Università degli studi di Verona

Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale

Prova scritta di Algebra lineare — 22 gennaio 2007

matricola .... nome .... cognome ....

Votazione:	T1 T2	E1 E2 E3	

Compito

E1) Sia α un parametro reale e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 2 & 4-\alpha & \alpha^2-2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \alpha+1 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Se ne trovi una decomposizione LU e, per i valori di α per cui ciò non è possibile, una decomposizione $P^T LU$. Per $\alpha = 0$ e $\alpha = 2$, determinare una base dello spazio nullo e una base dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}_\alpha$.

Sol) Se $\alpha \neq 0$ possiamo considerare la decomposizione LU di $\mathbf{A}_\alpha$ senza effettuare scambi di righe:

$$\mathbf{A}_\alpha \longrightarrow \mathbf{U}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 2-\alpha & \alpha^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

in cui $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{L}_\alpha \mathbf{U}_\alpha$ e

$$\mathbf{L}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha = 0$ calcoliamo la $P^T LU$ di $\mathbf{A}_\alpha$. Scambiamo la terza e la quarta riga:

$$\mathbf{B}_0 = E_{34}\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto calcoliamo la decomposizione LU di $\mathbf{B}_0$:

$$\mathbf{B}_0 \longrightarrow \mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi $\mathbf{A}_0 = \mathbf{P}^T \mathbf{L}_0 \mathbf{U}_0$, in cui $\mathbf{P}^T = E_{34}^T$ e

$$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sia ancora $\alpha = 0$ allora una base dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}_0$ ($Col(\mathbf{A}_0)$) è data da tre colonne linearmente indipendenti di $\mathbf{A}_0$, dal momento che $rank\,\mathbf{A}_0 = 3$:

$$Col(\mathbf{A}_0) =< [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, [0 \quad 2 \quad -1 \quad 0]^T, [0 \quad -2 \quad 1 \quad 1]^T >$$

Una base per lo spazio nullo di $\mathbf{A}_0$ ($N(\mathbf{A}_0)$), si trova, ad esempio, risolvendo il sistema omogeneo $\mathbf{A}_0\mathbf{v} = 0$, in cui $\mathbf{v}$ è un vettore di $\mathbf{R}^5$, quindi:

$$N(\mathbf{A}_0) =< [1 \quad -2 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T, [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T >$$

con $\lambda \in \mathbf{R}$. Sia $\alpha = 2$ allora una base dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}_2$ è data da quattro colonne linearmente indipendenti di $\mathbf{A}_2$, dal momento che $rank\,\mathbf{A}_2 = 4$:

$$Col(\mathbf{A}_2) =< [-1 \quad 2 \quad 0 \quad 0]^T, [0 \quad 2 \quad -1 \quad 0]^T, [1 \quad 2 \quad -2 \quad 0]^T, [-2 \quad 2 \quad 3 \quad 1]^T >$$

Una base per lo spazio nullo di $\mathbf{A}_2$ è

$$N(\mathbf{A}_2) =< [-4 \quad 6 \quad 0 \quad 2 \quad 1]^T >$$

E2) Si consideri la base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3\}$ di $\mathbf{C}^3$, dove

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dato $\alpha \in \mathbf{C}$, si consideri l'unica applicazione lineare $f_\alpha \colon \mathbf{C}^3 \to \mathbf{C}^3$ tale che

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{v}_1) &= \mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3, \\ f_\alpha(\mathbf{v}_2) &= 2\mathbf{v}_1 - \alpha\mathbf{v}_2, \\ f_\alpha(\mathbf{v}_3) &= \alpha\mathbf{v}_3. \end{aligned}$$

Si dica per quali $\alpha \in \mathbf{C}$ si ha $[1\ 1\ -1]^T \in \mathrm{Im}(f_\alpha)$.

Si costruisca una base ortonormale di $\mathbf{C}^3$ contenente $\mathbf{v}_1$.

Sol) