{2\lambda} =$$

$$= \arg\max_{\theta} -\frac{1}{2\lambda} \sum_{k=1}^{N} (y_k-\theta)^2 = \arg\max_{\theta} -\sum_{k=1}^{N} (y_k-\theta)^2$$

Ricordando che per passare da un problema di massimo ad un problema di minimio è sufficiente invertire il segno del funzionale, si desume che il problema di minimo da implementare in matlab possa essere il seguente:

$$\hat{\theta}^{ML} = \arg\min_{\theta} V^{ML}(\theta, Z^N) \ \text{ dove } \ V^{ML}(\theta, Z^N) = \sum_{k=1}^{N} (y_k-\theta)^2$$

Stima MAP (Maximum a posteriori)

Nella stima MAP si cerca di stimare i parametri scegliendo quelli associati alla maggior probabilità condizionata dai dati. In altre parole

$$\hat{\theta}^{MAP} = \arg\max_{\theta} P(\theta|Z^N)$$

Ricordando il teorema di Bayes ed il fatto che una volta misurati i dati cessano di essere una variabile casuale si ha che il problema di stima diviene il seguente

$$\hat{\theta}^{MAP} = \arg\max_{\theta} P(\theta|Z^N) = \arg\max_{\theta} \frac{P(Z^N|\theta)P(\theta)}{P(Z^N)} = \arg\max_{\theta} P(Z^N|\theta)P(\theta)$$

Il primo fattore del prodotto rappresenta la verosimiglianza indicata in (1) mentre il secondo fattore rappresenta il cosiddetto Prior ed è indicato essere una gaussiana centrata in $\mu_p = 1.1\theta_o$ e con varianza $\lambda_p = 1$. Si ha quindi:

$$\hat{\theta}^{MAP} = \arg\max_{\theta} P(Z^N|\theta)P(\theta) = \arg\max_{\theta} \left(\frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\lambda}\right)^N} \prod_{k=1}^{N} e^{-\frac{(y_k-\theta)^2}{2\lambda}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda_p}} e^{-\frac{(\theta-\mu_p)^2}{2\lambda_p}} \right) =$$

$$= \arg\max_{\theta} \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi\lambda}\right)^N \sqrt{2\pi\lambda_p}} e^{-\frac{(\theta-\mu_p)^2}{2\lambda_p}} \prod_{k=1}^{N} e^{-\frac{(y_k-\theta)^2}{2\lambda}} = \arg\max_{\theta} e^{-\frac{(\theta-\mu_p)^2}{2\lambda_p}} \prod_{k=1}^{N} e^{-\frac{(y_k-\theta)^2}{2\lambda}}$$

Passando ai logaritmi si ha che:

$$\hat{\theta}^{MAP} = \arg\max_{\theta} -\frac{(\theta-\mu_p)^2}{2\lambda_p} + \sum_{k=1}^{N} -\frac{(y_k-\theta)^2}{2\lambda} = \arg\max_{\theta} - \left(\frac{(\theta-\mu_p)^2}{\lambda_p} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(y_k-\theta)^2}{\lambda} \right)$$

Ricordando che per passare da un problema di massimo ad un problema di minimo è sufficiente invertire il segno del funzionale, si desume che il problema di minimo da implementare in matlab possa essere il seguente:

$$\hat{\theta}^{MAP} = \arg\min_{\theta} V^{MAP}(\theta, Z^N) \text{ dove } V^{ML}(\theta, Z^N) = \tfrac{1}{\lambda_p}(\theta-\mu_p)^2 + \tfrac{1}{\lambda}\textstyle\sum_{k=1}^{N}(y_k-\theta)^2$$

SI noti come nella stima MAP in esame, la varianza dell'errore e quella del prior concorrano a definire il funzionale oggetto del problema di minimo.