

# Sistemi - Modulo di Sistemi a Eventi Discreti

Laurea Magistrale in Ingegneria e Scienze Informatiche  
Tiziano Villa

19 Settembre 2011

Nome e Cognome:

Matricola:

Posta elettronica:

problema	punti massimi	i tuoi punti
problema 1	10	
problema 2	10	
problema 3	10	
totale	30	

1. Si considerino le seguenti macchine a stati finiti  $M_2$  e  $M_1$ .

$M_2$ :

- stati:  $s_1, s_2, s_3$  con  $s_1$  stato iniziale;
- due variabili d'ingresso  $X = \{0, 1\}$  e  $V = \{0, 1\}$ , due variabili d'uscita  $U = \{0, 1\}$  e  $Z = \{0, 1\}$ ;
- transizione da  $s_1$  a  $s_1$ : 1 – /11,  
transizione da  $s_1$  a  $s_2$ : 00/10,  
transizione da  $s_1$  a  $s_3$ : 01/10,  
transizione da  $s_2$  a  $s_1$ : –0/01,  
transizione da  $s_2$  a  $s_3$ : –1/10,  
transizione da  $s_3$  a  $s_1$ : –1/01,  
transizione da  $s_3$  a  $s_2$ : –0/00.

$M_1$ :

- stati:  $s_a, s_b, s_c, s_d$  con  $s_a$  stato iniziale;
- una variabile d'ingresso  $U = \{0, 1\}$ , una variabile d'uscita  $V = \{0, 1\}$ ;
- transizione da  $s_a$  a  $s_b$ : 1/0,  
transizione da  $s_a$  a  $s_c$ : 1/1,  
transizione da  $s_a$  a  $s_d$ : 0/–,  
transizione da  $s_b$  a  $s_a$ : 0/0,  
transizione da  $s_b$  a  $s_b$ : 1/0,  
transizione da  $s_b$  a  $s_d$ : 0/1,  
transizione da  $s_c$  a  $s_a$ : 0/1,  
transizione da  $s_c$  a  $s_b$ : 1/0,  
transizione da  $s_c$  a  $s_c$ : 1/1,  
transizione da  $s_d$  a  $s_d$ : –/–.

(a) Si chiudano ad anello la macchina  $M_1$  con la macchina  $M_2$ , eliminando i segnali  $U$  e  $V$  per ottenere una macchina composta con ingresso  $X$  e uscita  $Z$ . Si costruisca la macchina composta.

La composizione di  $M_1$  e  $M_2$  è ben formata, cioè definisce per ogni stato e per ogni ingresso  $x$  una sola uscita  $z$ ?

Traccia di soluzione.

La composizione di  $M_1$  e  $M_2$ , denotata anche come  $M_1 \bullet M_2$ , genera una macchina non-deterministica con ingresso  $x$  e uscita  $z$ . Si acclude un grafico che mostra la composizione.

La composizione e' ben formata perche', a partire dallo stato iniziale, in ogni stato per una data  $x$  si puo' produrre una sola  $z$  (e iterativamente si puo' andare in stati in cui per una data  $x$  si produce una sola e medesima  $z$ , anche quando sono stati diversi).

- (b) Si minimizzi il numero degli stati della macchina composta (indipendentemente dal fatto che sia ben formata oppure no), spiegando con chiarezza i passi del procedimento.

Traccia di soluzione.

Applicando il procedimento che ottiene la macchina con il minimo numero di stati bisimile alla composizione  $M_1 \bullet M_2$  si ottiene una macchina con 2 stati, mostrata nel disegno accluso (si fondono gli stati  $(s_1, s_a)$ ,  $(s_1, s_b)$ ,  $(s_1, s_c)$  in uno stato, e gli stati  $(s_2, s_b)$ ,  $(s_3, s_c)$  in un altro stato). Si noti che la macchina minimizzata e' deterministica, confermando che la composizione e' ben formata.

