

Capitolo 4

Incertezza delle misure

Abbiamo visto fin dal Capitolo 1 che il risultato della misurazione di una grandezza fisica non è mai un ben definito valore numerico, bensì sempre un *intervallo di valori*. Ciò significa che la misura è sempre affetta da *incertezza* (o *indeterminazione*, in inglese *uncertainty*). In questo Capitolo studieremo approfonditamente le origini dell'incertezza di misura e le modalità per il suo trattamento nelle situazioni più frequentemente incontrate in laboratorio.

Inizieremo individuando varie possibili cause di incertezza nelle *misurazioni dirette* (§ 4.1). Introdurremo le diverse tecniche usate per valutare ed esprimere l'incertezza dovuta alla risoluzione di misura (§ 4.2), l'incertezza dovuta agli errori casuali (§ 4.3) e l'incertezza connessa con gli errori sistematici (§ 4.4). Mostriamo infine come è possibile confrontare in modo coerente le incertezze dovute a cause diverse, ed eventualmente sommarle (§ 4.5).

Ci occuperemo poi della valutazione dell'incertezza nelle *misurazioni indirette*, ossia della propagazione dell'incertezza dalle misure dirette alle misure indirette (§ 4.7).

Affronteremo infine, a livello introduttivo, il problema della *correlazione tra grandezze fisiche*, soffermandoci sul caso in cui due grandezze siano possibilmente legate da una relazione lineare; studieremo come calcolare i parametri della relazione lineare a partire dai dati sperimentali tenendo nel debito conto le loro incertezze di misura (§ 4.8).

Alcune tecniche di trattamento dei dati sperimentali verranno introdotte in questo Capitolo 4 in modo puramente fenomenologico. Una loro giustificazione più rigorosa verrà affrontata al Capitolo 7.

4.1 – Cause di incertezza

Al §3.4 abbiamo collegato l'incertezza δX di una misura alla risoluzione di lettura ΔX dello strumento utilizzato. Abbiamo inoltre osservato che l'incertezza può essere influenzata anche da altre cause attribuibili allo strumento, di natura sia sistematica che casuale.

Le caratteristiche dello strumento di misura non sono però le uniche cause che influenzano il risultato di una misurazione. In generale, il risultato di una misurazione (e di conseguenza la sua incertezza δX) può dipendere da diversi fattori:

- difficoltà di definizione della grandezza da misurare;
- caratteristiche operative dello strumento (già discusse nel Cap. 3);
- interazione tra lo strumento e l'oggetto della misurazione;
- interazione tra lo strumento e il soggetto sperimentatore;
- metodologia della misurazione;
- ambiente in cui viene fatta la misurazione.

Esempio: Se si misura lo spessore di una lamina con un micrometro centesimale (risoluzione $\Delta X = 0.01$

mm) il risultato della misurazione può essere influenzato dalla presenza di corpi estranei, ad esempio polvere, tra gli steli del micrometro e l'oggetto (*interazione tra strumento ed oggetto*). Utilizzare un micrometro in acciaio tarato alla temperatura di 20°C per eseguire misurazioni a temperature molto più basse o molto più alte può causare errori di misura non trascurabili (*influenza dell'ambiente*). Lo spessore stesso della lamina può variare a seconda della zona in cui viene misurato (*difficoltà di definizione della grandezza fisica*).

Esempio: Si vuol misurare il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro centesimale (risoluzione $\Delta t = 0.01$ s) comandato manualmente. Il risultato della misurazione dipenderà dalla prontezza di riflessi dello sperimentatore (*interazione tra strumento e sperimentatore*). Il risultato potrà inoltre essere diverso se viene misurata la durata di un singolo periodo oppure la durata di 10 periodi, dividendo poi il risultato per 10 (*metodologia della misurazione*).

Generalizzando i concetti già introdotti al §3.4, i diversi fattori che di volta in volta influenzano una misura e ne determinano l'incertezza possono essere classificati in tre gruppi:

- **risoluzione della misura,**
- **errori casuali,**
- **errori sistematici.**

Nei tre paragrafi seguenti impareremo separatamente a valutare l'incertezza dovuta a ciascuno di questi tre gruppi di fattori. Nel §4.5 introdurremo una procedura unificata per esprimere in modo consistente e confrontabile le incertezze dovute a cause diverse.

Nota: Come vedremo, i termini *errore casuale* ed *errore sistematico* hanno un ben definito significato nel contesto delle misurazioni fisiche. Essi non vanno confusi con i comuni *sbagli*, o *errori parassiti*, dovuti a distrazione o imperizia (ad es., lo scambio di una massa da 50 g per una da 100 g durante una pesata, l'errata lettura del visualizzatore di uno strumento, un errore di calcolo in una misurazione indiretta). Quantunque potenzialmente influenti, gli errori parassiti non sono suscettibili di una trattazione formale, e non verranno quindi presi in considerazione nel seguito. La loro presenza dev'essere comunque evitata preparando con cura gli esperimenti e lavorando con la massima attenzione.

4.2 – Risoluzione della misura

A) Risoluzione dello strumento e risoluzione della misura

Nel § 3.4 ci siamo occupati a livello introduttivo dell'incertezza dovuta alla risoluzione di lettura dello strumento, ΔX_s , considerando alcuni esempi relativi all'uso di strumenti analogici e digitali. Volendo ora approfondire l'argomento, è bene introdurre il concetto più generale di *risoluzione della misura*, ΔX_m .

In realtà, la risoluzione della misura coincide spesso con la risoluzione di lettura dello strumento.

Esempio 1: Si misura il diametro di un tubo con un calibro ventesimale. La risoluzione della misura coincide con la risoluzione di lettura dello strumento: $\Delta X_m = \Delta X_s = 0.05$ mm.

Esempio 2: Si misura la durata del periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro digitale centesimale. Anche in questo caso la risoluzione della misura è uguale alla risoluzione di lettura dello strumento, $\Delta X_m = \Delta X_s = 0.01$ s.

Talora però la risoluzione di misura può essere ridotta, rispetto alla risoluzione di lettura dello strumento, adottando opportune *metodologie di misurazione*. Tipicamente, anziché misurare direttamente la grandezza X , se ne misura un multiplo nX . La risoluzione di lettura ΔX_s dello strumento va pertanto riferita al valore globale di misura nX ; la risoluzione della misura X è quindi n volte inferiore a quella dello strumento: $\Delta X_m = \Delta X_s/n$.

Esempio 3: Si vuole misurare il periodo di oscillazione \mathcal{T} di un pendolo con un cronometro centesimale (la risoluzione dello strumento è quindi $\Delta t_s = 0.01$ s). Allo scopo, si misura la durata complessiva

ΔT di $n = 10$ oscillazioni consecutive, per cui il periodo si ricava come $\mathcal{T} = \Delta T/10$. La risoluzione della misura del periodo \mathcal{T} è pertanto $n=10$ volte inferiore della risoluzione dello strumento: $\Delta t_m = \Delta t_s/n = \Delta t_s/10 = 0.001$ s.

Esempio 4: Si vuole misurare lo spessore medio delle pagine di un libro usando una riga millimetrata ($\Delta X_s = 1$ mm). Allo scopo si misura lo spessore complessivo di $n=100$ pagine, ottenendo $nX = 12$ mm, per cui $X = 0.12$ mm. La risoluzione di misura è $\Delta X_m = \Delta X_s/100 = 0.01$ mm.

B) Incertezza dovuta alla risoluzione

Il risultato della misurazione di una grandezza fisica è un intervallo di valori di estensione corrispondente alla risoluzione di misura ΔX , compreso tra due valori X_{\min} e X_{\max} :

$$X_{\min} \leq X \leq X_{\max}. \quad (4.2.1)$$

Tutti i valori all'interno dell'intervallo sono equivalenti, in quanto la misurazione non è in grado di distinguerli. Possiamo anche dire che tutti i valori di X compresi nell'intervallo sono *equiprobabili*, ovvero che i valori sono distribuiti all'interno dell'intervallo con *densità di probabilità uniforme*. La rappresentazione grafica della densità uniforme è un rettangolo di larghezza ΔX ed area unitaria (Fig. 4.1). (I concetti di probabilità e distribuzione di probabilità, introdotti qui in modo intuitivo, verranno affrontati in modo più rigoroso e sistematico nei Capitoli 5 e 6).

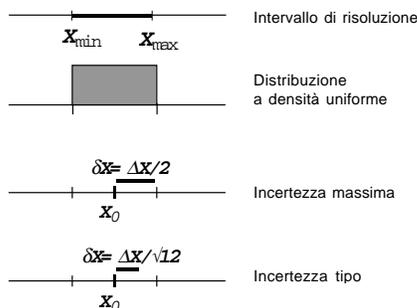


Fig. 4.1 – Rappresentazione grafica del collegamento tra intervallo di risoluzione e distribuzione a densità uniforme, nonché della differenza tra *incertezza massima* e *incertezza tipo*.

Come abbiamo già visto al § 3.4, il risultato della misurazione viene espresso nella forma

$$X = X_0 \pm \delta X, \quad (4.2.2)$$

dove (si riveda sempre il § 3.4):

- X_0 è il valore centrale dell'intervallo di risoluzione;
- δX rappresenta l'*incertezza* della misura.

Una scelta ragionevole per esprimere l'incertezza δX della misura è rappresentata dalla la semi-larghezza dell'intervallo di risoluzione (Fig. 4.1):

$$\delta X_{\text{ris}} = \Delta X / 2. \quad (4.2.3)$$

Poiché l'incertezza δX definita dall'eq. (4.2.3) abbraccia tutti i possibili valori X compresi nell'intervallo di risoluzione, la chiameremo **incertezza massima** (inglese *maximum uncertainty*).

Al §4.5 riprenderemo in considerazione il modo di esprimere l'incertezza dovuta alla risoluzione. Mostriamo allora che, per garantire un confronto consistente con l'incertezza dovuta agli errori casuali, in molti casi è preferibile una scelta convenzionale, diversa dall'eq. (4.2.3), e precisamente (Fig. 4.1)

$$\delta X_{\text{ris}} = \Delta X / \sqrt{12}. \quad (4.2.4)$$

Poiché la definizione di incertezza rappresentata dall'eq. (4.2.4) fa riferimento ad esigenze di consistenza e confrontabilità con altre forme di incertezza, parleremo in questo caso di **incertezza tipo** (in inglese *standard uncertainty*).

Incertezza massima ed incertezza tipo hanno significati diversi, ed i loro valori numerici sono diversi. È quindi necessario specificare sempre esplicitamente se il valore δX corrisponde a incertezza massima o incertezza tipo.

Esempio 1: Si misura l'altezza di un tavolo con un metro da falegname. La risoluzione è $\Delta X = 1$ mm. Ponendo l'estremità del metro sul pavimento, il piano del tavolo risulta situato tra le tacche corrispondenti a 827 e 828 mm. Il risultato della misurazione sarà espresso come $X = (827.5 \pm 0.5)$ mm se si usa l'eq. (4.2.3), come $X = (827.5 \pm 0.3)$ mm se si usa l'eq. (4.2.4).

Esempio 2: Si misura la durata del periodo di oscillazione \mathcal{T} di un pendolo con un cronometro digitale centesimale. La risoluzione è $\Delta t = 0.01$ s. Sul visualizzatore compare il valore 1.75 s. Il risultato della misurazione sarà espresso come $\mathcal{T} = (1.75 \pm 0.005)$ s se si usa l'eq. (4.2.3), come $\mathcal{T} = (1.75 \pm 0.003)$ s se si usa l'eq. (4.2.4).

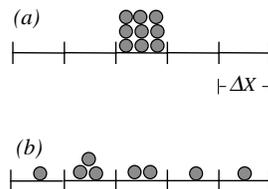
Come si può facilmente verificare, in entrambi gli esempi l'incertezza calcolata secondo l'eq. (4.2.4) è stata espressa in modo arrotondato. *Non ha infatti significato esprimere l'incertezza di misura con più di una o due cifre significative.* Una trattazione dettagliata sull'uso delle cifre significative e degli arrotondamenti, in particolare nell'espressione delle misure, è fatta in Appendice A.1.

4.3 – Errori casuali

A) Misurazioni ripetute

Supponiamo di ripetere più volte la misurazione di una stessa grandezza fisica costante nel tempo. Si possono presentare due casi:

- (a) misure successive cadono nello stesso intervallo di risoluzione;
- (b) misure successive cadono in modo casuale e imprevedibile in intervalli di risoluzione differenti.



Esempio 1: Si misura l'altezza di un foglio di quaderno con una riga millimetrata. La risoluzione è $\Delta X = 1$ mm. Ripetendo più volte la misurazione si ottengono valori compresi sempre entro lo stesso intervallo di risoluzione (caso a).

Esempio 2: Si misura il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro digitale centesimale azionato manualmente. La risoluzione è $\Delta t = 0.01$ s. Ripetendo la misurazione si ottengono valori di volta in volta diversi, che cadono in diversi intervalli di risoluzione (caso b).

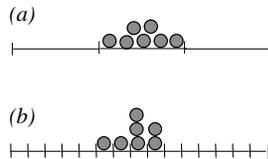
Nel caso (a) l'incertezza δX del valore di misura è legata direttamente alla risoluzione ΔX ; come abbiamo visto al §4.2 si porrà, a seconda dei casi, $\delta X_{\text{ris}} = \Delta X/2$ (incertezza massima), oppure $\delta X = \Delta X_{\text{ris}}/\sqrt{12}$ (incertezza tipo).

Nel caso (b) le discrepanze tra misurazioni diverse della stessa grandezza sono da attribuire all'azione simultanea e casuale di molti piccoli fattori, ciascuno dei quali influisce in modo diverso su ogni singola misura. Ad esempio:

- errori di lettura: carenza di potere separatore dell'occhio, errori di parallasse, errori di interpolazione, errori di sincronizzazione, etc.;
- rumore di fondo, cioè l'effetto di variazioni molto piccole e casuali delle grandezze d'influenza (temperatura, pressione, umidità, vibrazioni, etc.);
- errori d'inversione (differenza tra misure eseguite mentre il valore della grandezza sta crescendo oppure sta diminuendo).

Si dice in questo caso che le misure sono affette da **errori casuali** (ingl. *random errors*), che provocano un'incertezza superiore a quella dovuta alla risoluzione.

In realtà, si può assumere che gli errori casuali siano sempre presenti in una misurazione. Il loro effetto però non appare se è globalmente inferiore alla risoluzione della misura (caso *a*). Se tuttavia la risoluzione viene convenientemente ridotta, utilizzando uno strumento con risoluzione inferiore o modificando la metodologia della misurazione, l'effetto degli errori casuali diviene comunque evidente



(caso *b*). Nel resto di questo paragrafo 4.3 ci occuperemo solo di casi in cui l'effetto degli errori casuali prevale sulla risoluzione della misura, ed affronteremo il seguente problema: come si può valutare quantitativamente l'incertezza dovuta agli errori casuali, in modo da poter ancora esprimere il risultato di una misurazione nella forma $X_0 \pm \delta X$?

A questo scopo, dovremo prima imparare alcune tecniche per la visualizzazione ed il trattamento dei dati sperimentali (istogrammi e loro parametri statistici, §§ B e C) e quindi introdurre il concetto fondamentale di distribuzione limite (§§ D ed E).

B) Iistogrammi

Supponiamo di avere misurato N volte la stessa grandezza fisica X . Il risultato di ogni misurazione sarà individuato da un indice i ($i = 1 \dots N$) e da un valore x_i che rappresenta il centro dell'intervallo di risoluzione corrispondente alla misura i -ma.

Può succedere che misure diverse (valori diversi dell'indice i) cadano nello stesso intervallo di risoluzione. Per rappresentare convenientemente questa situazione si disegna in genere un **istogramma** (vedi Fig. 4.2, ulteriori informazioni sugli istogrammi si possono trovare nell'Appendice A.4). Ogni colonna dell'istogramma ha una base di larghezza ΔX pari alla risoluzione delle misure. Individueremo le colonne dell'istogramma con un indice j . L'altezza della colonna j -ma sarà proporzionale al numero n_j^* di valori di misura caduti nell'intervallo j -mo (Fig. 4.2, a sinistra). Se indichiamo con \mathcal{N} il numero di colonne dell'istogramma, è evidente che

$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} n_j^* = N. \quad (4.3.1)$$

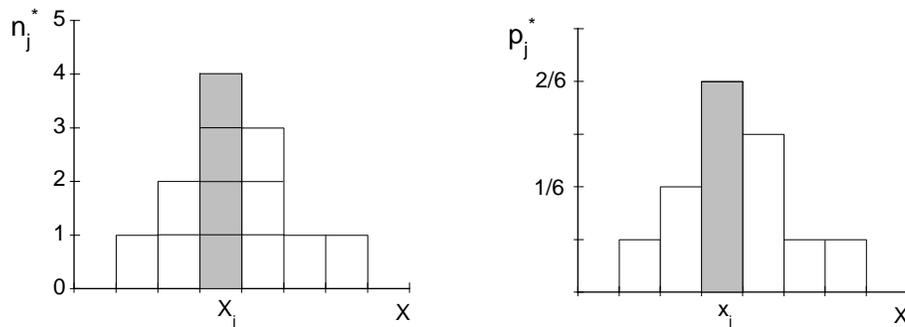


Fig. 4.2 – A sinistra: un istogramma relativo a $N=12$ misure; l'altezza della colonna j -ma rappresenta il numero n_j^* di misure con valore x_j . A destra: il corrispondente istogramma normalizzato in altezza; l'altezza della colonna j -ma rappresenta la frequenza campionaria $p_j^* = n_j^*/N$

L'altezza delle colonne di un istogramma dipende dal numero totale N di misure. Per confrontare istogrammi relativi a numeri N di misure diversi è conveniente normalizzarli in altezza. In un **istogramma normalizzato in altezza** (Fig. 4.2, a destra) l'altezza di ogni colonna è proporzionale alla *frequenza campionaria*

$$p_j^* = n_j^*/N. \quad (4.3.2)$$

È facile verificare che, qualunque sia il numero N di misure,

$$\sum_{j=1}^N p_j^* = 1. \quad (4.3.3)$$

Talvolta può essere necessario confrontare due insiemi di misurazioni della stessa grandezza eseguiti con risoluzioni diverse. I due istogrammi hanno colonne con basi ΔX diverse. È allora necessario ricorrere alla normalizzazione in area. In un **istogramma normalizzato in area** (Fig. 4.3) l'altezza di ogni colonna è proporzionale alla *densità campionaria*

$$f_j^* = \frac{n_j^*}{N \Delta X_j}. \quad (4.3.4)$$

È facile verificare che, qualunque sia il numero N di misure, l'area totale delle colonne è sempre unitaria:

$$\sum_{j=1}^N f_j^* \Delta X_j = 1. \quad (4.3.5)$$

Nota 1: Il significato dell'aggettivo *campionario* sarà chiarito più avanti in questo stesso paragrafo.

Notiamo comunque fin d'ora che in questo testo l'asterisco (*) indica sempre, per convenzione, quantità campionarie.

Nota 2: La frequenza campionaria p^* è sempre una quantità adimensionale. La densità campionaria f^* , definita dall' Eq. (4.3.4), ha invece sempre le dimensioni dell'inverso della grandezza X .

