ANALISI MATEMATICA I (Bioinformatica, a.a. 2007/08)

Proff. M. Spera e M. Squassina

Prova scritta del $\boxed{7/1/2009}$

Prologo

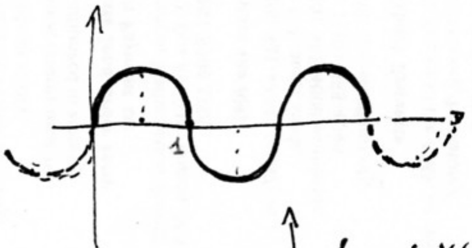
① Individuare il dominio di $y = \tan x$ e dire se tale f. è ivi continua

② È vero che $x = e^{\log x}$ $\forall x \in \mathbb{R}$? Spiegare.

③ È vero che $x = \log(e^x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$? Spiegare.

④ Data $f(x) = (x^2+1)^x$ [dove è definita?] determinare f'

⑤ Sia $F(x) = \int_1^x [\log(1+t)]^{10^{80}}\, dt$ Calcolare F'

⑥ 

In quali punti la f avente il grafico a lato non è derivabile? Spiegare.

semicirconferenze congruenti di raggio $\frac{1}{2}$

(E1) Calcolare

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(\sin x) - \arctan(\sinh x)}{[\log(1+x)]^3}$$

(E2) Data la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$ $\qquad x, \alpha \in \mathbb{R}$

a) Si determinino i valori di x e α per i quali essa converge <u>assolutamente</u>

b) Si determinino i valori di x e α per i quali essa converge <u>semplicemente</u>.

(E3) Calcolare $\displaystyle\int \frac{1}{(x^3+1)x}\,dx \qquad (x \neq 0)$

(E4) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' + 2y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$$

◆ ◆ ◆

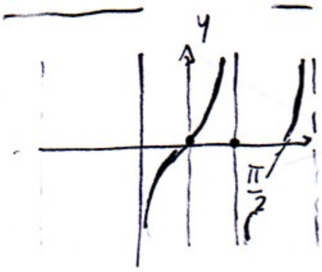
(T1) Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle

(T2) Enunciare e dimostrare il teorema fondamentale del calcolo

Tempo a disposizione: 2h 30m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

☆ Soluzione del prologo

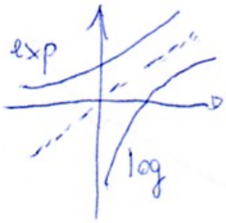
① 

dominio $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

ed è lì continua

② $x = e^{\log x}$ è valida per $x > 0$

③ $x = \log e^{x}$ è valida $\forall x \in \mathbb{R}$



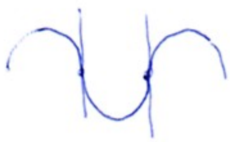
④ $f(x) = (x^2+1)^x$ (def $\forall x \in \mathbb{R}$)

$$= e^{x\log(x^2+1)} \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot [x \log(x^2+1)]$$

$$= f(x)\left[1 \cdot \log(x^2+1) + x \cdot \frac{1}{x^2+1} \cdot 2x\right]$$

$$= f(x)\left[\log(x^2+1) + \frac{2x^2}{x^2+1}\right]$$

⑤ $F'(x) \underset{T.F.C}{=} [\log(1+x)]^{10^{80}}$

⑥ 

non è derivabile per $x \in \mathbb{Z}$
(tangente verticale)

(E1)

$$L = \lim_{x \to 0} \frac{\arctan(\sin x) - \arctan(\sinh x)}{[\log(1+x)]^3}$$

N: conviene utilizzare il teor. di Lagrange

$\arctan(\sin x) - \arctan(\sinh x) =$

$\dfrac{1}{1+\xi^2} (\sin x - \sinh x)$

$\xi \to 0$

$\downarrow$

1

$$\sin x - \sinh x = x - \frac{x^3}{6} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$
$$= -\frac{1}{3}x^3 + o(x^4)$$

D: $[\log(1+x)]^3 = \left[x - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)\right]^3$

$$= x^3 \left[1 - \frac{x}{2} + o(x)\right]^3$$
$$\sim x^3$$

In definitiva $L = -\dfrac{1}{3}$

(E2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ convergenza assoluta $\equiv$ conv. di $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^n}{n^\alpha}$

utilizziamo il criterio del rapporto

$$\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)^\alpha} \cdot \frac{n^\alpha}{|x|^n} = |x| \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha$$

$$\xrightarrow[(n \to \infty)]{} |x| \quad , \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

[infatti p.e. $\displaystyle\left(\frac{n}{n+1}\right)^\alpha = e^{\alpha \log \frac{n}{n+1}} = e^{\alpha \underbrace{\log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)}_{\to \log 1 = 0}}$

$\xrightarrow[n \to \infty]{} 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$]

Pertanto si ha convergenza assoluta per $|x| < 1$ (e quindi anche semplice)

Studiamo i casi $x = \pm 1$

$\boxed{x = 1}$ Si ha che $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ converge per $\alpha > 1$ altrim. diverge

$\boxed{x = -1}$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ è a segni alterni

converge se $\frac{1}{n^\alpha} \to 0$, ovvero se $\alpha > 0$

(la conv. è [illegible])

la serie converge per
$|x| < 1$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$
(conv. assoluta)

$x = 1$, $\alpha > 1$

$x = -1$, $\alpha > 0$

ricapitolazione

$$I = \int \frac{1}{(x^3+1)x}\,dx \qquad x \neq 0 \quad x \neq -1$$

Poniamo $\quad x^3 = t \qquad x = t^{\frac{1}{3}}$

$$dx = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}}\,dt$$

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(t+1)t^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{1}{t^{2/3}}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{t(t+1)}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right) dt$$

$$= \frac{1}{3}\log\left|\frac{t}{t+1}\right| + c = \frac{1}{3}\log\left|\frac{x^3}{x^3+1}\right|$$

Controllo: deriviamo

$$(\quad)' = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x^3}\cdot 3x^2 - \frac{3x^2}{x^3+1}\right]$$

$$= \cancel{\frac{1}{3}}\cancel{3}\left[\frac{1}{x} - \frac{x^2}{x^3+1}\right] = \ldots \frac{1}{(x^3+1)x} \quad \checkmark$$

In modo standard:

$$\frac{1}{(x^3+1)x} = \frac{1}{x(x+1)\underbrace{(x^2-x+1)}_{\Delta<0}} =$$

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} =$$

$$= \frac{A(x^3+1) + B\,x(x^2-x+1) + (Cx+D)\,x(x+1)}{(\quad)}$$

Cons. il numeratore: $N = 1$

Poniamo $x=0$ si ha:

$$A = 1$$

Poniamo $x=-1$

$$-B(\underbrace{1+1+1}_{3}) = 1$$

$$B = -1/3$$

$$(Cx+D)(x+1)x = (x^2+x)(Cx+D) = Cx^3 + (C+D)x^2 + Dx$$

Deve essere soddisfatto (conf. i termini cubici): $1 - \frac{1}{3} + C = 0$

$\Rightarrow$ $C = -\frac{2}{3}$

$$\rightsquigarrow -\frac{2}{3}x^3 + \left(D - \frac{2}{3}\right)x^2 + Dx$$

conf. i termini quadratici $\Rightarrow$ $+\frac{1}{3} + D - \frac{2}{3} = 0$ $\Rightarrow$ $D = \frac{1}{3}$

termini lineari?

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{1}{(x^3+1)x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} + \frac{-\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}{x^2-x+1}$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{3}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{3}\frac{\overbrace{2x-1}^{f'}}{\underbrace{x^2-x+1}_{f}}$$

$$\Rightarrow \int(\ \ ) = \log|x| - \frac{1}{3}\log|x+1| - \frac{1}{3}\log|x^2-x+1| + c$$

$$= \log|x| - \frac{1}{3}\log|x^3+1| + c$$

$$= \frac{1}{3}\log|x|^3 - \frac{1}{3}\log|x^3+1| + c$$

$$= \frac{1}{3}\log\left|\frac{x^3}{x^3+1}\right|$$

$\checkmark$

→ bis.

E4

$$\begin{cases} y'' + y' + 2y = 1 \\ y'(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

Equazione caratteristica:

$$\xi^2 + \xi + 2 = 0$$

$$\xi = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

base per le sol. dell'eq. omogenea associata

$$y_1 = e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x$$
$$y_2 = e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x$$

Sol. particolare: proviamo con $y = C$ (costante). È soddisfatto $2C = 1 \Rightarrow$

$$C = \frac{1}{2}$$

Sol. generale:

$$y(x) = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{sol part}} + \alpha e^{-\frac{x}{2}} \cos \frac{\sqrt{7}}{2} x + \beta e^{-\frac{x}{2}} \sin \frac{\sqrt{7}}{2} x$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Imponiamo le cond. di Cauchy:

$y(0) = 0$ conduce a

$$\frac{1}{2} + \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha = -\frac{1}{2}}$$

Calcoliamo $y'(x)$

$$y'(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)\left[-\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cos\frac{\sqrt{7}}{2}x + e^{-x/2}\{-\sin[\ ]\ \frac{\sqrt{7}}{2}\}\right]$$

$$+ \beta \left[-\frac{1}{2} \cdot e^{-x/2} \sin[\ \ ] + e^{-x/2} \cos[\ ] \cdot \frac{\sqrt{7}}{2}\right]$$

$y'(0) = 0$ porta a

$$+\frac{1}{4} + \beta \cdot \frac{\sqrt{7}}{2} = 0 \Rightarrow \beta = -\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}}$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{2} \\ \beta = -\frac{1}{2\sqrt{7}} \end{cases}$$

$$\beta = -\frac{\sqrt{7}}{2 \cdot 7} = -\frac{\sqrt{7}}{14}$$