2. Si consideri il seguente automa temporizzato di un termostato con una variabile d'ingresso  $\tau(t)$  (temperatura), una variabile di stato  $s(t)$  (orologio) e una variabile d'uscita  $h(t)$  (segnale di acceso o spento):

- locazioni:  $l_1, l_2$ , con  $l_1$  locazione iniziale, con condizione iniziale  $s(0) := T_c$ ;
- dinamica della locazione  $l_1$ :  $\dot{s}(t) = 1, h(t) = 0$ ,  
invariante della locazione  $l_1$ : *vero*,  
dinamica della locazione  $l_2$ :  $\dot{s}(t) = 1, h(t) = 1$ ,  
invariante della locazione  $l_2$ : *vero*;
- transizione da  $l_1$  a  $l_2$ :  $A/h(t), s(t) := 0$ ,  
transizione da  $l_2$  a  $l_1$ :  $B/h(t), s(t) := 0$ ,  
dove  $A = \{\tau(t) \leq 20 \wedge s(t) \geq T_c\}$ ,  
dove  $B = \{\tau(t) \geq 20 \wedge s(t) \geq T_h\}$   
(la sintassi delle annotazioni di una transizione e' *guardia/uscita, azione*);
- ingresso  $\tau(t) \in \text{Reali}$ ;
- uscita  $h(t) \in \{0, 1\}$ .

(a) Si disegni il diagramma di transizione degli stati dell'automa, annotando con precisione locazioni e transizioni.

(b) Si spieghi il funzionamento del termostato modellato dall'automa temporizzato.

Qual è il significato delle locazioni  $l_1$  e  $l_2$  ?

Traccia di soluzione.

Lo stato iniziale ha un assegnamento  $s(t) := T_c$  che assicura che all'inizio il termostato può passare subito dallo stato di raffreddamento  $l_1$  a quello di riscaldamento  $l_2$  se la temperatura è  $\leq 20$  gradi. Nelle altre due transizioni l'orologio è riassegnato a zero. La clausola della guardia  $s(t) \geq T_h$  garantisce che la caldaia stia accesa per almeno un tempo  $T_h$ . La clausola della guardia  $s(t) \geq T_c$  garantisce che la caldaia stia spenta per almeno un tempo  $T_c$ .

Questa soluzione con due tempi minimi di accensione e spegnimento impedisce l'oscillazione indefinita attorno al valore di 20 gradi; in alternativa si potrebbe progettare un termostato a isteresi che usi una temperatura minima e una massima per decidere il passaggio tra accensione e spegnimento.

La locazione  $l_1$  rappresenta lo stato spento di raffreddamento, quella  $l_2$  lo stato acceso di riscaldamento.

- (c) Data la forma d'onda della temperatura in ingresso  $\tau(t)$  mostrata nella figura allegata, si disegnino qualitativamente sugli assi delle coordinate le forme d'onda della variabile d'uscita  $h(t)$  e della variabile di stato  $s(t)$ , a partire da  $l_1$  e  $s(0) = T_c > 0$ .

Traccia di soluzione.

Si allega una figura con i grafici di  $h(t)$  e  $s(t)$  in risposta all'ingresso  $\tau(t)$ . Inizialmente si assume che la temperatura sia sopra i 20 gradi, per cui il termostato rimane nello stato di raffreddamento  $l_1$  finché la temperatura scende a 20 gradi al tempo  $t_1$ , nel qual momento esegue subito la transizione allo stato di riscaldamento  $l_2$  perché  $s(t) \geq T_c$ . La transizione ri-assegna l'orologio a 0 e accende la caldaia che starà accesa fino al tempo  $t_1 + T_h$  (la temperatura sale sempre a partire da 20 gradi). Al tempo  $t_1 + T_h$  il termostato tornerà nello stato  $l_1$  di raffreddamento spegnendo la caldaia, dove starà per almeno un tempo  $T_c$  e finché la temperatura scenda di nuovo a 20 gradi, nel qual momento si riaccenderà la caldaia.

3. Siano dati  $K$  e  $M = \overline{M}$  linguaggi sull'alfabeto di eventi  $E$ , gli eventi controllabili  $E_c \subseteq E$ , gli eventi osservabili  $E_o \subseteq E$ , e sia  $P$  la proiezione da  $E^*$  a  $E_o^*$ .

- (a) Si presenti intuitivamente la nozione di  $K$  osservabile rispetto a  $M, E_o, E_c$  e poi la si scriva formalmente, commentando come la definizione matematica rispecchi puntualmente la nozione intuitiva.

Traccia di soluzione.

Si consultino le dispense per i dettagli.

Definizione intuitiva: se non si possono differenziare due stringhe in base alla loro osservazione, allora esse dovrebbero richiedere la medesima azione di controllo.

Si considerino i linguaggi  $K$  e  $M = \overline{M}$  definiti sull'alfabeto di eventi  $E$ , con  $E_c \subseteq E$ ,  $E_o \subseteq E$  e  $P$  la proiezione naturale da  $E^*$  a  $E_o^*$ .

Si dice che  $K$  e' osservabile rispetto a  $M, E_o, E_c$  se per tutte le stringhe  $s \in \overline{K}$  e per tutti gli eventi  $\sigma \in E_c$

$$(s\sigma \notin \overline{K}) \wedge (s\sigma \in M) \Rightarrow P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K} = \emptyset.$$

L'insieme di stringhe denotato dal termine  $P^{-1}[P(s)]\sigma \cap \overline{K}$  contiene tutte le stringhe che hanno la medesima proiezione di  $s$  e possono essere prolungate in  $\overline{K}$  con il simbolo  $\sigma$ . Se tale insieme non e' vuoto, allora  $\overline{K}$  contiene due stringhe  $s$  e  $s'$  tali che  $P(s) = P(s')$  per cui  $s\sigma \notin \overline{K}$  e  $s'\sigma \in \overline{K}$ . Tali due stringhe richiederebbero un'azione di controllo diversa rispetto a  $\sigma$  (disabilitare  $\sigma$  nel caso di  $s$ , abilitare  $\sigma$  nel caso di  $s'$ ), ma un supervisore non saprebbe distinguere tra  $s$  e  $s'$  per l'osservabilita' ristretta, e quindi non potrebbe esistere un supervisore che ottiene esattamente il linguaggio  $\overline{K}$ .



(b) Siano  $E = \{u, b\}$  e  $M = \overline{\{ub, bu\}}$ ,  $E_o = \{b\}$ ,  $E_c = \{b\}$ .

Applicando la definizione, si verifichi se il linguaggio  $K_3 = \{bu\}$  e' osservabile rispetto a  $M, E_o, E_c$ .

Traccia di soluzione.

Osservabile.

Sia  $s = \epsilon$ , si ha che  $s\sigma = \epsilon b = b \in \overline{K_3}$ , antecedente falso ed implicazione vera.

Sia  $s = b$ , si ha che  $s\sigma = bb \notin \overline{K_3}$  ma  $s\sigma = bb \notin M$ , antecedente falso ed implicazione vera.

Sia  $s = bu$ , si ha che  $s\sigma = bub \notin \overline{K_3}$  ma  $s\sigma = bbu \notin M$ , antecedente falso ed implicazione vera.

Le condizioni di osservabilita' sono verificate.

(c) Si riporti la definizione di controllabilit .

Si verifichi se il linguaggio  $K_3 = \{bu\}$    controllabile rispetto a  $M, E_c$  suggerendo una strategia di controllo, se esiste.

Traccia di soluzione.

Incontrollabile.

Il controllore non pu  impedire all'impianto di produrre  $u$  (che non si pu  disabilitare) e quindi non pu  restringere l'impianto al linguaggio  $K_3$ .

Si noti che  $K_3$    osservabile, e quindi non   l'inosservabilit  ad impedire ad un supervisore di controllare l'impianto.