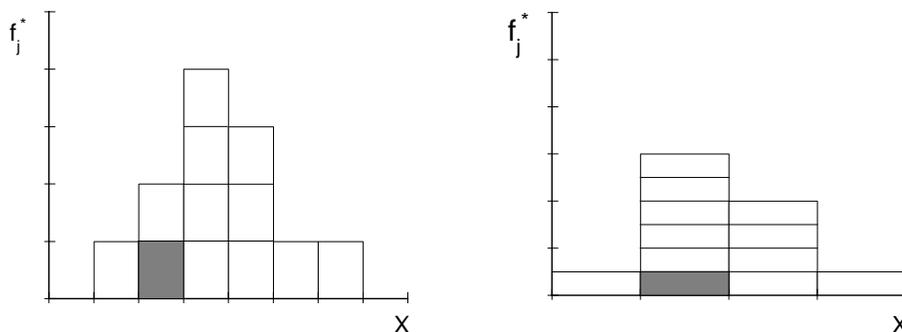


Fig. 4.3 – Confronto tra due istogrammi normalizzati in area. I due istogrammi si riferiscono allo stesso insieme di misure: nell'istogramma di destra le misure sono state raggruppate in colonne di larghezza doppia rispetto alle colonne dell'istogramma di sinistra.

C) Parametri statistici di un istogramma

Un istogramma contiene tutta l'informazione ottenibile da un insieme di N misurazioni di una grandezza fisica. In molti casi, ad esempio per esprimere il risultato di una misurazione affetta da errori casuali, è sufficiente sintetizzare le principali caratteristiche di un istogramma per mezzo di pochi parametri numerici. Ci limiteremo qui a considerare due soli parametri: il primo individua la **posizione media** dell'istogramma sull'asse dei valori x della grandezza fisica, il secondo descrive la **dispersione** dei valori misurati.

Parametro di posizione

La **posizione** dell'istogramma (Fig. 4.4, a sinistra) è individuata dal **valor medio campionario** m^* (in inglese *sample mean*), calcolato come la media aritmetica degli N valori x_i misurati:

$$m^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (4.3.6)$$

Alternativamente possiamo eseguire la somma, anziché su tutti gli N valori misurati, sulle \mathcal{N} colonne dell'istogramma, caratterizzate dalle frequenze campionarie p_j^* :

$$m^* = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} x_j n_j^* = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} x_j \frac{n_j^*}{N} = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} x_j p_j^*. \quad (4.3.7)$$

Nota: Esistono vari modi alternativi per indicare simbolicamente il valor medio di un insieme di valori x_i . Nel seguito considereremo equivalenti le seguenti scritte:

$$m^* \equiv m_x^* \equiv \langle x \rangle \equiv \mathbf{m}^*[x]$$

e di volta in volta utilizzeremo quella che garantisce la migliore chiarezza di lettura delle formule.

Parametri di dispersione

Per misurare la **dispersione** dell'istogramma è utile definire, per ogni valore misurato x_i , il suo *scarto* s_i (in inglese *deviation*) rispetto al valor medio campionario:

$$s_i = x_i - m^*. \quad (4.3.8)$$

Il valor medio degli scarti s_i non serve per misurare la dispersione di un istogramma, in quanto, come è facile verificare, il suo valore è identicamente nullo:

$$\langle s \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i - \frac{1}{N} N m^* = 0. \quad (4.3.9)$$

Una misura convenzionale della dispersione di un istogramma è data dalla **varianza campionaria** D^* (ingl. *sample variance*), definita come il valor medio dei quadrati degli scarti s_i^2 . Come il valor medio campionario, anche la varianza campionaria può essere calcolata sommando su tutti gli N valori misurati oppure sulle \mathcal{N} colonne dell'istogramma:

$$D^* = \langle (x_i - m^*)^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2 = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} (x_j - m^*)^2 p_j^*. \quad (4.3.10)$$

La varianza campionaria D^* ha le dimensioni del quadrato della grandezza misurata X . Per visualizzare direttamente la dispersione di un istogramma è utile una quantità che abbia le stesse dimensioni della grandezza X . Si introduce pertanto lo **scarto quadratico medio campionario** o anche **scarto tipo campionario** (in inglese *sample standard deviation*) σ^* , definito come la radice quadrata della varianza (Fig. 4.4, a destra):

$$\sigma^* = \sqrt{D^*} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} (x_j - m^*)^2 p_j^*}. \quad (4.3.11)$$

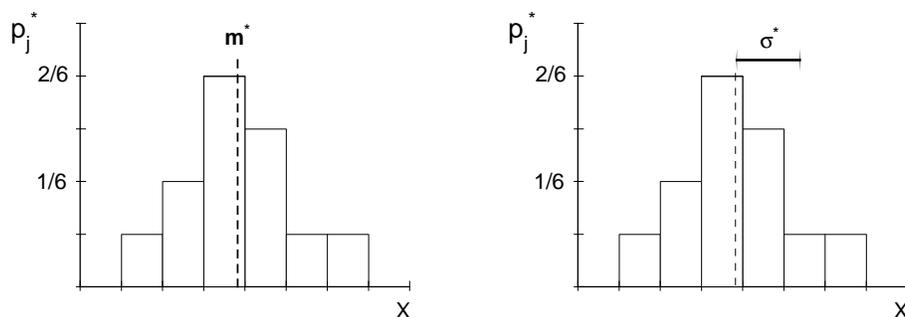


Fig. 4.4 – Valor medio (a sinistra) e scarto quadratico medio (a destra) di un istogramma.

Esempio: Vengono eseguite $N = 20$ misurazioni del periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro digitale centesimale, cioè con risoluzione di lettura $\Delta T = 0.01$ s. I risultati sono riassunti nella seguente tabella.

T_j [s]	n_j^*	p_j^*	f_j^* [s^{-1}]
1.22	1	0.05	5
1.23	2	0.1	10
1.24	4	0.2	20
1.25	6	0.3	30
1.26	3	0.15	15
1.27	3	0.15	15
1.28	1	0.05	5
Σ	20	1.00	100

Il valor medio campionario, la varianza campionaria e lo scarto quadratico medio campionario sono rispettivamente: $m^* = 1.25$ s, $D^* = 2.25 \times 10^{-4}$ s², $\sigma^* = 1.5 \times 10^{-2}$ s.

È facile vedere che la varianza D^* è la differenza tra il valor medio dei valori x_i^2 ed il quadrato del valor medio dei valori x_i . Infatti

$$\begin{aligned}
 D^* &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \langle x \rangle)^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [x_i^2 - 2x_i \langle x \rangle + \langle x \rangle^2] \\
 &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2
 \end{aligned}
 \tag{4.3.12}$$

L'uso dell'espressione (4.3.12) in alternativa all'espressione (4.3.10) può talvolta rendere più veloci i calcoli della varianza D^* e quindi dello scarto quadratico medio σ^* .

D) Distribuzione limite

Come abbiamo visto, il risultato di N misurazioni affette da errori casuali può essere rappresentato da un istogramma oppure, in modo meno completo ma più sintetico, dai due parametri m^* e σ^* che ne rappresentano rispettivamente la posizione media e la dispersione rispetto all'asse dei valori x .

Supponiamo ora di eseguire un nuovo insieme di N misurazioni della stessa grandezza X ; ci aspettiamo di ottenere un istogramma diverso dal precedente, con valori m^* e σ^* pure diversi. Eseguendo altri insiemi di N misurazioni otterremo istogrammi ancora diversi e valori diversi di m^* e σ^* . Possiamo dire che l'istogramma relativo a N misurazioni ed i suoi parametri statistici m^* e σ^* hanno carattere aleatorio, cioè casuale.

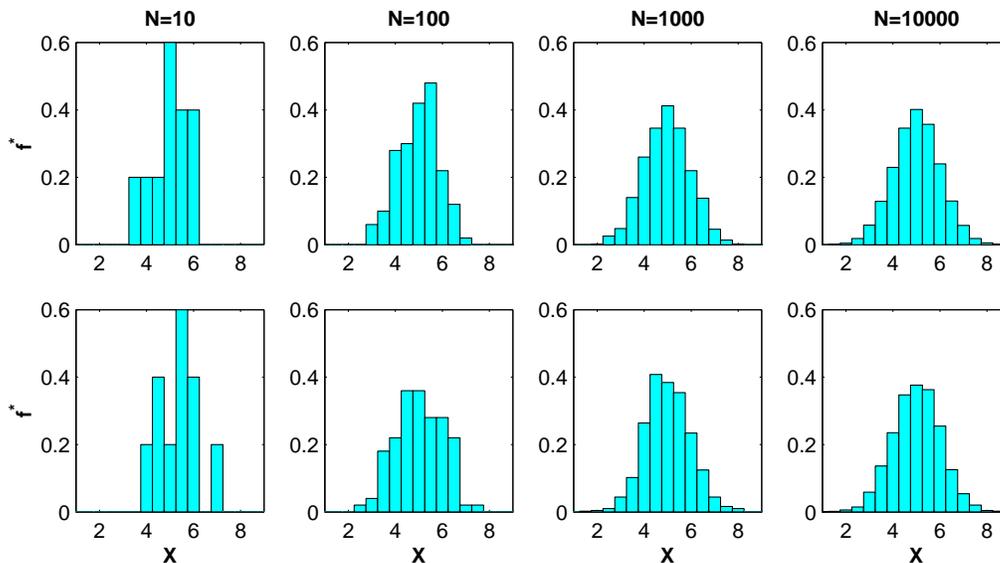


Fig. 4.5 – Otto istogrammi, normalizzati in area, relativi a diverse misurazioni di una stessa grandezza fisica. I due istogrammi a sinistra, relativi entrambi a $N=10$ misure indipendenti, sono notevolmente diversi. Al crescere del numero N di misure per istogramma (andando cioè da sinistra verso destra) gli istogrammi perdono progressivamente le caratteristiche aleatorie e tendono ad assumere una forma ben definita.

Si verifica però sperimentalmente che, al crescere del numero N di misure per ogni istogramma, gli istogrammi relativi a insiemi diversi di misurazioni tendono ad assumere forma simile (Fig. 4.5); corrispondentemente, le differenze tra i valori di m^* e di σ^* relativi a istogrammi diversi tendono a ridursi. Queste osservazioni hanno portato ad introdurre il concetto di **istogramma limite**, a cui tendono ad assomigliare i singoli istogrammi sperimentali al crescere del numero di misure N . In termini asintotici, si dice che un istogramma sperimentale tende all'istogramma limite per $N \rightarrow \infty$.

L'istogramma limite è evidentemente un'astrazione. La sua esistenza non può essere verificata (il numero N di misurazioni è comunque necessariamente finito). Postulare l'esistenza di un istogramma limite equivale, in ultima analisi, a postulare l'esistenza di una regolarità del mondo naturale che consente di estrarre leggi di carattere generale a partire da un numero limitato di osservazioni.

Spesso (ma non sempre) l'istogramma di misure affette da errori casuali tende, al crescere di N , ad assumere una forma simmetrica “a campana” (Fig. 4.5, a destra). Anche l'istogramma limite avrà allora una forma a campana.

È utile cercare di descrivere questo andamento a campana dell'istogramma limite per mezzo di un modello matematico. Un modello matematico risulta però più agevole da trattare se espresso in termini di funzioni continue. Conviene pertanto fare un'ulteriore passaggio al limite, restringendo indefinitamente la larghezza delle colonne dell'istogramma: $\Delta x \rightarrow 0$. In questo modo l'istogramma limite viene sostituito da una *distribuzione limite*, esprimibile sotto forma di una funzione di variabile continua $f(X)$.

Osservazioni sperimentali e considerazioni teoriche hanno portato a concludere che il modello di funzione più adatto a descrivere l'andamento simmetrico a campana della distribuzione limite è dato dalla *distribuzione normale* o *distribuzione di Gauss*:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right] \quad (4.3.13)$$

I due parametri m e σ dell'eq. (4.3.13) hanno le stesse dimensioni dei valori della variabile x . La funzione $f(x)$ che compare nell'eq. (4.3.13) è dimensionalmente omogenea alla densità campionaria f_j^* definita dall'eq. (4.3.4). La distribuzione gaussiana può pertanto essere considerata come il limite di un

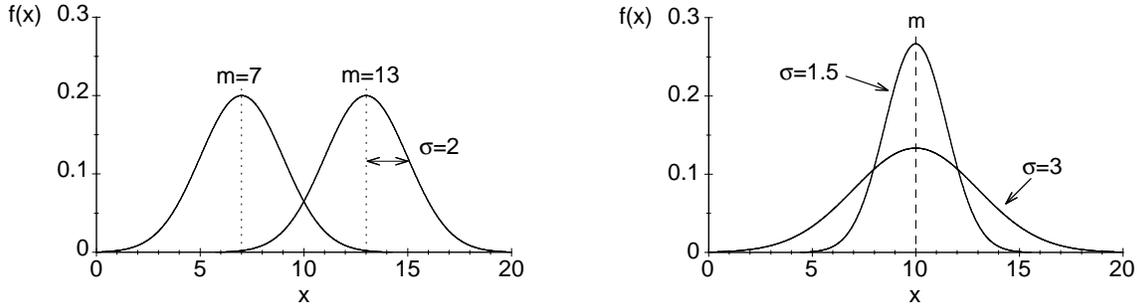


Fig. 4.6 – Distribuzione normale di Gauss, eq. (4.3.13). A sinistra due distribuzioni con uguale scarto quadratico medio σ e diversi valori medi m . A destra due distribuzioni con uguale valor medio m e diversi scarti quadratici medi σ .

istogramma normalizzato in area (Fig. 4.5) non solo per $N \rightarrow \infty$ (numero di misurazioni tendente ad infinito) ma anche per $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ (numero di colonne tendente ad infinito, cioè $\Delta x_j \rightarrow 0$).

È facile verificare che il parametro m individua la posizione della distribuzione sull'asse x , mentre σ dipende dalla larghezza della distribuzione (Fig. 4.6).

I parametri m e σ rappresentano, rispettivamente, i valori asintotici per $N \rightarrow \infty$ del valor medio campionario m^* e dello scarto tipo campionario σ^* . Per convincersene, si può partire dalle espressioni della media e della varianza campionarie, m^* e D^* , Eq. (4.3.7) e (4.3.10), sostituendo la frequenza campionaria con la densità campionaria: $p^* = f^* \Delta x$. Il passaggio al limite per $\mathcal{N} \rightarrow \infty$ si fa sostituendo le sommatorie con gli integrali:

$$m^* = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} x_j f_j^* \Delta x_j \quad \rightarrow \quad m = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (4.3.14)$$

$$D^* = \sum_{j=1}^{\mathcal{N}} (x_j - m^*)^2 f_j^* \Delta x_j \quad \rightarrow \quad D = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^2 f(x) dx \quad (4.3.15)$$

Dalle varianze è immediato passare agli scarti tipo: $D^* = (\sigma^*)^2$ e $D = \sigma^2$. Chiameremo pertanto m “valor medio” della distribuzione limite, o semplicemente “media limite”, e σ “scarto quadratico medio” o “scarto tipo” (ingl. *standard deviation*) della distribuzione limite.

Il passaggio al limite dalla sommatoria (eq. 4.3.5) all'integrale consente di vedere che anche la distribuzione limite, come l'istogramma normalizzato in area, sottende un'area unitaria:

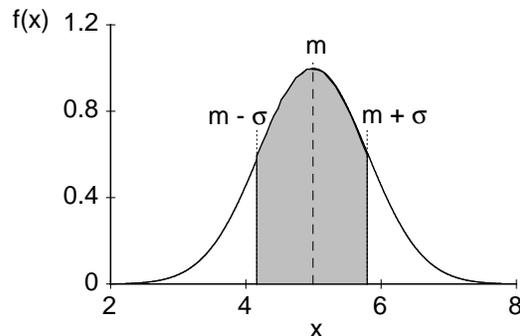
$$\sum_{j=1}^{\mathcal{N}} f_j^* \Delta X_j = 1 \quad \rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Le proprietà della distribuzione normale di Gauss verranno analizzate più dettagliatamente nel Cap. 6. Lì dimostreremo che

l'area compresa tra	$m - \sigma$ e $m + \sigma$	è sempre	0.683	(68 % dell'area totale, Fig. 4.7),
l'area compresa tra	$m - 2\sigma$ e $m + 2\sigma$	è sempre	0.954,	
l'area compresa tra	$m - 3\sigma$ e $m + 3\sigma$	è sempre	0.997.	

La distribuzione limite, essendo definita come limite di un istogramma sperimentale per $N \rightarrow \infty$, $\Delta x \rightarrow 0$, è evidentemente un'astrazione, come l'istogramma limite. La distribuzione limite non è pertanto direttamente conoscibile. Potrà solo essere approssimata, con precisione tanto maggiore quanto più grande è il numero N di misurazioni effettuate. Inoltre, è evidente che il modello gaussiano non può comunque interpretare i dati sperimentali in modo esatto, almeno per quanto riguarda le code della distribuzione: la funzione rappresentata dall'eq. (4.3.13) infatti non si annulla per nessun valore della variabile x .

Fig. 4.7 – Esempio di distribuzione normale di Gauss con valor medio $m=5$ e scarto quadratico medio $\sigma=0.8$. L'area sottesa dalla curva tra $x = m - \sigma$ e $x = m + \sigma$ rappresenta *sempre* il 68 % dell'area totale, per qualsiasi valore di m e σ .



Nonostante queste limitazioni, ipotizzare l'esistenza della distribuzione limite rappresenta, come vedremo, uno strumento estremamente utile per stabilire criteri di valutazione quantitativa dei risultati di un insieme finito di misurazioni.

Ogni insieme di N misure può venire considerato come un **campione** (ingl. *sample*), necessariamente finito, della distribuzione limite, caratterizzato da un valor medio campionario m^* e da una varianza campionaria D^* .

Non è ovviamente possibile *determinare con esattezza* i parametri di una distribuzione limite a partire da un suo campionamento finito. Comunque grande sia il numero N di misure, infatti, i parametri statistici m^* e D^* hanno sempre un carattere aleatorio. È però plausibile cercare di **stimare** i parametri m e $D = \sigma^2$ della distribuzione limite a partire dai parametri statistici m^* e D^* di un campionamento costituito da N misure. Affronteremo in modo approfondito al Cap. 7 il problema della stima dei parametri di una distribuzione limite a partire da un suo campionamento finito. Qui ci limitiamo ad anticipare i risultati più importanti.

Supponiamo di avere effettuato N misurazioni di una grandezza fisica e di avere ottenuto N valori x_i .

- a) La migliore *stima* del valor medio m della distribuzione limite, che indicheremo con \tilde{m} , è il valor medio campionario m^* :

$$\tilde{m} = m^* = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i. \quad (4.3.16)$$

- b) La migliore *stima* della varianza $D = \sigma^2$ della distribuzione limite, che indicheremo con \tilde{D} , *non* è la varianza campionaria D^* , bensì:

$$\tilde{D} = \frac{N}{N-1} D^* = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2. \quad (4.3.17)$$

Evidentemente $D^* < \tilde{D}$; la differenza è però tanto più piccola quanto più grande è N .

La varianza campionaria D^* sottostima la varianza limite D perché è basata sugli scarti rispetto alla media campionaria m^* anziché sugli scarti rispetto alla media limite m .

A partire dall'eq. (4.3.17) si può anche considerare la migliore stima $\tilde{\sigma}$ dello scarto quadratico medio limite:

$$\tilde{\sigma} = \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma^* = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2}. \quad (4.3.18)$$

Il valore $\tilde{\sigma}$ dell'Eq. (4.3.18) è detto **scarto tipo stimato** o *scarto tipo sperimentale* (ingl. *experimental standard deviation*).

Esempio 1: Per avere un'idea intuitiva della differenza tra σ^* e $\tilde{\sigma}$, costruiamo tre insiemi costituiti, rispettivamente, da $N = 6, 4$ e 2 valori x_i , con uguali valor medio m^* e scarto tipo σ^* . È facile verificare che lo scarto tipo stimato $\tilde{\sigma}$, calcolato mediante l'eq. (4.3.18), cresce al diminuire di N , allontanandosi dal valore $\sigma^*=1$.

N	x_i	m^*	σ^*	$\tilde{\sigma}$
6	4,4,4,6,6,6	5	1	1.095
4	4,4,6,6	5	1	1.155
2	4,6	5	1	1.410

Esempio 2: Se si esegue una sola misurazione, cioè se $N=1$, si ottiene un solo valore x_1 . In tal caso $m^* = x_1$ e $\sigma^* = 0$: lo scarto tipo campionario è nullo. L'eq. (4.3.18) mostra che per $N=1$ lo scarto tipo stimato $\tilde{\sigma}$ è indeterminato. Ciò corrisponde al fatto che con una sola misura non è possibile alcuna stima della dispersione della distribuzione limite.

E) Distribuzione dei valori medi

La distribuzione limite introdotta nella precedente Sezione 4.3.D descrive la dispersione dei valori delle singole misure di una grandezza X a seguito delle fluttuazioni dovute agli errori casuali.

Consideriamo ora M distinti campionamenti, ciascuno costituito da N misurazioni. I valori medi campionari m^* per ciascuno degli M campionamenti

$$m_1^*, m_2^*, m_3^*, \dots, m_M^*$$

possono essere raggruppati in un istogramma (istogramma dei valori medi campionari).

Al crescere del numero M di campionamenti l'istogramma dei valori medi campionari tende ad assumere una forma sempre più regolare. Per $M \rightarrow \infty$ potremo parlare di un istogramma limite dei valori medi campionari e quindi, passando al continuo, di una *distribuzione limite $g(m^*)$ dei valori medi campionari*.

È ragionevole aspettarsi che la distribuzione limite $g(m^*)$ delle medie campionarie sia più stretta della distribuzione limite $f(x)$ dei singoli valori di misura. Di più, ci aspettiamo che la distribuzione delle medie campionarie sia tanto più stretta quanto più grande è il numero N di misurazioni su cui si basa il calcolo di ogni singola media campionaria (Fig. 4.8).

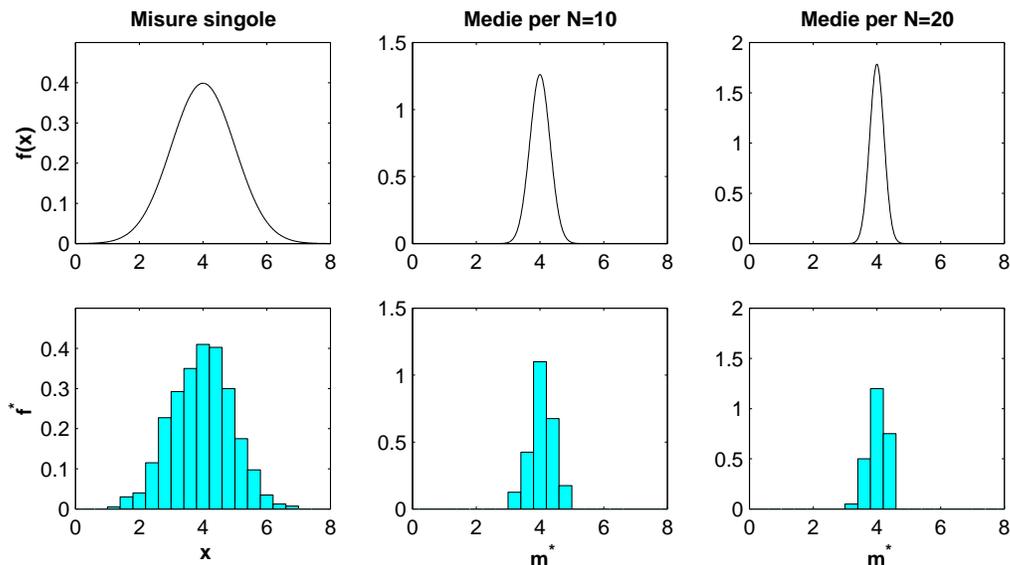


Fig. 4.8 – In alto a sinistra: distribuzione limite gaussiana di valori di misura singola, con $m=4$ e $\sigma=1$ (in unità di misura arbitrarie). Sempre in alto, al centro e a destra sono mostrate le corrispondenti distribuzioni limite delle medie campionarie m^* , basate rispettivamente su $N=10$ e $N=20$ misure. In basso a sinistra: un campionamento sperimentale costituito da $N=1000$ misure singole x . Sempre in basso, al centro e a destra: campionamenti rispettivamente di $M=100$ valori medi m^* basati su $N=10$ misure e $M=50$ valori medi m^* basati su $N=20$ misure.

Nel Capitolo 6 mostreremo che

- a) qualunque sia la forma della distribuzione limite $f(x)$ dei valori di misura singola (quindi anche non gaussiana), la distribuzione $g(m^*)$ delle medie campionarie può comunque essere assunta gaussiana se il numero N di misure che concorrono a formare la singola media m^* è sufficientemente grande.

Nel Capitolo 7 dimostreremo inoltre che:

- b) il *valor medio* $\mathbf{m}[m^*]$ della distribuzione limite delle medie campionarie coincide con il valor medio m della distribuzione limite delle singole misure:

$$\mathbf{m}[m^*] = m; \quad (4.3.19)$$

- c) la *varianza* $\mathbf{D}[m^*]$ e lo *scarto quadratico medio* $\sigma[m^*]$ della distribuzione limite delle medie campionarie sono legati rispettivamente alla varianza D e allo scarto quadratico medio σ della distribuzione limite delle singole misure dalle relazioni:

$$\mathbf{D}[m^*] = \frac{1}{N} D; \quad \sigma[m^*] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma, \quad (4.3.20)$$

dove N è il numero di misurazioni per ogni campionamento.

F) Incertezza dovuta agli errori casuali

Siamo ora finalmente in grado di risolvere il problema che ci eravamo posti all'inizio del § 4.3: stabilire le modalità per esprimere nella forma $X_0 \pm \delta X$ il risultato di N misurazioni ripetute affette da errori casuali.

Se la distribuzione limite $f(x)$ delle singole misure fosse perfettamente nota, potremmo assumere come *valore vero* della grandezza fisica misurata il valor medio della distribuzione limite: $X_0 = m$. L'incertezza dovuta agli errori casuali sarebbe perciò nulla, $\delta X_{\text{cas}} = 0$.

Nella realtà, la distribuzione limite non è mai nota. Se ne può al più postulare l'esistenza, e considerare le N misurazioni effettuate come un suo campionamento limitato.

Come abbiamo visto sopra, la media campionaria m^* delle N misure rappresenta comunque la migliore stima del valor medio m della distribuzione limite. È perciò ragionevole assumere come **valore centrale** X_0 della misura la media campionaria m^* :

$$X_0 = m^*. \quad (4.3.21)$$

D'altra parte, la media campionaria m^* è una variabile aleatoria, il cui valore cambierebbe in modo casuale se ripetessimo il campionamento. L'**incertezza** δX_{cas} della misura dipende dall'aleatorietà della media campionaria m^* . È naturale pertanto collegare l'incertezza della misura alla larghezza della distribuzione limite delle medie campionarie.

Nel caso dell'incertezza dovuta alla risoluzione, considerato al § 4.2, abbiamo avuto a che fare con una distribuzione a rettangolo, definita da due valori minimo e massimo della grandezza X . È stato quindi possibile introdurre un'incertezza massima $\delta X_{\text{ris}} = \Delta X/2$.

Al contrario, la distribuzione limite delle medie campionarie è con buona approssimazione gaussiana, e non è limitata tra due valori massimo e minimo della variabile m^* . Non è pertanto possibile definire un'incertezza massima. La larghezza della distribuzione delle medie campionarie può essere espressa in termini di scarto tipo $\sigma[m^*]$, per cui, nel caso degli errori casuali, si può definire solo un'incertezza tipo (*standard uncertainty*):

$$\delta X_{\text{cas}} \propto \sigma[m^*]. \quad (4.3.22)$$

Per convenzione si assume l'incertezza tipo δX_{cas} dovuta agli errori casuali proprio uguale allo scarto tipo $\sigma[m^*]$,

$$\delta X_{\text{cas}} = \sigma[m^*]. \quad (4.3.23)$$

G) Valutazione sperimentale dell'incertezza

Vediamo ora come è possibile, nella pratica, valutare l'incertezza dovuta agli errori casuali a partire da un insieme finito di misure, cioè da un campionamento finito della distribuzione limite.

La procedura da seguire si basa sulla seguente sequenza logica.

- L'incertezza dovuta agli errori casuali è, per convenzione, data dallo scarto tipo della distribuzione delle medie campionarie: $\delta X_{\text{cas}} = \sigma[m^*]$.
- Lo scarto tipo della distribuzione delle medie campionarie, $\sigma[m^*]$, è legato allo scarto tipo σ della distribuzione limite delle singole misure dalla relazione $\sigma[m^*] = \sigma/\sqrt{N}$ (eq. 4.3.20).
- Lo scarto tipo σ della distribuzione limite delle singole misure non è calcolabile con esattezza a partire da un numero finito di misurazioni; può però essere *stimato* mediante l'eq. (4.3.18).

Combinando insieme questi tre passi, avremo in definitiva:

$$\delta X_{\text{cas}} = \tilde{\sigma}[m^*] = \frac{1}{\sqrt{N}} \sigma = \frac{1}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{N}{N-1}} \sigma^* = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2}. \quad (4.3.24)$$

L'ultima uguaglianza nell'eq. (4.3.24) dà la formula pratica per stimare l'incertezza dovuta agli errori casuali a partire da un insieme di misure ripetute.

Il valore $\tilde{\sigma}[m^*]$ calcolato mediante l'eq. (4.3.24) è chiamato **scarto tipo stimato della media** (in inglese, *experimental standard deviation of the mean*).

È evidente che per valutare δX_{cas} è necessario avere a disposizione almeno due misure ($N > 1$).

Cerchiamo ora di approfondire il significato dell'eq. (4.3.23). Che cosa significa che l'incertezza dovuta agli errori casuali è convenzionalmente misurata dallo scarto tipo della distribuzione delle medie ?

Abbiamo visto in precedenza, quando abbiamo introdotto la distribuzione normale di Gauss, che l'area sottesa dalla curva della funzione gaussiana tra i valori $m - \sigma$ e $m + \sigma$ è pari a 0.68. Pertanto, nell'ipotesi astratta di conoscere *a priori* la distribuzione gaussiana delle medie campionarie, centrata in m e con scarto tipo $\sigma[m^*]$, potremmo dire che la media m^* di un qualsiasi campionamento ha la probabilità del 68 % di cadere nell'intervallo $m^* \pm \sigma[m^*]$.

Consideriamo ora invece un caso concreto, in cui si conoscono i valori campionari m^* e σ^* , e si cerca di risalire alla migliore stima del valor vero m . Possiamo ancora dire che c'è la probabilità del 68 % che il valor vero m si trovi nell'intervallo $m^* \pm \delta X_{\text{cas}}$, con δX_{cas} stimato mediante l'eq. (4.3.24) ?

Se il campionamento è consistente (N grande), la risposta è, con buona approssimazione, sì. Si tratta però solo di un'approssimazione, dovuta al fatto che lo scarto tipo della distribuzione delle medie non è noto esattamente (eq. 4.3.23), bensì solo stimato a partire dai dati sperimentali (eq. 4.3.24). La conseguenza di questo fatto può essere rilevante per campionamenti di limitate dimensioni (N piccolo): la probabilità che m si trovi nell'intervallo $m^* \pm \delta X$ è infatti del 68 % solo al limite per $N \rightarrow \infty$; per valori di N piccoli la probabilità può essere significativamente inferiore al 68 %.

Ritourneremo in modo più approfondito su questo problema ai §7.3 e 7.4. Per il momento, ci limitiamo a ricordare che è sempre buona norma, nell'esprimere l'incertezza dovuta agli errori casuali, indicare il numero N di misurazioni effettuate.

Nota: In questo paragrafo 4.3 abbiamo adottato la seguente convenzione di nomenclatura, che sarà mantenuta anche in seguito: con m, D, σ sono indicati i parametri relativi a distribuzioni limite, con m^*, D^*, σ^* i parametri relativi a campionamenti, con $\tilde{m}, \tilde{D}, \tilde{\sigma}$ eventuali stime dei parametri.

4.4 – Errori sistematici

Nel §3.4, analizzando le prestazioni degli strumenti di misura, abbiamo preso in considerazione gli *errori sistematici*, cioè gli errori che si manifestano in modo regolare con la stessa entità ogni volta che la misura viene ripetuta.

Esempio: Si misura il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro che ritarda. Tutte le misure, comunque ripetute, sono errate per difetto (errore sistematico dovuto alla taratura difettosa dello strumento).

Le caratteristiche dello strumento di misura non sono le uniche possibili cause di errore sistematico. Anche le modalità con cui lo strumento viene utilizzato possono contribuire ad introdurre errori sistematici (si riveda l'analisi fatta al §4.1 sull'origine dell'incertezza).

Esempio: Si misura il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro azionato manualmente. Il valore della misura dipende anche dalla differenza tra i tempi di reazione dello sperimentatore all'avvio e all'arresto del cronometro. La differenza tra i tempi di reazione può avere sia una componente casuale sia una componente sistematica; la componente casuale dà origine alla dispersione dei valori di misura; la componente sistematica dà origine ad una variazione fissa del valore di misura.

La varietà delle situazioni da cui possono avere origine gli errori sistematici rende pressoché impossibile una trattazione formale esauriente. La ricerca e l'eliminazione o compensazione degli errori sistematici è un aspetto particolarmente difficile e delicato della fisica sperimentale. Nel seguito di questo paragrafo esamineremo e commenteremo alcuni casi particolarmente rilevanti, senza alcuna pretesa di esaurire l'argomento.

A) Misurazioni ripetute in condizioni fisse.

Supponiamo di ripetere più volte la misurazione di una grandezza fisica sempre nelle stesse condizioni, cioè mantenendo invariati l'osservatore, la procedura, lo strumento ed eseguendo tutte le misurazioni nello stesso sito ed entro un intervallo di tempo limitato. Ogni misura è in genere affetta sia da errori *casuali* sia da errori *sistematici*.

Come abbiamo visto al §4.3, gli *errori casuali* non possono venire del tutto eliminati, ma è sempre possibile, ripetendo più volte la misurazione, stimarne l'entità ed esprimerla sotto forma di un'incertezza δX_{cas} .

Gli *errori sistematici*, invece, non vengono comunque messi in luce da misurazioni ripetute nelle stesse condizioni sperimentali; essi possono venire individuati solo mediante un'analisi accurata delle prestazioni dello strumento e della metodologia della misurazione. Proviamo a chiarire le idee con alcuni esempi significativi.

- 1) Talora l'analisi metodologica può portare a individuare un errore sistematico dovuto alla procedura di misura. In tal caso, l'errore può venire eliminato modificando opportunamente la metodologia di misura, oppure compensato da un'opportuna correzione alla misura. L'eventuale correzione può essere comunque affetta da un'incertezza δX_{sis} , che contribuirà all'incertezza globale della misura (§4.5.D).

Esempio: Si misura l'accelerazione di gravità g sfruttando la relazione $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ che lega il periodo di oscillazione T e la lunghezza ℓ di un pendolo semplice nell'approssimazione delle piccole oscillazioni. Il pendolo a disposizione è un cilindretto metallico appeso ad un punto fisso mediante un filo: si misurano direttamente lunghezza ℓ e periodo T e quindi si calcola $g = (2\pi/T)^2\ell$. Un'analisi più accurata mostra che il periodo dipende anche dall'ampiezza di oscillazione e dalla distribuzione della massa del cilindretto. La relazione di partenza $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ è approssimata, quindi crea un errore

sistematico nella misura di g ; una relazione più accurata, seppure ancora approssimata, è la seguente: $\mathcal{T} = 2\pi \sqrt{I/mg\ell} [1 + (1/4) \sin^2(\theta_0/2)]$, dove I è il momento d'inerzia del cilindretto rispetto all'asse di oscillazione e θ_0 l'ampiezza di oscillazione.

- 2) In altri casi, l'analisi della procedura di misurazione porta ad individuare le maggiori cause di errore sistematico senza però consentire di calcolarne e correggerne gli effetti con esattezza. In tali casi si cerca di stimare l'entità dei possibili errori sistematici e di esprimerla ancora sotto forma di un'incertezza δX_{sis} , che contribuirà all'incertezza globale della misura (§4.5.D).

Esempio: Si vuole misurare l'intensità di corrente I che scorre in un ramo di un circuito elettrico. Allo scopo si inserisce in serie nel ramo del circuito un amperometro a bobina mobile. Lo strumento di misura ha una resistenza interna R_i non nulla ed introduce una perturbazione nel regime di funzionamento del circuito. L'intensità di corrente misurata dallo strumento è $I_m < I$. La differenza $I_m - I$ rappresenta un *errore sistematico* della misura. In linea di principio, se la resistenza interna R_i dello strumento e le caratteristiche del circuito sono note, l'errore sistematico può essere valutato e corretto. Nella pratica, le caratteristiche del circuito non sono in genere note con sufficiente dettaglio; è però possibile stimare almeno l'entità massima dell'errore sistematico.

- 3) Può anche succedere che l'errore sistematico sia riferibile ad una insufficiente definizione della grandezza da misurare.

Esempio: Si vuole misurare la dipendenza del periodo di oscillazione \mathcal{T} di un pendolo dall'ampiezza θ_0 . Allo scopo, si misurano coppie di valori (θ_0, \mathcal{T}) per diversi valori di θ_0 . È ben noto, tuttavia, che l'ampiezza θ_0 si riduce progressivamente nel tempo, per effetto principalmente della resistenza dell'aria. Per grandi valori di θ_0 la riduzione può essere non trascurabile anche durante l'intervallo di tempo corrispondente ad un periodo \mathcal{T} . Non è perciò ben definito cosa si intenda per ampiezza relativa ad una data oscillazione. Possiamo affrontare questa situazione considerando la misura effettiva di ampiezza come se fosse affetta da un errore sistematico dovuto allo smorzamento, ed attribuirle una opportuna incertezza. L'incertezza può essere stimata valutando l'entità della riduzione di θ_0 durante un'oscillazione.

B) Misurazioni ripetute in condizioni diverse: discrepanza

La ricerca degli errori sistematici e la loro eliminazione, o quantomeno la stima della loro entità, possono essere facilitate dal confronto tra misurazioni effettuate in condizioni diverse (diversi osservatori, diverse procedure, diversi strumenti, diversi siti, etc.) Per semplicità ci limiteremo inizialmente al confronto di due sole misurazioni eseguite in condizioni diverse, che chiameremo A e B .

Esempio: Due operatori, A e B , misurano il periodo di oscillazione di un pendolo con un cronometro azionato manualmente. La componente sistematica dei tempi di reazione può essere diversa per i due operatori.

Esempio: La costante elastica K di una molla viene misurata in due modi. La procedura A (statica) consiste nel misurare il rapporto tra forza applicata F e deformazione x , sfruttando la relazione: $F = Kx$. La procedura B (dinamica) consiste nel collegare alla molla una massa e misurare la relazione tra massa m e periodo di oscillazione \mathcal{T} , sfruttando la relazione $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{m/K}$. Si noti che in questo esempio le due procedure si riferiscono entrambe ad una misurazione *indiretta* della costante elastica K ; la valutazione dell'incertezza nelle misure indirette verrà affrontata al §4.6.

I risultati delle misurazioni effettuate utilizzando le due procedure saranno espressi nella forma

$$X_A \pm \delta X_A; \quad X_B \pm \delta X_B, \quad (4.4.1)$$

dove le incertezze δX_A e δX_B dipenderanno, a seconda dei casi, dalla risoluzione di misura (§4.2) o dalla dispersione dovuta agli errori casuali (§4.3), e potranno anche contenere contributi dovuti ad errori sistematici già riconosciuti.

Un caso frequente, soprattutto nella pratica dei laboratori didattici, è quello in cui una delle due incertezze è molto maggiore dell'altra, $\delta X_A \gg \delta X_B$; ciò accade ad esempio se X_A è misurata con semplice

strumentazione didattica mentre X_B è un valore di riferimento, quotato in pubblicazioni specializzate. In tal caso si potrà porre $\delta X_B=0$, e le considerazioni seguenti risulteranno semplificate.

Chiamiamo **discrepanza** il valore assoluto della differenza tra le due misure: $|X_A - X_B|$.

Si può pensare che la discrepanza sia dovuta all'influenza di errori sistematici in almeno una delle due misurazioni. In realtà, prima di trarre delle conclusioni in tal senso, è necessario confrontare la discrepanza con le incertezze delle due misure. Una trattazione esaustiva dell'argomento è pressoché impossibile, in considerazione della varietà di situazioni che si possono incontrare. Proviamo allora a chiarire le idee con alcuni esempi significativi.

- 1) Le incertezze su X_A e X_B sono entrambe dovute alla risoluzione di misura, e quindi descritte da distribuzioni a rettangolo, di larghezze rispettivamente ΔX_A e ΔX_B . Se la discrepanza è confrontabile o inferiore alla somma delle *incertezze massime*, cioè alla semisomma delle risoluzioni, (Fig. 4.9, in alto a sinistra),

$$|X_A - X_B| \leq \frac{\Delta X_A + \Delta X_B}{2} \quad (4.4.2)$$

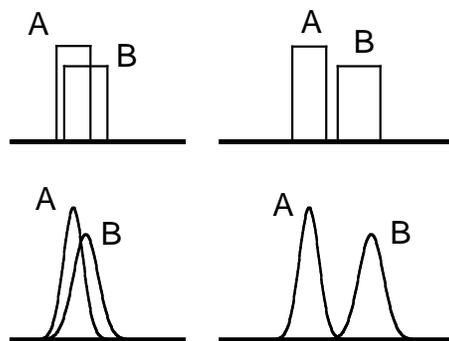
i due valori X_A e X_B si considerano **consistenti** (o *compatibili*). La discrepanza $|X_B - X_A|$ può essere attribuita alle incertezze dei singoli valori, e non ci può essere di alcun aiuto per valutare ulteriori contributi all'incertezza dovuti agli errori sistematici.

- 2) Le incertezze su X_A e X_B sono ancora entrambe dovute alla risoluzione di misura, ma questa volta la discrepanza è maggiore della somma delle *incertezze massime*, cioè della semisomma delle risoluzioni (Fig. 4.9, in alto a destra),

$$|X_A - X_B| > \frac{\Delta X_A + \Delta X_B}{2}. \quad (4.4.3)$$

I due valori X_A e X_B si considerano **inconsistenti** (o *incompatibili*), e la discrepanza può generalmente essere attribuita all'effetto di errori sistematici in almeno una delle due procedure di misurazione.

Fig. 4.9 – Rappresentazione schematica del confronto tra misure di una grandezza X ottenute con due procedure diverse, A e B . In alto le incertezze sono dovute alla risoluzione (distribuzioni a rettangolo), in basso sono dovute agli errori casuali (distribuzioni normali). A sinistra sono mostrati casi di consistenza, a destra casi di inconsistenza.



- 3) Le incertezze su X_A e X_B sono entrambe dovute agli errori casuali, e quindi descritte da distribuzioni gaussiane. Non esiste in questo caso un'incertezza massima. Ricordiamo però che la probabilità di trovare valori al di fuori dell'intervallo $\pm 3\sigma$ centrato sul valor medio è trascurabile. Pertanto, se la discrepanza è maggiore della somma dei due intervalli "3 σ " (Fig. 4.9, in basso a destra),

$$|X_A - X_B| > 3\sigma_A + 3\sigma_B \quad (4.4.4)$$

potremo ancora considerare le misure X_A e X_B come **inconsistenti** (o *incompatibili*), e attribuire la discrepanza all'effetto di errori sistematici in almeno una delle due procedure di misurazione.

- 4) Le incertezze su X_A e X_B sono ancora entrambe dovute agli errori casuali, ma questa volta la discrepanza è inferiore della somma dei due intervalli “ 3σ ” (Fig. 4.9, in basso a sinistra),

$$|X_A - X_B| < 3\sigma_A + 3\sigma_B. \quad (4.4.5)$$

In questo caso, una decisione sulla consistenza dei due valori X_A e X_B è meno immediata che nel caso delle distribuzioni a rettangolo. A rigore, si possono fare solo considerazioni di natura probabilistica, basate sul confronto tra discrepanza e larghezze delle gaussiane (approfondiremo l'argomento più avanti, al §7.4). La decisione dipende in buona misura dalla valutazione soggettiva dello sperimentatore.

Nel caso di misure inconsistenti, prima di trarre conclusioni definitive circa l'incertezza, è buona norma, se possibile, riesaminare con cura entrambe le procedure A e B , per cercare di individuare ed eventualmente eliminare gli errori sistematici. Allo scopo, sempre se possibile, si ricorre ad ulteriori misurazioni di riscontro basate su procedure alternative o affidate a operatori diversi.

Esempio: Riprendiamo ancora l'esempio della misurazione della costante elastica di una molla. Un'eventuale inconsistenza tra i risultati delle due procedure di misurazione, statica e dinamica, può portare a riconsiderare la procedura della misurazione dinamica. Nella relazione $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{m/K}$, la massa m misura l'inerzia del corpo collegato alla molla, ma non tiene conto dell'inerzia della molla stessa. Una relazione più corretta è $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{M/K}$, con $M = m + m_e$, dove m_e è una *massa efficace* che tiene conto dell'inerzia della molla.

C) Media pesata

Prima di considerare più in dettaglio la trattazione degli errori sistematici nel caso di misure inconsistenti, vogliamo introdurre una procedura, la cosiddetta *media pesata*, che consente di sintetizzare comunque in un unico valore X_0 i risultati di due o più misurazioni ripetute in condizioni diverse.

Per semplicità di notazione, ci limitiamo inizialmente al caso di due sole misure

$$X_A \pm \delta X_A; \quad X_B \pm \delta X_B, \quad (4.4.6)$$

Nel calcolo del valor medio X_0 è ragionevole tener conto dell'eventuale differenza tra le incertezze δX_A e δX_B : la misura che ha l'incertezza più bassa dovrà contribuire in modo più significativo alla media, e viceversa. Allo scopo, si introducono i *pesi* dei valori X_A e X_B , definiti come

$$w_A = \frac{1}{(\delta X_A)^2}; \quad w_B = \frac{1}{(\delta X_B)^2}. \quad (4.4.7)$$

Il valore $X_0 \pm \delta X$ viene quindi calcolato mediante la procedura della *media pesata*:

$$X_0 = X_w = \frac{X_A w_A + X_B w_B}{w_A + w_B}. \quad (4.4.8)$$

Una giustificazione formale della procedura della media pesata, ed in particolare della scelta dei pesi secondo l'eq. (4.4.7), verrà data al § 7.3.C in base a considerazioni di tipo probabilistico.

Come vedremo al Cap. 7, la media pesata secondo l'eq. (4.4.8) è a rigore ben fondata solo nel caso in cui l'incertezza sia esprimibile come scarto tipo di una distribuzione normale di Gauss (caso degli errori casuali). Nel caso di altri tipi di distribuzione (ad esempio la distribuzione a rettangolo che descrive la risoluzione di misura) la procedura di media pesata dell'eq. (4.4.8) è ancora utilizzabile, seppure in modo meno rigoroso, purché l'incertezza sia espressa dallo scarto tipo della distribuzione.

Vogliamo ora determinare l'incertezza δX_w sul valore della media pesata. Se i due valori X_A e X_B sono *consistenti*, l'incertezza sulla media pesata è interamente riconducibile alle loro incertezze, e può essere espressa così:

$$\delta X_w = \frac{1}{\sqrt{w_A + w_B}}. \quad (4.4.9)$$

L'espressione dell'incertezza sulla media pesata contenuta nell'Eq. (4.4.9) verrà giustificata al § 4.6.B come applicazione particolare delle regole generali per la propagazione dell'incertezza.

Esempio: La costante elastica K di una molla viene misurata sia staticamente che dinamicamente (vedi esempio precedente). I corrispondenti risultati sono: $K_A=10.40\pm 0.04$ kg/s² e $K_B=10.37\pm 0.08$ kg/s².

I pesi dei due risultati sono rispettivamente: $w_A = 625$ s⁴/kg², $w_B = 156$ s⁴/kg². La media pesata è $K=10.39\pm 0.03$ kg/s².

La procedura di media pesata può essere generalizzata ad un numero qualsiasi di misure:

$$X_w = \frac{\sum_i X_i w_i}{\sum_i w_i}, \quad \text{con} \quad w_i = \frac{1}{(\delta X_i)^2}, \quad (4.4.10)$$

e l'incertezza, per misure tra di loro consistenti, è espressa da:

$$\delta X_w = \frac{1}{\sqrt{\sum_i w_i}}. \quad (4.4.11)$$

D) Incertezza dovuta agli errori sistematici

Torniamo a fissare l'attenzione sul caso in cui le due misure X_A e X_B dell'eq. (4.4.1) sono **inconsistenti**, a causa della presenza di rilevanti errori sistematici in almeno una delle due procedure di misurazione.

Un *valore medio* delle due misure potrà sempre essere calcolato mediante la procedura di media pesata, eq. (4.4.8), che attribuisce maggior peso alla misura con minore incertezza.

La discrepanza tra le due misure sarà considerata sotto forma di incertezza. L'*incertezza standard* dovuta agli errori sistematici potrà in questo caso essere espressa mediante la stessa procedura usata per gli errori casuali, eq. (4.3.24), cioè come lo scarto quadratico medio stimato della distribuzione delle medie. Per due misure X_A e X_B pertanto è facile verificare, applicando l'eq. (4.3.24), che

$$\delta X_{\text{sis}} \simeq \frac{|X_A - X_B|}{2} \quad (4.4.12)$$

Questa procedura può essere generalizzata ad un numero qualsiasi di misure inconsistenti X_A, X_B, X_C, \dots , ottenute in condizioni diverse. La *distribuzione* dei valori X_A, X_B, X_C, \dots è dovuta alla differente influenza degli errori sistematici in ogni singolo esperimento.

Il valore medio X_0 potrà essere ancora calcolato mediante la formula della media pesata, eq. (4.4.10). L'incertezza sulla media pesata δX_w , calcolata con l'eq. (4.4.11), può tener conto solo delle incertezze nelle singole misure X_A, X_B, X_C, \dots di partenza. L'incertezza δX_{sis} dovuta agli errori sistematici potrà invece essere valutata in analogia con l'eq. (4.4.12) a partire dalla distribuzione dei valori, utilizzando la formula (4.3.24), già introdotta per gli errori casuali.

In altri termini, in questo caso gli errori sistematici incogniti delle singole misurazioni vengono trattati formalmente come errori casuali. Si può anche pensare che, per un insieme grande di misurazioni effettuate in condizioni differenti, gli errori sistematici delle singoli misure possano essere visti nel complesso come errori casuali (questa prospettiva è detta talora in inglese *randomization of systematic errors*.)

Esempio: In un laboratorio didattico N gruppi di lavoro determinano indipendentemente l'accelerazione di gravità g misurando periodo \mathcal{T} e lunghezza ℓ di un pendolo e usando la relazione $\mathcal{T} = 2\pi\sqrt{\ell/g}$. Indichiamo con $g_k \pm \delta g_k$ il risultato del k -mo gruppo ($k = 1, 2, \dots, N$). Se i risultati dei diversi gruppi sono tra loro inconsistenti, le discrepanze vanno attribuite agli errori sistematici. La natura e l'entità dell'errore sistematico di un singolo gruppo è incognita. Tuttavia, se il numero di gruppi N è sufficientemente grande, si trova che la distribuzione dei valori tende ad assomigliare ad una distribuzione di tipo casuale. L'errore sistematico medio può essere stimato come scarto tipo della distribuzione delle medie dei valori g_k .

Nota: La consistenza o inconsistenza di due o più misure ottenute in condizioni diverse può essere valutata a posteriori confrontando l'incertezza sulla media pesata, δX_w , con l'incertezza calcolata a partire

dalla dispersione dei valori; se quest'ultima prevale, significa che le misure non sono consistenti, a causa dell'influenza di errori sistematici (oppure per la sottovalutazione delle incertezze sulle singole misure).

4.5 – Incertezza: riepilogo e confronti

Nei paragrafi precedenti abbiamo distinto ed esaminato separatamente tre diverse possibili cause di incertezza nelle misure delle grandezze fisiche:

- la risoluzione della misura (§ 4.2);
- la dispersione dei valori di misura dovuta agli errori casuali (§ 4.3);
- la stima degli errori sistematici (§ 4.4).

Quando si usano strumenti di misura, gli effetti degli errori sistematici e casuali sono spesso valutati dal costruttore, per cui si potrà avere a che fare anche con

- l'incertezza quotata nel manuale d'uso dello strumento (§3.4).

Come abbiamo più volte rilevato, *l'incertezza fa parte integrante della misura*, e deve sempre essere espressa esplicitamente, ad esempio nella forma $X_0 \pm \delta X$.

Nei casi esaminati nei precedenti paragrafi l'incertezza δX è stata definita in modo convenzionale. Ad esempio, nel caso degli errori casuali l'incertezza è stata assunta uguale allo scarto tipo della distribuzione delle medie, $\delta X = \sigma[m^*]$. Sarebbe stato altrettanto lecito assumere, come pure talora viene fatto, $\delta X = 2\sigma[m^*]$ oppure $\delta X = 3\sigma[m^*]$. Il significato stesso di incertezza può variare da caso a caso. Ad esempio, per gli errori casuali l'incertezza è legata allo scarto tipo di una distribuzione normale, per la risoluzione è legata alla larghezza di una distribuzione a rettangolo. In questo secondo caso, è stato possibile distinguere tra un'incertezza massima ($\Delta X/2$) ed un'incertezza tipo ($\Delta X/\sqrt{12}$).

La mancanza di uniformità nella valutazione ed espressione dell'incertezza può creare difficoltà non trascurabili, tipicamente nelle seguenti situazioni:

- a) l'incertezza di una misura è dovuta all'effetto composto di cause differenti (ad es. errori casuali ed errori sistematici);
- b) si deve esprimere l'incertezza δQ di una grandezza $Q(X, Y, \dots)$ misurata indirettamente a partire dalle incertezze $\delta X, \delta Y, \dots$, generalmente di diversa origine, delle grandezze X, Y, \dots misurate direttamente;
- c) si vogliono confrontare misure di una stessa grandezza provenienti da laboratori diversi, che hanno utilizzato differenti convenzioni per quotare le incertezze.

A seguito di un'iniziativa del B.I.P.M. (*Bureau International des Poids et Mesures*), nel 1995 l'I.S.O. (*International Organisation for Standardisation*) ha redatto una *Guida per l'espressione dell'incertezza di misura*, che stabilisce regole generali per uniformare a livello internazionale i metodi di valutazione ed espressione dell'incertezza. La versione italiana della guida è stata realizzata nel 1997 dall'U.N.I. (*Ente Nazionale per l'Unificazione*)

In questo paragrafo confronteremo i diversi tipi di incertezza introdotti nei paragrafi precedenti e vedremo come è possibile impostare una descrizione unificata in base alle raccomandazioni dell'I.S.O.

A) Incertezza statistica e non

Secondo l'impostazione dell'I.S.O., le incertezze vengono classificate in relazione al modo con cui vengono calcolate, anziché in relazione alle loro cause. Vengono pertanto distinte due Categorie di incertezze:

Categoria A (ingl. *Type A*): incertezze valutate per mezzo di metodi statistici.

Categoria B (ingl. *Type B*): incertezze valutate per mezzo di metodi non statistici.

Esempio 1: L'incertezza δX_{cas} dovuta agli *errori casuali* è di Categoria A, in quanto la sua valutazione si basa sul trattamento statistico di un insieme di N misurazioni ripetute. L'incertezza δX_{cas} è

misurata a partire dalla larghezza della distribuzione delle medie campionarie; la distribuzione ha forma normale e la sua larghezza si riduce al crescere del numero N di misurazioni.

Esempio 2: L'incertezza δX_{ris} dovuta alla *risoluzione* è di Categoria B, in quanto la sua valutazione non fa riferimento a metodi statistici basati sulla ripetizione delle misurazioni. L'incertezza δX_{ris} è misurata a partire dalla conoscenza dell'intervallo di risoluzione ΔX . All'intervallo di risoluzione può essere associata una distribuzione a rettangolo (distribuzione a densità uniforme).

Esempio 3: L'incertezza δX_{sis} dovuta alla *stima degli errori sistematici* è generalmente considerata di Categoria B, cioè di origine non statistica. In taluni casi però, ad esempio quando la stima si basa sul confronto tra misure inconsistenti secondo la procedura del § 4.4.D, l'incertezza δX_{sis} va attribuita alla Categoria A. È in ogni caso conveniente associare all'errore sistematico una distribuzione modello (normale, a rettangolo, a triangolo, etc.), costruita di volta in volta in base alle informazioni disponibili.

B) Espressione unificata dell'incertezza

L'unificazione dei criteri per l'espressione dell'incertezza di misura si basa sulle seguenti convenzioni:

- Ad ogni causa di incertezza è associata una opportuna **distribuzione**, che può essere di origine statistica (Categoria A) oppure costruita a priori in base alle informazioni comunque disponibili (Categoria B).
- L'incertezza δX è assunta uguale allo **scarto tipo** (o *scarto quadratico medio*, in inglese *standard deviation*) della distribuzione. L'incertezza così definita è detta **incertezza tipo** (o *incertezza standard*, in inglese *standard uncertainty*).

Esempio 1: Come abbiamo visto al §4.3, l'incertezza δX_{cas} dovuta agli *errori casuali* è assunta uguale allo scarto tipo della distribuzione limite dei valori medi (Eq. 4.3.21):

$$\delta X_{\text{cas}} = \sigma[m^*] \quad (4.5.1)$$

e può essere *stimata* a partire dai dati sperimentali usando l'Eq. (4.3.24):

$$\delta X_{\text{cas}} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{i=1}^N (x_i - m^*)^2}. \quad (4.5.2)$$

La distribuzione delle medie è con buona approssimazione normale (Fig. 4.10 a destra); l'intervallo tra $X_0 - \sigma[m^*]$ e $X_0 + \sigma[m^*]$ rappresenta il 68 % dei valori possibili.

Esempio 2: L'incertezza δX_{ris} dovuta alla *risoluzione* è associata ad una distribuzione a rettangolo di base ΔX e altezza $1/\Delta X$ (Fig. 4.10 a sinistra). Come dimostreremo al Cap. 6, per la distribuzione a rettangolo lo scarto tipo è $\sigma = \Delta X/\sqrt{12}$, per cui

$$\delta X_{\text{ris}} = \Delta X / \sqrt{12}. \quad (4.5.3)$$

L'intervallo tra $X_0 - \delta X$ e $X_0 + \delta X$ rappresenta il 58 % dell'area del rettangolo.

Esempio 3: Nel caso degli *errori sistematici* la distribuzione viene ipotizzata in base alle conoscenze disponibili. Supponiamo ad esempio di poter stabilire che il valore della grandezza X non può comunque essere inferiore a X_{min} o superiore a X_{max} . In assenza di ulteriori informazioni è ragionevole assumere una distribuzione a rettangolo (Fig. 4.10 a sinistra). Se però si ritiene plausibile che i valori centrali siano più probabili dei valori vicini ai limiti X_{min} e X_{max} , allora è più ragionevole assumere una distribuzione a triangolo o una distribuzione normale (Fig. 4.10, al centro e a destra). Una volta fatta una scelta della distribuzione se ne calcolerà lo scarto tipo, secondo le procedure che saranno introdotte al Cap. 6, per determinare δX_{sis} .

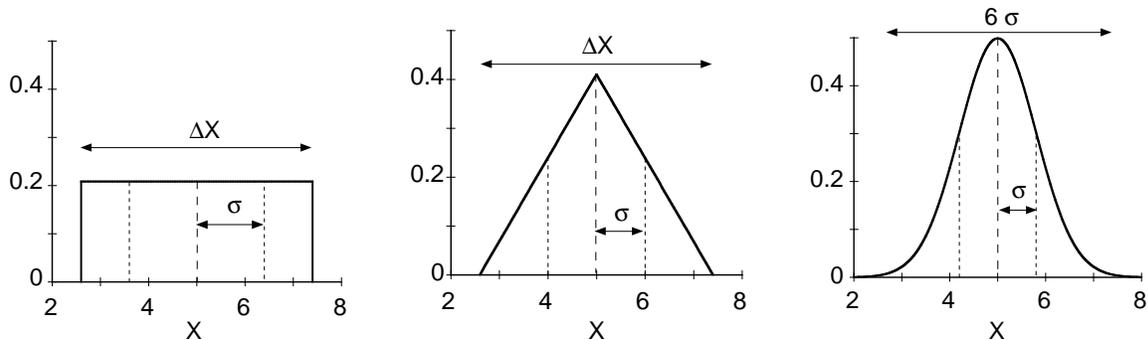


Fig. 4.10 – Distribuzioni a rettangolo (a sinistra), a triangolo (al centro) e normale di Gauss (a destra). Le distribuzioni sono normalizzate ad area unitaria. Per comodità di confronto le tre distribuzioni hanno uguale valor medio $m=5$ e larghezza simile. Lo scarto tipo è $\sigma = \Delta X/\sqrt{12}$ per la distribuzione a rettangolo, $\sigma = \Delta X/\sqrt{24}$ per la distribuzione a triangolo; per la distribuzione normale l'intervallo di larghezza 6σ centrato sul valor medio racchiude il 99.74 % dell'intera distribuzione. La percentuale d'area compresa tra $X = m - \sigma$ e $X = m + \sigma$ è rispettivamente il 58, il 65 e il 68 % per le distribuzioni a rettangolo, a triangolo e normale.

La scelta di identificare sempre l'incertezza, qualunque ne sia l'origine, con lo scarto tipo di una distribuzione offre molti vantaggi. In particolare è possibile confrontare ed eventualmente comporre in modo coerente incertezze di diversa origine.

Inoltre, come vedremo in particolare nei Capitoli 6 e 7, molti formalismi per l'analisi statistica dei dati si basano sulle peculiari proprietà della distribuzione normale e dei suoi parametri m e σ (uno di questi formalismi, il metodo della media pesata, è già stato introdotto al §4.4). Identificando sempre l'incertezza con uno scarto tipo, è possibile applicare con buona approssimazione i formalismi sviluppati per le distribuzioni normali anche alle incertezze di origine non statistica.

Nota: L'intervallo individuato dallo scarto tipo intorno al valore centrale X_0 rappresenta una parte dei possibili valori di misura (circa il 68 % per la distribuzione normale, circa il 58 % per la distribuzione a rettangolo). In talune applicazioni è preferibile esprimere l'incertezza come un intervallo di valori entro cui la misura cada con probabilità vicina a 1; si usa allora l'*incertezza estesa*, ottenuta moltiplicando lo scarto tipo (cioè l'incertezza tipo) per un opportuno *fattore di copertura*, tipicamente 2 oppure 3 nel caso di distribuzioni normali. Torneremo più diffusamente su questo problema al §7.4. Le deroghe dall'espressione standard dell'incertezza devono comunque essere sempre indicate esplicitamente.

C) Confronto tra le diverse cause di incertezza

Le incertezze dovute alla *risoluzione* della misura o alla presenza di *errori casuali* in genere si escludono mutuamente, nel senso che si deve tenere conto esclusivamente dell'una oppure dell'altra. Più precisamente, è opportuno tenere conto della maggiore delle due incertezze.

Supponiamo, ad esempio, di misurare una grandezza X con una risoluzione ΔX , corrispondente ad un'incertezza $\delta X_{\text{ris}} = \Delta X/\sqrt{12}$.

Supponiamo anche che gli errori casuali diano luogo ad una dispersione di valori descritta da una distribuzione gaussiana, con scarto quadratico medio σ_x . Come abbiamo visto al §4.3, l'incertezza dovuta agli errori casuali è $\delta X_{\text{cas}} = \sigma[m^*] = \sigma_x/\sqrt{N}$, dove N è il numero di misurazioni.

Al crescere di N , l'incertezza δX_{cas} diminuisce proporzionalmente a $1/\sqrt{N}$. Sarebbe pertanto possibile ridurre a piacere l'incertezza della misura aumentando convenientemente il numero N di misurazioni. In realtà l'incertezza della misura può essere identificata con quella dovuta agli errori casuali, $\delta X = \delta X_{\text{cas}}$, solo fintantoché

$$\delta X_{\text{cas}} > \delta X_{\text{ris}}, \quad \text{cioè} \quad \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}} > \frac{\Delta X}{\sqrt{12}}. \quad (4.5.4)$$

Tra le due cause di incertezza (risoluzione ed errori casuali) prevale sempre quella che dà il contributo maggiore. Di conseguenza, è inutile aumentare indiscriminatamente il numero N di misurazioni per ridurre l'incertezza δX_{cas} . Dalla disequazione (4.5.4) è immediato determinare un limite superiore al numero N di misurazioni:

$$N \leq \frac{12 \sigma_x^2}{(\Delta X)^2}. \quad (4.5.5)$$

La risoluzione della misura rappresenta un limite inferiore all'incertezza δX . Come abbiamo visto al §4.2, è spesso possibile, mediante opportune tecniche, ridurre anche l'incertezza dovuta alla risoluzione, δX_{ris} .

La relativa facilità con cui si possono valutare ed eventualmente ridurre le incertezze dovute a risoluzione o errori casuali non deve mai far dimenticare la terza fonte di incertezza delle misure, cioè la presenza di *errori sistematici* non riconosciuti e quindi non corretti.

Valutare l'incertezza δX_{sis} dovuta agli errori sistematici non è generalmente facile. È frequente il caso di misure in cui δX_{sis} è sottostimata o addirittura trascurata del tutto.

Abbiamo comunque già visto, al § 4.4.D, che misure ripetute in condizioni differenti consentono talora di valutare in termini statistici l'influenza degli errori sistematici. Incontreremo più avanti altre analoghe situazioni.

D) Composizione di incertezze

L'incertezza dovuta alla stima degli errori sistematici è indipendente dall'incertezza da risoluzione o da errori casuali. Nel quotare l'incertezza di una misura, è in genere utile distinguere esplicitamente i due tipi di contributi (δX_{sis} da un lato, δX_{cas} o δX_{ris} dall'altro).

In alcuni casi si possono distinguere più sorgenti indipendenti di errori sistematici, e può essere utile quotare separatamente le rispettive incertezze.

Talora però si presenta la necessità di quotare in modo sintetico un'incertezza complessiva della misura, δX_{tot} , che tenga opportunamente in conto il contributo dei diversi tipi di incertezza valutati (ad esempio δX_{sis} e δX_{cas} , oppure δX_{sis} e δX_{ris}).

In questi casi, se si è avuto cura di esprimere tutte le incertezze in termini di scarto tipo di un'opportuna distribuzione, l'incertezza complessiva della misura andrà espressa come *somma quadratica* delle diverse incertezze componenti.

Ad esempio:

$$\delta X_{\text{tot}} = \sqrt{(\delta X_{\text{cas}})^2 + (\delta X_{\text{sis}})^2}, \quad (4.5.6)$$

o più in generale, indicando con δX_i le diverse cause di incertezza,

$$\delta X_{\text{tot}} = \sqrt{\sum_i (\delta X_i)^2}. \quad (4.5.7)$$

La motivazione di questa procedura di somma quadratica sarà chiarita nel § 4.6.B.

E) Espressioni dell'incertezza

Nell'espressione dei risultati di misura nella forma $X = X_0 \pm \delta X$, δX è spesso chiamata **incertezza assoluta**. L'incertezza assoluta ha le stesse dimensioni del valore centrale X_0 .

È bene far presente qui che l'incertezza δX , comunque sia stata valutata, va sempre espressa mediante una o al massimo due cifre significative, e che il valore centrale X_0 va espresso con un numero di cifre significative consistente con l'incertezza (per maggiori dettagli sull'uso delle cifre significative si rimanda all'Appendice A.1).

Talora viene utilizzato, per esprimere l'incertezza assoluta, un modo alternativo rispetto alla forma $X = X_0 \pm \delta X$. Le cifre significative che esprimono l'incertezza δX vengono scritte tra parentesi immediatamente dopo il valore centrale X_0 ; si sottintende che l'incertezza va applicata alle corrispondenti ultime cifre significative del valore centrale X_0 . Ad esempio, per una misura di lunghezza espressa in metri,

$$\ell = 2.357(25) \text{ m} \quad \text{sta per} \quad \ell = (2.357 \pm 0.025) \text{ m}$$

Questo modo di indicare l'incertezza è frequentemente utilizzato quando le incertezze sono molto piccole rispetto ai valori centrali. È il caso, tipicamente, delle costanti fondamentali della Fisica, alcune delle quali sono riportate in Appendice D.2. Ad esempio, il valore della massa dell'elettrone è quotato come

$$m_e = 9.109\,381\,88(72) \times 10^{-31} \text{ kg},$$

che equivale a

$$m_e = (9.109\,381\,88 \pm 0.000\,000\,72) \times 10^{-31} \text{ kg}$$

F) Incertezza relativa

La qualità di una misura non è individuata dal solo valore dell'incertezza assoluta δX , bensì dal rapporto tra incertezza assoluta δX e valore centrale X_0 . Ad esempio, è evidente che un'incertezza $\delta X = 1 \text{ mm}$ ha diverso significato se riferita ad una lunghezza $X_0 = 1 \text{ cm}$ o a una lunghezza $X_0 = 10 \text{ m}$.

Il rapporto

$$\frac{\delta X}{|X_0|} \quad (4.5.8)$$

è detto **incertezza relativa** della misura. Quanto più piccola è l'incertezza relativa, tanto migliore è considerata la qualità della misura.

L'uso del modulo $|X_0|$ nell'eq. (4.5.8) serve ad avere un valore sempre positivo di incertezza relativa, anche quando il valore X_0 è negativo. L'incertezza relativa, essendo il rapporto tra due grandezze che hanno le stesse dimensioni, è sempre una quantità adimensionale.

L'incertezza relativa può assumere valori molto minori di 1. Per evitare l'uso di numeri decimali troppo piccoli, si usa spesso moltiplicare per 100 l'incertezza relativa, ottenendo così l'**incertezza percentuale**, che si indica con il simbolo %.

Se l'incertezza assoluta è molti ordini di grandezza minore del valore centrale, come succede per le misure molto accurate delle costanti fondamentali della Fisica (vedi Tabella D.2), si usa moltiplicare l'incertezza relativa per il fattore 10^6 , ottenendo l'incertezza espressa in **parti per milione** (ppm).

Esempio 1: La lunghezza di un pendolo, $\ell = 1.25 \text{ m}$, e la deformazione di una molla, $x = 1.2 \text{ cm}$, vengono misurati con la stessa incertezza assoluta $\delta\ell = \delta x = 1 \text{ mm}$. L'incertezza relativa della misura del pendolo, $\delta\ell/\ell = 8 \times 10^{-4} = 0.08 \%$, è molto più piccola dell'incertezza relativa nella misura della deformazione della molla, $\delta x/x = 8 \times 10^{-2} = 8 \%$.

Esempio 2: La massa dell'elettrone $m_e = 9.109\,381\,88(72) \times 10^{-31} \text{ kg}$ ha un'incertezza relativa $\delta m/m = 8 \times 10^{-8}$, pari a 0.08 ppm (parti per milione).

G) Caratteristiche qualitative delle misure

Finora abbiamo caratterizzato le misure delle grandezze fisiche con un parametro quantitativo, l'**incertezza** (in inglese *uncertainty*). Nella pratica di laboratorio vengono spesso usati vari altri termini per qualificare e confrontare le proprietà delle misure.

La **ripetibilità** (in inglese *repeatability*) di una misura indica qualitativamente il grado di accordo tra i risultati di misurazioni diverse eseguite nelle stesse condizioni (stessa procedura, stesso osservatore, stessi strumenti, stesso luogo) e ripetute a breve distanza di tempo. Il concetto di ripetibilità è legato all'influenza degli errori casuali.

La **riproducibilità** (in inglese *reproducibility*) di una misura indica qualitativamente il grado di accordo tra i risultati di misurazioni eseguite in condizioni differenti (ad esempio, differenti procedure, differenti osservatori, differenti strumenti, differenti luoghi, tempi significativamente diversi).

Il termine **accuratezza** (in inglese *accuracy*) viene utilizzato per caratterizzare il grado di concordanza di una data misura con un *valor vero* della grandezza. Per *valor vero* si intende qui un valore accettato, a volte per convenzione, come avente un'incertezza adatta ad un determinato scopo. Si possono ad esempio considerare *valori veri* delle costanti fondamentali della Fisica quelli periodicamente pubblicati dal Comitato internazionale CODATA (vedi Appendice D.2).

I termini introdotti sopra (ripetibilità, riproducibilità, accuratezza) hanno significato puramente qualitativo. Ad essi non è pertanto corretto associare valori numerici.

Nota: Il termine **precisione** veniva utilizzato in passato nell'accezione oggi attribuita al termine *accuratezza*. Nel mondo anglosassone invece il termine *precision* veniva utilizzato nell'accezione che oggi si attribuisce al termine *repeatability*. Per evitare equivoci interpretativi, in particolare nel confronto tra documenti redatti in lingue diverse, i termini *precisione* e *precision* non dovrebbero più essere utilizzati.

4.6 – Incertezza nelle misure indirette

Nei paragrafi precedenti abbiamo studiato le cause di incertezza nelle misurazioni *dirette*, ed abbiamo imparato ad esprimere la misura di una grandezza fisica nella forma $X_0 \pm \delta X$. Il valore centrale X_0 e l'incertezza δX sono stati ricondotti, rispettivamente, al valor medio e allo scarto tipo di una opportuna distribuzione.

Nella pratica sperimentale accade spesso che una grandezza fisica sia misurata *indirettamente*, sfruttando relazioni analitiche che la collegano ad altre grandezze misurate direttamente (§1.3.B).

Esempio: Si misurano direttamente la lunghezza ℓ e il periodo di oscillazione T di un pendolo semplice. L'accelerazione di gravità g viene misurata indirettamente sfruttando la relazione $g = 4\pi^2\ell/T^2$.

Per generalizzare, chiameremo X, Y, Z, \dots le grandezze misurate direttamente, Q la grandezza misurata indirettamente e $Q = f(X, Y, Z, \dots)$ la relazione analitica che lega il valore di Q ai valori di X, Y, Z, \dots ; ad esempio $Q = X + Y$, oppure $Q = XY/Z$.

Poiché le grandezze X, Y, Z, \dots sono affette da incertezza, ci si aspetta che anche la grandezza Q sia affetta da incertezza, e vada espressa nella forma $Q_0 \pm \delta Q$, con Q_0 e δQ riconducibili rispettivamente al valor medio e allo scarto tipo di una opportuna distribuzione.

In questo paragrafo impareremo a determinare il valore centrale Q_0 e valutare l'incertezza δQ a partire dai valori X_0, Y_0, Z_0, \dots e dalle incertezze $\delta X, \delta Y, \delta Z, \dots$. L'incertezza δQ è detta *incertezza composta* (ingl. *combined uncertainty*).

Questo problema, che va sotto il nome di *propagazione dell'incertezza*, è piuttosto complesso, e pertanto lo affronteremo in modo graduale. Chiariremo innanzitutto il concetto fondamentale di indipendenza statistica delle misure. Poi studieremo la propagazione nei casi più semplici, in cui Q dipende linearmente da X, Y, Z, \dots . Infine studieremo relazioni funzionali più complesse, per arrivare a formulare una regola approssimata di applicazione generale. Una giustificazione più approfondita di molti dei concetti presentati in questo paragrafo verrà fornita nel Cap. 7.

A) Indipendenza statistica delle misure dirette

Fissiamo l'attenzione su due grandezze, X e Y , misurate direttamente, e supponiamo di conoscere con buona approssimazione le rispettive distribuzioni limite ed i loro valori medi X_0 e Y_0 .

Se ora consideriamo due singole misure, x e y , possiamo calcolare i loro scarti rispetto ai valori medi: $x - X_0$ e $y - Y_0$. Le misure delle due grandezze X e Y sono dette *statisticamente indipendenti* se gli scarti $x - X_0$ e $y - Y_0$ sono tra di loro scorrelati; in altri termini, se la conoscenza dello scarto $x - X_0$ non consente di fare alcuna previsione sul valore dello scarto $y - Y_0$, e viceversa. Il concetto di indipendenza statistica è immediatamente generalizzabile ad un numero qualsiasi di grandezze fisiche.

L'indipendenza statistica delle misure di due o più grandezze fisiche non va confusa con l'eventuale correlazione tra le due grandezze stesse, di cui ci occuperemo al §4.7.

Esempio 1: Si misurano lunghezza e periodo di oscillazione di un pendolo semplice. È facile rendersi conto che le due grandezze sono tra di loro *correlate*: aumentando la lunghezza del pendolo aumenta regolarmente anche il periodo. Le misure di lunghezza e periodo sono tuttavia *statisticamente*

indipendenti.

Esempio 2: Si vuole misurare il perimetro P di un poligono con un metro a nastro. Allo scopo si misurano direttamente i singoli lati a, b, c, \dots del poligono e si calcola poi il perimetro come somma dei lati: $P = a + b + c + \dots$. Supponiamo che la causa maggiore di incertezza nella misura sia da attribuire a scarsa fiducia nella calibrazione del metro; si ha quindi motivo di ritenere che tutte le misure siano errate nello stesso senso (per difetto o per eccesso), e quindi non siano statisticamente indipendenti.

Nei prossimi tre paragrafi (§ 4.6.B, 4.6.C, 4.6.D) considereremo la propagazione dell'incertezza a partire da misure dirette statisticamente indipendenti. Il caso di misure non indipendenti è più complesso; ce ne occuperemo in modo non esaustivo al § 4.6.E.

B) Dipendenza lineare di Q da X, Y, \dots

La propagazione dell'incertezza è particolarmente semplice se la relazione che lega la grandezza Q alle grandezze X, Y, Z, \dots (misurate direttamente) è di tipo lineare, cioè esprimibile nella forma generale

$$Q = a + bX + cY + dZ \dots \quad (4.6.1)$$

dove a, b, c, d, \dots sono coefficienti costanti.

Alla forma generale (4.6.1) sono riconducibili i casi notevoli

$$\begin{aligned} Q &= X + Y && \text{(addizione),} \\ Q &= X - Y && \text{(sottrazione),} \\ Q &= bX && \text{(diretta proporzionalità).} \end{aligned}$$

Se la relazione che lega Q a X, Y, Z, \dots è lineare, la media e lo scarto tipo dei valori di Q sono facilmente ricavabili a partire dalle medie e dagli scarti tipo dei valori di X, Y, Z, \dots sfruttando alcune proprietà generali delle distribuzioni di probabilità.

Un teorema della teoria delle probabilità afferma infatti che, se vale l'eq. (4.6.1), allora il valor medio $\mathbf{m}[Q]$ è legato alle medie di X, Y, Z, \dots dalla relazione

$$\mathbf{m}[Q] = a + b\mathbf{m}[X] + c\mathbf{m}[Y] + d\mathbf{m}[Z] + \dots \quad (4.6.2)$$

Se inoltre le misure di X, Y, Z, \dots sono *statisticamente indipendenti*, un ulteriore teorema afferma che la varianza $\mathbf{D}[Q]$ è legata alle varianze di X, Y, Z, \dots dalla relazione

$$\mathbf{D}[Q] = b^2 \mathbf{D}[X] + c^2 \mathbf{D}[Y] + d^2 \mathbf{D}[Z] + \dots \quad (4.6.3)$$

da cui si ricava la relazione relativa allo scarto tipo $\sigma[Q]$:

$$\sigma[Q] = \sqrt{b^2 \mathbf{D}[X] + c^2 \mathbf{D}[Y] + d^2 \mathbf{D}[Z] + \dots} \quad (4.6.4)$$

Pertanto, ricordando che il valore centrale di una misura è espresso dalla media della corrispondente distribuzione, dall'eq. (4.6.2) si ricava

$$Q_0 = a + bX_0 + cY_0 + dZ_0 + \dots \quad (4.6.5)$$

Dalle eq. (4.6.3) e (4.6.4), ricordando che l'incertezza di una misura è espressa dallo scarto tipo della corrispondente distribuzione, si ricava

$$(\delta Q)^2 = b^2 (\delta X)^2 + c^2 (\delta Y)^2 + \dots \quad \delta Q = \sqrt{b^2 (\delta X)^2 + c^2 (\delta Y)^2 + \dots} \quad (4.6.6)$$

In altri termini, l'incertezza δQ si calcola *sommando quadraticamente* le incertezze $\delta X, \delta Y, \dots$ pesate dai rispettivi coefficienti b^2, c^2, \dots

Nota: È facile rendersi conto che la *somma quadratica* di due numeri è sempre minore della loro *somma diretta*: $\sqrt{s^2 + t^2} < s + t$. Basta considerare un triangolo rettangolo di cateti s e t : la somma dei cateti $s + t$ è sempre maggiore dell'ipotenusa $\sqrt{s^2 + t^2}$.

Esempio: Al § 4.5.H, eq. (4.5.12), abbiamo introdotto la **media pesata**:

$$X_w = \frac{\sum_i X_i w_i}{\sum_i w_i}, \quad \delta X_w = \frac{1}{\sqrt{\sum_i w_i}}, \quad \text{con} \quad w_i = \frac{1}{(\delta X_i)^2}.$$

Siamo ora in grado di dare una giustificazione per l'espressione dell'incertezza δX_w . È facile rendersi conto che l'espressione della media pesata X_w è una combinazione lineare dei valori X_i , con coefficienti $w_i/\sum w_i$, riconducibile alla forma dell'eq. (4.6.1), con $Q \equiv X_w$. Applicando l'eq. (4.6.6) e ricordando che $w_i = 1/(\delta X_i)^2$, si ottiene

$$(\delta X_w)^2 = \frac{1}{(\sum w_i)^2} \sum w_i^2 (\delta X_i)^2 = \frac{1}{(\sum w_i)^2} \sum w_i = \frac{1}{\sum w_i}.$$

Vediamo ora in concreto l'applicazione delle eq. (4.6.5) e (4.6.6) ad alcuni casi notevoli particolarmente semplici.

Addizione di grandezze: $Q = X + Y$

Nel caso di un'addizione, $Q = X + Y$, le eq. (4.6.5) e (4.6.6) danno

$$Q_0 = X_0 + Y_0 \quad (\delta Q)^2 = (\delta X)^2 + (\delta Y)^2 \quad (4.6.7)$$

È immediata la generalizzazione delle eq. (4.6.7) al caso di addizione di più di due grandezze.

Esempio 1: Si vuole misurare la pressione P di un gas contenuto in un recipiente a tenuta. Allo scopo si hanno a disposizione due strumenti: un manometro che consente di misurare la pressione relativa del gas rispetto all'atmosfera, P_{rel} , ed un barometro che consente di misurare la pressione atmosferica, P_{atm} . Le due misure sono statisticamente indipendenti, ed i relativi valori sono: $P_{\text{rel}} = (0.475 \pm 0.004)$ bar e $P_{\text{atm}} = (0.988 \pm 0.002)$ bar. La pressione del gas è $P = P_{\text{rel}} + P_{\text{atm}}$. Usando le eq. (4.6.7) si ottiene $P_0 = (0.475 + 0.998) = 1.473$ bar, $\delta P = [(\delta P_{\text{rel}})^2 + (\delta P_{\text{atm}})^2]^{1/2} = 0.0044$ bar.

Esempio 2: Al §4.5.D abbiamo suggerito di addizionare quadraticamente le incertezze di una stessa misura dovute a cause diverse (eq. 4.5.6). Questa procedura è giustificata, se le cause di incertezza sono statisticamente indipendenti, dalla seconda delle eq. (4.6.7). Supponiamo di avere una misura $X_0 \pm \delta X_a$; tenere conto di un'ulteriore incertezza indipendente δX_b equivale formalmente ad addizionare a $X_0 \pm \delta X_a$ la quantità $0 \pm \delta X_b$.

Sottrazione di due grandezze: $Q = X - Y$

Nel caso di sottrazione, $Q = X - Y$, le eq. (4.6.5) e (4.6.6) danno

$$Q_0 = X_0 - Y_0 \quad (\delta Q)^2 = (\delta X)^2 + (\delta Y)^2 \quad (4.6.8)$$

In altri termini, i valori centrali si sottraggono, ma le incertezze si sommano quadraticamente come nel caso dell'addizione.

Esempio: Si vuole misurare la massa d'acqua m contenuta in un calorimetro. Allo scopo si pesa preventivamente il calorimetro vuoto, ottenendo un valore di massa $m_c = (257.3 \pm 0.1)$ g; successivamente si pesa il calorimetro con l'acqua, ottenendo un valore di massa totale $m_t = (298.5 \pm 0.1)$ g. La massa netta dell'acqua è $m_0 = 298.5 - 257.3 = 41.2$ g. L'incertezza è $\delta m = [(0.1)^2 + (0.1)^2]^{1/2} = 0.14$ g.

Si faccia attenzione alla sottrazione tra valori X_0 e Y_0 molto simili: la differenza può essere confrontabile o inferiore all'incertezza. Ad esempio, $(251 \pm 1) - (250 \pm 1) = 1 \pm 1.4$.

Diretta proporzionalità: $Q = bX$

Nel caso di diretta proporzionalità, $Q = bX$, le eq. (4.6.5) e (4.6.6) danno

$$Q_0 = bX_0 \quad \delta Q = |b| \delta X \quad (4.6.9)$$

Esempio: La lunghezza d'onda λ ed il periodo \mathcal{T} di un'onda elettromagnetica che si propaga nel vuoto sono legati dalla relazione $\lambda = c\mathcal{T}$, dove c , la velocità della luce nel vuoto, è una costante esatta. L'incertezza $\delta\mathcal{T}$ sul periodo si propaga alla lunghezza d'onda come $\delta\lambda = c\delta\mathcal{T}$.

Cerchiamo di approfondire il significato dell'eq. (4.6.9). Nel caso di diretta proporzionalità, $Q = bX$, il coefficiente b è la derivata di Q rispetto ad X : $b = dQ/dX$, costante per tutti i valori di X . Graficamente (Fig. 4.11) b è la pendenza della retta che rappresenta la funzione $Q = bX$. La propagazione dell'incertezza da X a Q dipende dalla pendenza della retta, cioè dal coefficiente di proporzionalità.

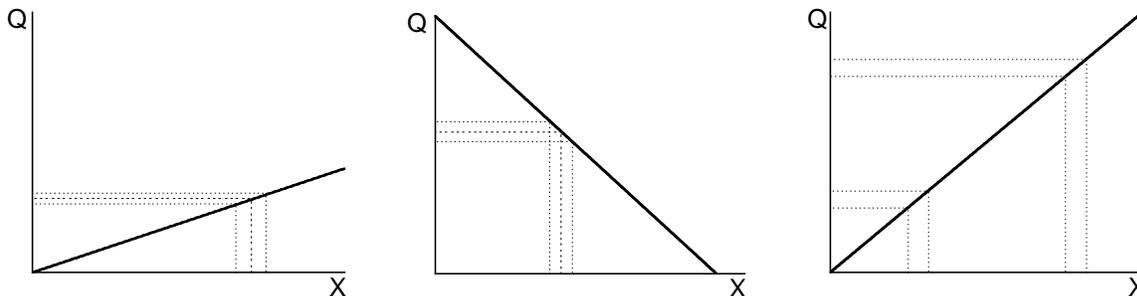


Fig. 4.11 – Illustrazione grafica della propagazione dell'incertezza nel caso della diretta proporzionalità: $Q = bX$. L'incertezza δQ dipende dall'incertezza δX e dalla pendenza b della retta: $\delta Q = |a|\delta X$ (a sinistra e al centro). L'incertezza δQ non dipende invece, nel caso di diretta linearità, dal valore X_0 (a destra).

C) Q funzione non lineare di una sola variabile X

Se la relazione che lega Q a X, Y, Z, \dots non è lineare, cioè non è riconducibile all'eq. (4.6.1), il problema del calcolo del valore centrale Q_0 e dell'incertezza δQ è molto più complesso, e può essere risolto solo in maniera approssimata.

Per meglio comprendere la natura delle difficoltà e la filosofia della soluzione, consideriamo il caso più semplice possibile, cioè una relazione non lineare $Q = f(X)$ tra Q ed una sola grandezza X misurata direttamente. Supponiamo di conoscere, per misurazione diretta, $X_0 \pm \delta X$. Vogliamo esprimere anche il valore di Q nella forma $Q_0 \pm \delta Q$. Possiamo porre semplicemente $Q_0 = f(X_0)$? E come si calcola δQ a partire da δX ?

Per chiarire le idee, consideriamo prima il caso particolare $Q = \beta X^2$.

Esempio: Si misura direttamente il diametro $2R$ di un cilindro e si ricava il valore del raggio $R_0 \pm \delta R$. A questo punto si può misurare indirettamente la sezione S del cilindro, mediante la relazione $S = \pi R^2$. Come si esprimerà il valore della sezione nella forma standard $S_0 \pm \delta S$?

Il grafico della funzione $Q = \beta X^2$ è una parabola (Fig. 4.12). Consideriamo un generico valore X_0 e l'intervallo di incertezza di valore $2\delta X$ centrato su X_0 . È facile costruire graficamente l'intervallo di incertezza $2\delta Q$; il suo calcolo analitico è invece piuttosto brogos. È facile anche verificare che il valore Q_0 , centro dell'intervallo di incertezza $2\delta Q$, non corrisponde ad βX_0^2 (Fig. 4.12, a sinistra). Infine, la medesima incertezza δX corrisponde ad incertezze δQ diverse al variare di X_0 (Fig. 4.12, al centro).

Torniamo ora al caso generico $Q = f(X)$.

Il calcolo di Q_0 e dell'incertezza δQ viene notevolmente semplificato se si opera in *approssimazione di linearità locale*, ovvero se si sostituisce la funzione $f(X)$, nell'intervallo di incertezza $2\delta X$, con una retta $Q = a + BX$ tangente alla curva della funzione $f(X)$ nel punto di ascissa X_0 (Fig. 4.12, a destra):

$$Q = f(X) \quad \rightarrow \quad Q = a + bX. \quad (4.6.10)$$

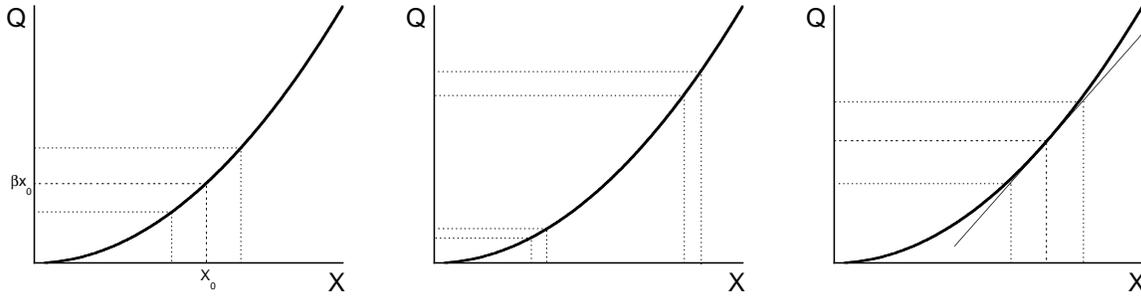


Fig. 4.12 – Illustrazione grafica della propagazione dell'incertezza nel caso $Q = \beta X^2$. A sinistra: il centro Q_0 dell'intervallo di incertezza $2\delta Q$ non corrisponde ad βX_0^2 . Al centro: a parità di δX , δQ varia al variare di X_0 . A destra: linearizzazione locale della funzione $Q = \beta X^2$.

In questo modo ci si può ricondurre, seppure localmente ed in forma approssimata, al caso della diretta proporzionalità, eq. (4.6.9). Più precisamente, il valore centrale Q_0 sarà dato da $f(X_0)$, e l'incertezza δQ da $|b| \delta X$, dove ora b è la derivata prima di Q rispetto a X , calcolata in X_0 :

$$Q_0 \simeq f(X_0) \quad \delta Q \simeq \left| \frac{dQ}{dX} \right|_0 \delta X. \quad (4.6.11)$$

(L'indice 0 indica, in modo sintetico, che la derivata prima va calcolata in corrispondenza di $X = X_0$).

Esempio: Riprendiamo l'esempio precedente del raggio e della sezione di un cilindro. Supponiamo di avere misurato, con la stessa incertezza $\delta R = 0.01$ mm, il raggio di due cilindri diversi.

Il primo cilindro ha un raggio $R = (0.5 \pm 0.01)$ mm. Applicando le eq. (4.6.11) si trova che la sezione è $S = \pi R^2 = (0.78 \pm 0.03)$ mm².

Il secondo cilindro ha un raggio $R = (5 \pm 0.01)$ mm. Applicando le eq. (4.6.11) si trova che la sezione è $S = \pi R^2 = (78.5 \pm 0.3)$ mm².

Nonostante le incertezze su R siano uguali, l'incertezza assoluta δS sulla sezione è dieci volte maggiore nel secondo caso che nel primo (l'incertezza relativa è invece dieci volte inferiore !)

L'approssimazione di linearità locale è tanto più valida quanto più piccola è l'incertezza δX rispetto al valore centrale X_0 .

Elevamento a potenza: $Q = X^n$

Consideriamo il caso particolare che la funzione $Q = f(x)$ sia un elevamento a potenza: $Q = X^n$. In questo caso, applicando le regole date nelle equazioni (4.6.11), si trova

$$Q_0 \simeq X_0^n \quad \delta Q \simeq n |X_0^{n-1}| \delta X, \quad \text{cioè} \quad \frac{\delta Q}{|Q_0|} \simeq n \frac{\delta X}{|X_0|}. \quad (4.6.12)$$

In altri termini, l'incertezza relativa della grandezza Q è n volte l'incertezza relativa della grandezza X .

D) Formula generale per la propagazione dell'incertezza

Siamo ora in grado di affrontare il problema del calcolo del valore centrale Q_0 e dell'incertezza δQ nel caso generale $Q = f(X, Y, Z, \dots)$.

Per semplificare la trattazione senza perdere comunque di generalità, consideriamo il caso di due sole grandezze misurate direttamente: $Q = f(X, Y)$. Ad esempio, $Q = XY$ oppure $Q = X/Y$.

Esempio 1: Si misura la lunghezza di due lati, a e b , di un rettangolo e si calcola la superficie $S = ab$.

Esempio 2: Si misurano direttamente la differenza di potenziale elettrico V applicata ad un resistore e la corrente elettrica I che lo percorre. Il valore della resistenza R può essere ricavato dalla legge di Ohm: $R = V/I$.

Anche in questo caso, come nel caso più semplice di una sola variabile $Q = f(X)$, la soluzione approssimata al problema del calcolo di Q_0 e δQ si basa sulla *linearizzazione locale* della funzione $f(X, Y)$ in un intorno dei valori centrali X_0 e Y_0 , in modo da sostituire localmente la superficie $f(X, Y)$ con il piano tangente alla superficie nel punto di coordinate (X_0, Y_0) :

$$Q = f(X, Y) \quad \rightarrow \quad Q = a + bX + cY. \quad (4.6.13)$$

I coefficienti b e c dell'eq. (4.6.13) corrispondono alle *derivate parziali prime* di Q rispetto a X e Y , calcolate per $X = X_0$ e $Y = Y_0$:

$$b = \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0 \quad c = \left(\frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0; \quad (4.6.14)$$

Nota: Data una funzione di più variabili $Q = f(X, Y, Z, \dots)$, la derivata parziale prima di Q rispetto ad una qualsiasi variabile, ad es. X , si calcola come una normale derivata, considerando le altre variabili come parametri costanti. Nell'eq. (4.6.14) l'indice 0 significa che le derivate vanno calcolate per $X = X_0$ e $Y = Y_0$.

Il problema può ora venire ancora ricondotto, seppure localmente ed in modo approssimato, al caso lineare del § 4.6.B. Se, come abbiamo finora supposto, le grandezze X e Y sono *statisticamente indipendenti*, allora

$$Q_0 \simeq f(X_0, Y_0); \quad (\delta Q)^2 \simeq \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0^2 (\delta X)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0^2 (\delta Y)^2. \quad (4.6.15)$$

In altri termini, l'incertezza δQ si ottiene dalla somma quadratica delle incertezze δX e δY , ciascuna pesata per la corrispondente derivata parziale.

La generalizzazione al caso di più di due grandezze misurate direttamente, $Q = f(X, Y, Z, \dots)$, è immediata:

$$(\delta Q)^2 \simeq \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0^2 (\delta X)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0^2 (\delta Y)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Z} \right)_0^2 (\delta Z)^2 + \dots \quad (4.6.16)$$

Ancora possiamo osservare che l'approssimazione di linearità locale è tanto più valida quanto più piccole sono le incertezze rispetto ai valori centrali.

Vediamo ora in concreto l'applicazione dell'eq. (4.6.16) ad alcuni casi particolarmente significativi.

Moltiplicazione di due grandezze: $Q = XY$

Nel caso di una moltiplicazione, $Q = XY$, il valore centrale sarà approssimato da

$$Q_0 \simeq X_0 Y_0. \quad (4.6.17)$$

Per quanto riguarda l'incertezza, applicando l'eq. (4.6.15),

$$(\delta Q)^2 \simeq \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0^2 (\delta X)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0^2 (\delta Y)^2 = Y_0^2 (\delta X)^2 + X_0^2 (\delta Y)^2. \quad (4.6.18)$$

L'eq. (4.6.18) assume una forma più facile da ricordare se si dividono i membri dell'equazione per $Q_0^2 = X_0^2 Y_0^2$:

$$\left(\frac{\delta Q}{Q_0} \right)^2 \simeq \left(\frac{\delta X}{X_0} \right)^2 + \left(\frac{\delta Y}{Y_0} \right)^2. \quad (4.6.19)$$

L'*incertezza relativa* su Q è la somma quadratica delle incertezze relative su X e Y .

Divisione tra due grandezze: $Q = X/Y$

Nel caso di una divisione, $Q = X/Y$, il valore centrale sarà approssimato da

$$Q_0 \simeq X_0/Y_0. \quad (4.6.20)$$

Per quanto riguarda l'incertezza, applicando l'eq. (4.6.15),

$$(\delta Q)^2 \simeq \left(\frac{\partial Q}{\partial X} \right)_0^2 (\delta X)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y} \right)_0^2 (\delta Y)^2 = \frac{1}{Y_0^2} (\delta X)^2 + \frac{X_0^2}{Y_0^4} (\delta Y)^2. \quad (4.6.21)$$

L'eq. (4.6.21) assume una forma più facile da ricordare se si dividono i membri dell'equazione per $Q_0^2 = X_0^2/Y_0^2$:

$$\left(\frac{\delta Q}{Q_0} \right)^2 \simeq \left(\frac{\delta X}{X_0} \right)^2 + \left(\frac{\delta Y}{Y_0} \right)^2. \quad (4.6.22)$$

Anche nel caso della divisione, quindi, l'*incertezza relativa* su Q è la somma quadratica delle incertezze relative su X e Y .

E) Caso di misure dirette statisticamente non indipendenti

Le procedure di propagazione dell'incertezza che abbiamo finora studiato si riferiscono a misure dirette statisticamente indipendenti. Non sempre però la condizione di indipendenza è verificata.

Per capire quale può essere la differenza, nella procedura di propagazione, tra misure statisticamente indipendenti e non, consideriamo due esempi molto semplici.

Esempio 1: Si vuole misurare il perimetro P di un quadrato. Allo scopo si misura direttamente il lato a , ottenendo $a_0 \pm \delta a$. Consideriamo ora due diverse procedure per calcolare l'incertezza su P .

La procedura più semplice consiste nel calcolare il perimetro come $P = 4a$. Utilizzando l'eq. (4.6.9) si ottiene quindi $\delta P = 4 \delta a$.

Una seconda procedura consiste nel calcolare il perimetro come $P = a+a+a+a$. Può sembrare logico, a questo punto, applicare la formula (4.6.7) e calcolare l'incertezza su P mediante somma quadratica: $(\delta P)^2 = 4 (\delta a)^2$, per cui $\delta P = 2 \delta a$. Una riflessione più attenta mostra che questa seconda procedura è sbagliata: non si può infatti utilizzare l'eq. (4.6.7), in quanto le quattro grandezze che vengono sommate sono *identiche*, e quindi statisticamente *non* indipendenti.

Esempio 2: Si vuole misurare l'area della superficie S di un quadrato. Allo scopo si misura direttamente il lato a , come nell'esempio precedente, ottenendo $a_0 \pm \delta a$. Consideriamo ancora due diverse procedure per calcolare l'incertezza su S .

La procedura più semplice consiste nel calcolare l'area come $S = a^2$. Utilizzando l'eq. (4.6.11) si ottiene quindi $\delta S = 2a \delta a$.

Una seconda procedura consiste nel calcolare l'area come $S = a \cdot a$. Utilizzando l'eq. (4.6.18) si ottiene $(\delta S/S)^2 = 2 (\delta a/a)^2$, per cui $\delta S = \sqrt{2} a \delta a$. Anche in questo caso, una riflessione più attenta mostra che la seconda procedura è sbagliata: non si può infatti utilizzare l'eq. (4.6.18), in quanto le due grandezze che vengono moltiplicate tra loro sono *identiche*, e quindi statisticamente *non* indipendenti.

Questi due semplici esempi mostrano che le formule di propagazione dell'incertezza basate sulle somme quadratiche non sono corrette se le misure dirette non sono statisticamente indipendenti.

La propagazione dell'incertezza nel caso in cui le misure dirette non siano statisticamente indipendenti non è tuttavia suscettibile di una trattazione semplice, se non altro perché il grado di dipendenza statistica può variare da caso a caso. Si può comunque dimostrare che esiste un *limite superiore* all'incertezza di una grandezza misurata indirettamente, qualunque sia il grado di dipendenza statistica delle misure dirette. Al § 7.7 dimostreremo che, se $Q = f(X, Y, Z, \dots)$, l'incertezza su Q non può superare il valore

$$(\delta Q)_{\max} \simeq \left| \frac{\partial Q}{\partial X} \right|_0 \delta X + \left| \frac{\partial Q}{\partial Y} \right|_0 \delta Y + \left| \frac{\partial Q}{\partial Z} \right|_0 \delta Z + \dots \quad (4.6.23)$$

F) Riepilogo

Nei precedenti sotto-paragrafi abbiamo introdotto le regole fondamentali per la propagazione dell'incertezza, partendo dai casi più semplici per arrivare alla fine alla formula più generale.

Vogliamo ora riassumere in modo sintetico i risultati ottenuti.

Innanzitutto è bene ricordare che le considerazioni svolte in questo paragrafo valgono solo se le incertezze sono espresse come scarti tipo di opportune distribuzioni.

Se le misure dirette sono **statisticamente indipendenti**, l'incertezza sulla misura indiretta di $Q(X, Y, Z, \dots)$ può essere calcolata con la formula generale (4.6.16):

$$\delta Q \simeq \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial X}\right)_0^2 (\delta X)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Y}\right)_0^2 (\delta Y)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial Z}\right)_0^2 (\delta Z)^2 + \dots} \quad (4.6.24)$$

Se la funzione $Q(X, Y, Z, \dots)$ è *lineare*, cioè $Q = aX + bY + cZ + \dots$, allora l'eq. (4.6.24) è esatta; è facile verificare che l'eq. (4.6.24) è in tal caso equivalente alla (4.6.6).

Nei casi particolari di *addizione* e *sottrazione*, $Q = X + Y$ e $Q = X - Y$, la propagazione dell'incertezza si riduce all'addizione quadratica delle incertezze assolute, eq. (4.6.7) e (4.6.8).

Se la funzione $Q(X, Y, Z, \dots)$ è *non lineare*, allora l'eq. (4.6.24) è approssimata: l'approssimazione è tanto migliore quanto più piccole sono le incertezze $\delta X, \delta Y, \dots$ rispetto ai valori centrali X_0, Y_0, \dots .

Nei casi particolari di *moltiplicazione* e *divisione*, la propagazione dell'incertezza si riduce all'addizione quadratica delle incertezze relative, eq. (4.6.19) e (4.6.22).

Nel caso di elevamento a potenza, $Q = X^n$, l'incertezza relativa su Q è n volte l'incertezza relativa su X , eq. (4.6.12).

Se le misure dirette sono **statisticamente non indipendenti**, l'eq. (4.6.24) non è più giustificata. Si può dimostrare che l'incertezza su Q non può comunque superare il valore massimo dato dall'eq. (4.6.23):

$$(\delta Q)_{\max} \simeq \left|\frac{\partial Q}{\partial X}\right|_0 \delta X + \left|\frac{\partial Q}{\partial Y}\right|_0 \delta Y + \left|\frac{\partial Q}{\partial Z}\right|_0 \delta Z + \dots \quad (4.6.25)$$

4.7 – Correlazione tra grandezze fisiche

La misurazione di *singole grandezze*, di cui ci siamo finora occupati, è molto importante in campo sia scientifico che tecnologico. Per quanto riguarda la Fisica, è incessante lo sforzo per ridurre l'incertezza con cui sono note le cosiddette *costanti fondamentali*: ad es. la massa e la carica elettrica dell'elettrone, il numero di Avogadro, etc. (si veda anche l'Appendice D.2).

La ricerca scientifica richiede però soprattutto la misurazione contemporanea di *due o più grandezze*, alla ricerca di relazioni analitiche tra i loro valori che possano essere assunte come *leggi*.

Esempio 1: La misurazione della corrente elettrica I che scorre in un conduttore metallico al variare della differenza di potenziale V porta a riconoscere che le due grandezze sono tra di loro proporzionali (legge di Ohm).

Esempio 2: Consideriamo un gas rarefatto (buona approssimazione di un *gas ideale*). È possibile misurare il volume V in funzione della temperatura T a pressione P costante; oppure la pressione P in funzione della temperatura T a volume V costante; oppure ancora la pressione P in funzione del volume V a temperatura T costante. In tutti i casi si trovano delle correlazioni tra le grandezze misurate, che possono essere globalmente sintetizzate nella cosiddetta *equazione di stato* dei gas ideali: $pV = nRT$, dove n è il numero di moli, e R una costante, detta "costante dei gas".

Abbiamo visto nei paragrafi precedenti che qualsiasi misura di una grandezza fisica è affetta da incertezza. È facile rendersi conto che l'incertezza delle misure gioca un ruolo molto importante anche quando si è alla ricerca di correlazioni tra due o più grandezze fisiche e si vuole esprimere una eventuale correlazione sotto forma di una relazione analitica. L'incertezza delle singole misure si riflette necessariamente in un'incertezza nella relazione analitica tra le grandezze.

Questo paragrafo è dedicato all'introduzione di alcune tecniche utili per riconoscere l'esistenza di una correlazione tra due grandezze fisiche ed esprimerla sotto forma di relazione analitica, tenendo conto delle incertezze di misura. Gli argomenti trattati in questo paragrafo verranno approfonditi nel Cap. 7.

A) Tabelle e grafici: correlazione tra grandezze

Consideriamo due grandezze fisiche X e Y . Misuriamo \mathcal{N} valori *diversi* della grandezza X , e per ciascun valore valutiamo l'incertezza. In corrispondenza ad ogni valore di X , misuriamo un valore della grandezza Y , valutandone l'incertezza. Otterremo così \mathcal{N} coppie di valori

$$x_i \pm \delta x_i \quad y_i \pm \delta y_i \quad (i = 1 \dots \mathcal{N}).$$

Esempio 1: Un gruppo di \mathcal{N} persone viene sottoposto ad una visita medica. Per ogni persona si misurano sia la statura $h_i \pm \delta h_i$ che la massa $m_i \pm \delta m_i$ ($i = 1 \dots \mathcal{N}$.)

Esempio 2: Abbiamo a disposizione una molla elicoidale fissata per un estremo ad un supporto fisso. Sollecitiamo l'altro estremo della molla con una forza variabile. Per ogni valore $F_i \pm \delta F_i$ della forza misuriamo la corrispondente deformazione $y_i \pm \delta y_i$ della molla.

Esempio 3: Facciamo oscillare un pendolo variando la sua distanza ℓ dal punto di sospensione. Per ogni valore della lunghezza $\ell_i \pm \delta \ell_i$ misuriamo il corrispondente valore del periodo di oscillazione $\mathcal{T}_i \pm \delta \mathcal{T}_i$.

Le coppie di valori possono essere elencate in modo sintetico mediante una tabella (vedi Appendice A.2). Un modo più efficiente per identificare e studiare eventuali correlazioni tra i valori delle grandezze X e Y è costituito dal grafico. Le coppie di valori $(x_i \pm \delta x_i, y_i \pm \delta y_i)$ possono venire rappresentate in un diagramma cartesiano: le coppie di valori centrali (x_i, y_i) sono rappresentate da punti, le incertezze δx_i e δy_i da barre d'errore, rispettivamente orizzontali e verticali. (Maggiori dettagli sull'uso dei grafici sono forniti in Appendice A.3).

La Fig. 4.13 mostra tre grafici relativi ai tre esempi fatti sopra.

Nel primo caso (masse e stature, grafico di sinistra) i punti sono molto dispersi; è tuttavia possibile riconoscere una vaga correlazione tra massa e statura: al crescere della statura, mediamente cresce anche la massa. Studieremo al § 7.8 una procedura che consente di valutare, in base a considerazioni di natura probabilistica, il grado di correlazione in situazioni di questo tipo.

Negli altri due casi (caso della molla, al centro, e caso del pendolo, a destra) non solo è immediato riconoscere che esiste una correlazione tra le due grandezze rappresentate sugli assi x e y , ma è anche ragionevole ipotizzare che le due grandezze siano collegate da una relazione funzionale $y = f(x)$, esprimibile in forma analiticamente semplice. Nel caso della molla (grafico di centro) è evidente una relazione di diretta proporzionalità, $y = Bx$. Nel seguito di questo paragrafo 4.7 ci occuperemo dei casi di diretta proporzionalità. Nel § 7.5 invece ci occuperemo di relazioni funzionali di tipo più generale (come ad esempio quella del grafico di destra nella Fig. 4.13).

B) Relazioni lineari

Supponiamo che l'osservazione di un grafico ci porti a ritenere plausibile una relazione lineare tra le due grandezze X e Y :

$$Y = A + BX. \quad (4.7.1)$$

È il caso, ad esempio, del grafico centrale della Fig. 4.13. Si presentano allora due problemi:

- a) Determinare i parametri A e B della retta $Y = A + BX$ che meglio interpreta globalmente i punti sperimentali. Affronteremo questo problema in modo grafico già in questo § 4.7.B e in modo analitico nel §§ 4.7.C e 4.7.D.

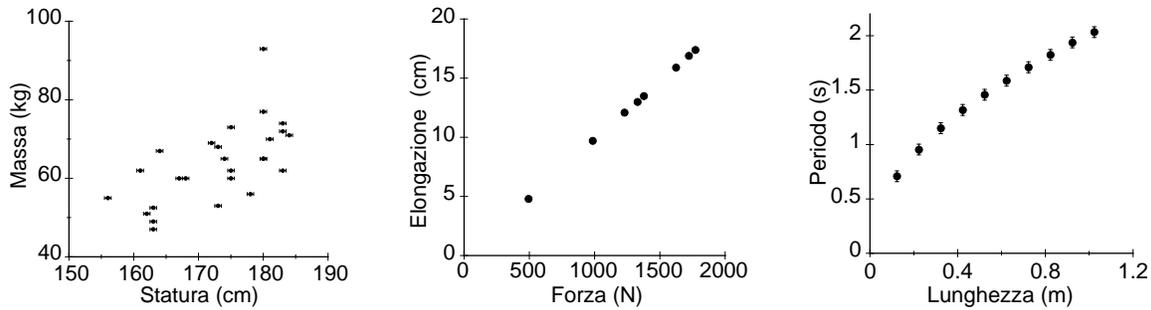


Fig. 4.13 – Correlazione tra grandezze fisiche (con riferimento ai tre esempi del testo). A sinistra: massa in funzione della statura di un gruppo di persone. Al centro: elongazione di una molla in funzione della forza applicata. A destra: periodo di oscillazione di un pendolo in funzione della lunghezza. Le barre d'incertezza, quando non compaiono esplicitamente, sono minori delle dimensioni dei simboli.

- b) Valutare il grado di affidabilità dell'ipotesi che i punti sperimentali siano interpretabili mediante una legge lineare. Inizieremo ad affrontare questo problema al § 4.7.F, rimandando al § 7.6 una trattazione più approfondita.

Una valutazione attendibile dei parametri A e B della retta $Y = A + BX$ e dell'ordine di grandezza delle rispettive incertezze δA e δB può spesso essere ottenuta con il seguente *metodo grafico*.

Si traccino le rette di massima e minima pendenza compatibili con le croci di incertezza dei punti sperimentali (Fig. 4.14). Le due rette avranno equazioni

$$Y = A_1 + B_1 X, \quad Y = A_2 + B_2 X. \quad (4.7.2)$$

È plausibile assumere per i parametri A e B i valori medi

$$A = \frac{A_1 + A_2}{2}, \quad B = \frac{B_1 + B_2}{2}, \quad (4.7.3)$$

e valutare le relative incertezze mediante le relazioni approssimate

$$\delta A \simeq \frac{|A_1 - A_2|}{2}, \quad \delta B \simeq \frac{|B_1 - B_2|}{2}. \quad (4.7.4)$$

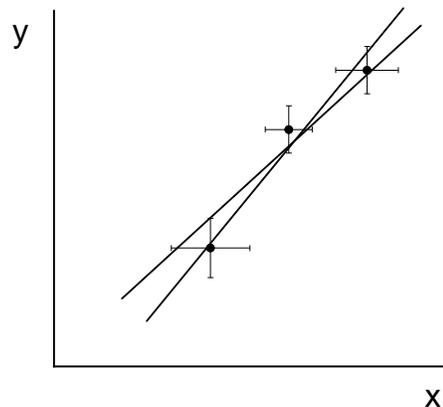


Fig. 4.14 – Rette di massima e minima pendenza compatibili con le croci di incertezza.

C) Regressione lineare

Una procedura efficiente per calcolare *in modo analitico* i coefficienti A e B della retta $A + BX$ è costituita dalla *regressione lineare* basata sul *metodo dei minimi quadrati*. La procedura si basa sulla ricerca dei parametri A e B che rendono minima la discrepanza globale tra punti sperimentali (x_i, y_i) e retta $Y = A + BX$, tenendo conto dell'incertezza di ogni singolo punto.

Per ogni punto, la discrepanza viene misurata lungo l'asse y , considerando il quadrato della differenza tra le ordinate del punto e della retta (Fig. 4.15, a sinistra):

$$(y_i - A - Bx_i)^2. \quad (4.7.5)$$

Il metodo dei minimi quadrati tiene conto solo delle incertezze δy_i sulla variabile Y . (Supponiamo, per il momento, che le incertezze δx_i siano trascurabili; vedremo più avanti come è possibile tener conto anche delle incertezze δx_i .) Per ogni punto, la discrepanza espressa dall'eq. (4.7.5) viene divisa per l'incertezza $(\delta y_i)^2$, ovvero moltiplicata per il *peso* $w_i = 1/(\delta y_i)^2$. Ciò che conta, per ogni punto, non è quindi la discrepanza assoluta (4.7.5), bensì la discrepanza commisurata all'incertezza δy_i (Fig. 4.15, a destra). La discrepanza globale tra retta e punti sperimentali è misurata dalla sommatoria:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - A - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} w_i [y_i - A - Bx_i]^2. \quad (4.7.6)$$

La sommatoria viene convenzionalmente indicata con il simbolo χ^2 (leggi *chi quadrato*), cioè con il quadrato della lettera greca χ (nomi e simboli di tutte le lettere dell'alfabeto greco sono riportate nella prima tabella dell'Appendice D). Poichè i valori $x_i, y_i, \delta y_i$ sono noti, la grandezza χ^2 è funzione solo delle due variabili A e B . Si tratta quindi di determinare analiticamente i valori di A e B che rendono minima la grandezza χ^2 .

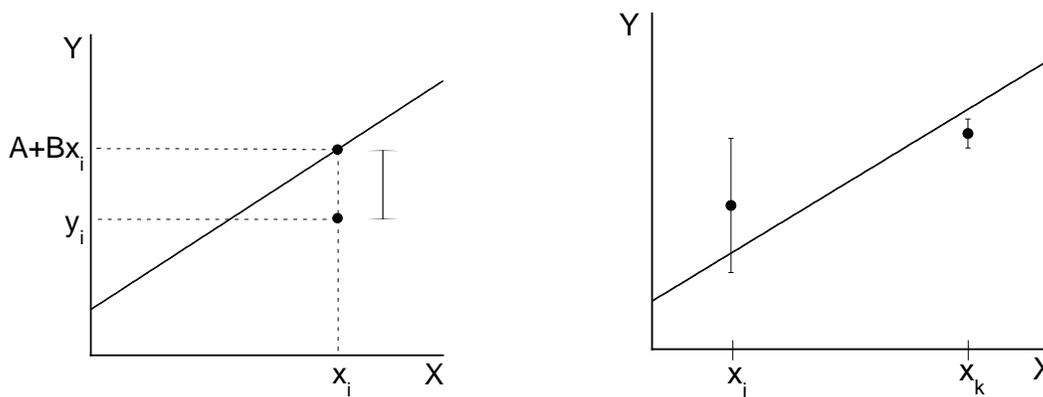


Fig. 4.15 – A sinistra: discrepanza tra i valori in ordinata del punto e della retta in corrispondenza dell'ascissa x_i . A destra: la discrepanza assoluta è maggiore per il punto di ascissa x_j che per il punto di ascissa x_k ; la discrepanza commisurata all'incertezza è invece minore per il punto di ascissa x_j che per il punto di ascissa x_k .

Affrontiamo prima un caso particolare, quello della **diretta proporzionalità**

$$Y = BX. \quad (4.7.7)$$

In questo caso la discrepanza globale tra retta e punti sperimentali è misurata dalla sommatoria:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} w_i [y_i - Bx_i]^2. \quad (4.7.8)$$

La grandezza χ^2 è funzione della sola variabile B . Condizione necessaria affinché χ^2 sia minimo è che sia nulla la derivata prima rispetto a B :

$$\frac{d\chi^2}{dB} = 0. \quad (4.7.9)$$

È facile verificare che l'eq. (4.7.9) è soddisfatta per

$$B = \frac{\sum_i w_i x_i y_i}{\sum_i w_i x_i^2} \quad (4.7.10)$$

e che il valore B così determinato individua un punto di minimo, e non di massimo o di flesso. Se le incertezze δy_i sono tutte uguali, e quindi sono uguali i pesi w_i , l'eq. (4.7.10) si semplifica in

$$B = \frac{\sum_i x_i y_i}{\sum_i x_i^2}. \quad (4.7.11)$$

Torniamo ora al **caso generale della linearità**

$$Y = A + B X. \quad (4.7.12)$$

La grandezza χ^2 , eq. (4.7.6), è ora funzione di *due variabili*, A e B . Condizione necessaria perché χ^2 sia minimo è che siano nulle le sue *derivate parziali prime* rispetto ad A e B :

$$\begin{cases} \frac{\partial \chi^2}{\partial A} = 0 \\ \frac{\partial \chi^2}{\partial B} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (\sum_i w_i) A + (\sum_i w_i x_i) B = \sum_i w_i y_i \\ (\sum_i w_i x_i) A + (\sum_i w_i x_i^2) B = \sum_i w_i x_i y_i \end{cases} \quad (4.7.13)$$

Si ottiene così un sistema di due equazioni lineari nelle due incognite A e B , la cui soluzione dà

$$A = \frac{(\sum_i w_i x_i^2) (\sum_i w_i y_i) - (\sum_i w_i x_i) (\sum_i w_i x_i y_i)}{\Delta_w} \quad (4.7.14)$$

$$B = \frac{(\sum_i w_i) (\sum_i w_i x_i y_i) - (\sum_i w_i y_i) (\sum_i w_i x_i)}{\Delta_w} \quad (4.7.15)$$

$$\text{dove } \Delta_w = \left(\sum_i w_i \right) \left(\sum_i w_i x_i^2 \right) - \left(\sum_i w_i x_i \right)^2. \quad (4.7.16)$$

È facile rendersi conto che i valori A e B così determinati individuano un minimo di χ^2 .

Nel caso in cui le incertezze sulle misure di Y siano tutte uguali, il peso $w_i = w$ può essere semplificato nelle eq. (4.7.14-16) e si ottengono le relazioni

$$A = \frac{(\sum_i x_i^2) (\sum_i y_i) - (\sum_i x_i) (\sum_i x_i y_i)}{\Delta} \quad (4.7.17)$$

$$B = \frac{N (\sum_i x_i y_i) - (\sum_i y_i) (\sum_i x_i)}{\Delta} \quad (4.7.18)$$

$$\text{dove } \Delta = N \left(\sum_i x_i^2 \right) - \left(\sum_i x_i \right)^2 \quad (4.7.19)$$

Nota: Una giustificazione più approfondita della procedura di regressione lineare basata sul metodo dei minimi quadrati verrà fornita al § 7.5.

Vediamo ora come è possibile tener conto, nella procedura di regressione lineare, delle eventuali **incertezze** δx_i **sulla grandezza** X **in ascissa**. Allo scopo, si può procedere come segue.

- a) Si determinano valori approssimati A' e B' dei parametri della retta, utilizzando il metodo grafico descritto al § 4.7.B oppure le eq. (4.7.17-19).
- b) Si trasformano le incertezze δX_{exp} della grandezza X in contributi δY_{tra} alle incertezze sulla grandezza Y utilizzando le procedure di propagazione descritte al § 4.6.B. Si ottiene così, per ogni punto,

$$\delta Y_{\text{tra}} = |B| \delta X_{\text{exp}}. \quad (4.7.20)$$

- c) Per ogni punto, si sommano quadraticamente i due contributi all'incertezza su Y , quello sperimentale e quello trasferito da X :

$$(\delta Y_{\text{tot}})^2 = (\delta Y_{\text{exp}})^2 + (\delta Y_{\text{tra}})^2. \quad (4.7.21)$$

D) Incertezza sui parametri della regressione lineare

I parametri A e B della retta ottenuti mediante la procedura di regressione lineare dipendono dai valori x_i, y_i delle coordinate dei punti sperimentali. Poichè i valori y_i sono affetti da incertezze δy_i , ci si aspetta che le incertezze δy_i si riflettano in incertezze δA e δB sui parametri A e B della retta.

Per valutare le incertezze δA e δB ci serviremo delle regole per la propagazione dell'incertezza introdotte al § 4.6.

Consideriamo dapprima il caso più semplice della **diretta proporzionalità** $Y = BX$. L'eq. (4.7.10) mostra che il parametro B è una combinazione lineare dei valori y_i , del tipo dell'eq. (4.6.1):

$$B = \sum_i \beta_i y_i \quad \text{con} \quad \beta_i = \frac{w_i x_i}{\sum_i w_i x_i^2}. \quad (4.7.22)$$

Possiamo pertanto applicare la regola di propagazione espressa dall'eq. (4.6.6), ricordando che $(\delta y_i)^2 = 1/w_i$:

$$(\delta B)^2 = \sum_i \beta_i^2 (\delta y_i)^2 = \frac{\sum_i w_i^2 x_i^2 / w_i}{(\sum_i w_i x_i^2)^2} = \frac{1}{\sum_i w_i x_i^2}. \quad (4.7.23)$$

Se le incertezze δy_i sono tutte uguali, l'eq. (4.7.23) si riduce a

$$(\delta B)^2 = \frac{1}{\sum_i x_i^2} (\delta y)^2. \quad (4.7.24)$$

Passiamo ora al **caso generale della linearità**. Entrambi i parametri A e B , espressi dalle eq. (4.7.14-16), sono combinazioni lineari dei valori y_i , del tipo dell'eq. (4.6.1):

$$A = \sum_i \alpha_i y_i, \quad \text{con} \quad \alpha_i = \frac{w_i (\sum_i w_i x_i^2) - w_i x_i (\sum_i w_i x_i)}{\Delta_w} \quad (4.7.25)$$

$$B = \sum_i \beta_i y_i, \quad \text{con} \quad \beta_i = \frac{w_i x_i (\sum_i w_i) - w_i (\sum_i w_i x_i)}{\Delta_w} \quad (4.7.26)$$

Possiamo ancora applicare la regola di propagazione espressa dall'eq. (4.6.6), ricordando sempre che $(\delta y_i)^2 = 1/w_i$ e tenendo conto che Δ_w è dato dall'eq. (4.7.16). Con un po' di pazienza si può verificare che

$$(\delta A)^2 = \sum_i \alpha_i^2 (\delta y_i)^2 = \frac{\sum_i w_i x_i^2}{\Delta_w}, \quad (\delta B)^2 = \sum_i \beta_i^2 (\delta y_i)^2 = \frac{\sum_i w_i}{\Delta_w}. \quad (4.7.27)$$

Se le incertezze δy_i sono tutte uguali, le eq. (4.7.27) si riducono a

$$(\delta A)^2 = \frac{\sum_i x_i^2}{\Delta} (\delta y)^2, \quad (\delta B)^2 = \frac{\mathcal{N}}{\Delta} (\delta y)^2, \quad (4.7.28)$$

con Δ espresso dall'eq. (4.7.19).

E) Linearizzazione grafica di relazioni non lineari

Riconoscere che \mathcal{N} punti sperimentali (x_i, y_i) sono disposti approssimativamente lungo una retta è relativamente semplice. Come abbiamo visto al precedente § 4.7.D, è facile poi determinare i parametri della retta mediante la procedura di regressione lineare.

Riconoscere relazioni funzionali diverse dalla linearità è invece generalmente molto difficile. Si pensi, ad esempio, alla difficoltà di distinguere un andamento parabolico $Y = \alpha X^2$ da un andamento cubico $Y = \beta Y^3$.

Il problema può spesso venire risolto mediante opportune trasformazioni degli assi del grafico, che consentano di ricondurre un generico andamento $Y = f(X)$ ad una retta $Y = A + BX$, alla quale è poi possibile applicare la regressione lineare.

Ad esempio, un andamento parabolico $Y = \alpha X^2$ può essere trasformato in un andamento lineare rappresentando i valori Y in funzione di $Z = X^2$ anziché di X .

Procedure molto efficaci di linearizzazione si basano sull'uso di grafici logaritmici, per i quali si rimanda all'Appendice A.3.

F) Test del chi-quadrato

La linearità della relazione tra due variabili X e Y viene generalmente valutata in prima approssimazione mediante osservazione diretta del grafico. Una volta determinati i parametri A e B della retta attraverso la procedura di regressione lineare, è possibile cercare di valutare in modo quantitativo il grado di affidabilità dell'ipotesi di linearità.

Punto di partenza del metodo che si utilizza generalmente per questo scopo è l'espressione della discrepanza globale tra retta e punti sperimentali, introdotta dall'eq. (4.7.6) e indicata con χ^2 . Per questa ragione, il metodo si chiama *test del chi quadrato*.

Il test del chi quadrato riveste un'importanza molto importante nella trattazione statistica avanzata dei dati sperimentali, ben al di là del presente caso della regressione lineare. Ce ne occuperemo pertanto in modo approfondito e generalizzato più avanti, nel § 7.6. In questo paragrafo, ci limiteremo ad un'introduzione semplificata e qualitativa ai suoi aspetti più semplici.

Per comprendere la filosofia che sta alla base del test del chi quadrato, è utile partire da un'ipotesi puramente astratta: supponiamo cioè di sapere *a priori* che le grandezze X e Y sono sicuramente legate dalla relazione lineare $Y = A + BX$. Eseguiamo ora un esperimento, consistente nella misurazione di \mathcal{N} coppie di punti $(x_i, y_i \pm \delta y_i)$. Naturalmente, poiché le misure sono affette da incertezza, non ci si aspetta che i punti sperimentali stiano esattamente sulla retta teorica $Y = A + BX$. Se però le incertezze δy_i dei singoli punti sono state valutate correttamente, ci si può ragionevolmente aspettare che la discrepanza tra teoria ed esperimento per ogni punto sia, in media, confrontabile con l'incertezza. Detto altrimenti, ogni termine della sommatoria nell'eq. (4.7.6) dovrebbe essere in media dell'ordine dell'unità, e quindi $\chi^2 \simeq \mathcal{N}$.

In realtà, l'aspettativa $\chi^2 \simeq \mathcal{N}$ è ragionevole se gli \mathcal{N} termini della sommatoria sono tra di loro indipendenti: sarebbe il caso, ad esempio, del confronto tra \mathcal{N} punti sperimentali e una retta $Y = A + BX$ determinata dalla teoria in modo completamente indipendente. Nel caso della regressione lineare, invece, i due parametri A e B della retta sono determinati a partire dai punti sperimentali, cosicché non tutti i termini della sommatoria sono tra di loro indipendenti.

Esempio 1: Nel caso della diretta proporzionalità $Y = BX$, se ci fosse un solo punto sperimentale (x_1, y_1) , e quindi $\mathcal{N} = 1$, la retta determinata dalla regressione lineare passerebbe esattamente per il punto (x_1, y_1) , qualunque fosse la sua incertezza δy_1 .

Esempio 2: Nel caso della relazione lineare $A + BX$, se ci fossero solo due punti sperimentali (x_1, y_1) e (x_2, y_2) , e quindi $\mathcal{N} = 2$, la retta determinata dalla regressione lineare passerebbe esattamente per entrambi i punti, qualunque fossero le loro incertezze δy_1 e δy_2 .

È ragionevole pertanto aspettarsi, nel caso della diretta proporzionalità $Y = BX$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} \simeq \mathcal{N} - 1, \quad (4.7.29)$$

e nel caso generale della linearità $Y = A + BX$

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - A - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} \simeq \mathcal{N} - 2. \quad (4.7.30)$$

È bene cercare di chiarire meglio il significato del segno \simeq delle eq. (4.7.29) e (4.7.30). La discrepanza tra punti sperimentali e retta teorica ha carattere aleatorio, cioè probabilistico. Anche il valore del χ^2 è pertanto aleatorio: i valori $\mathcal{N} - 1$ e $\mathcal{N} - 2$ rappresentano solo le medie delle rispettive distribuzioni probabilistiche del χ^2 . Uno studio più approfondito consentirà, al § 7.6, di definire le proprietà della distribuzione del χ^2 . Per il momento ci limitiamo ad anticipare alcune conclusioni approssimate.

Nel caso della diretta proporzionalità $Y = BX$, l'Eq. (4.7.29) equivale a dire che è molto probabile che

$$\mathcal{N} - 1 - \sqrt{2\mathcal{N} - 2} \leq \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} \leq \mathcal{N} - 1 + \sqrt{2\mathcal{N} - 2}, \quad (4.7.31)$$

mentre, nel caso generale della linearità $Y = A + BX$, l'Eq. (4.7.30) equivale a dire che è molto probabile che

$$\mathcal{N} - 2 - \sqrt{2\mathcal{N} - 4} \leq \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \frac{[y_i - A - Bx_i]^2}{(\delta y_i)^2} \leq \mathcal{N} + \sqrt{2\mathcal{N} - 4}. \quad (4.7.32)$$

Torniamo ora al problema di partenza. Vogliamo cioè valutare se l'ipotesi di linearità sia accettabile, a partire dai valori sperimentalmente ottenuti per il χ^2 . Le Eq. (4.7.29) e (4.7.30), o meglio le Eq. (4.7.31) e (4.7.32), costituiscono dei criteri di natura probabilistica, da utilizzare comunque con cautela. Per fissare le idee, consideriamo il caso generale $Y = A + BX$.

- a) Se $\chi^2 \simeq \mathcal{N} - 2$ e se le incertezze δy_i sono state valutate correttamente, allora è plausibile ritenere che la retta $Y = A + BX$ sia compatibile con i punti sperimentali.
- b) Se $\chi^2 \ll \mathcal{N} - 2$ è ancora plausibile ritenere la retta $Y = A + BX$ compatibile con i punti sperimentali; è però anche probabile che le incertezze δy_i siano state mediamente sopravvalutate (ad esempio perché si è sovrastimata la possibile influenza di errori sistematici).
- c) Se $\chi^2 \gg \mathcal{N} - 2$ è plausibile concludere che la retta $Y = A + BX$ non è compatibile con i punti sperimentali; può tuttavia sorgere anche il dubbio che si siano invece sottovalutate le incertezze δy_i . Affronteremo questo problema nel seguente § 4.7.G.

G) Valutazione a posteriori dell'incertezza di misura

Può succedere che l'incertezza δy_i sui singoli valori della grandezza Y sia stata sottostimata. Ad esempio:

- a) ogni valore y_i rappresenta una singola misura, anziché la media su più misure ripetute; l'incertezza δy_i dipende solo dalla risoluzione, e non può tener conto dell'influenza degli errori casuali;
- b) non si è tenuta in debito conto l'incertezza dovuta all'influenza di errori sistematici non compensati.

In tali casi, se si è convinti della bontà dell'ipotesi di linearità $Y = A + BX$ (in base ad esempio a considerazioni di natura teorica o all'esito di altri esperimenti), è possibile ribaltare la formula (4.7.30) del χ^2 per valutare *a posteriori* l'incertezza media δy sui punti sperimentali, imponendo che $\chi^2 = \mathcal{N} - 2$:

$$(\delta y)^2 \simeq \frac{1}{\mathcal{N} - 2} \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} [y_i - A - Bx_i]^2 \quad (4.7.33)$$

Analogha procedura può essere seguita con l'Eq. (4.7.29) nel caso della diretta proporzionalità.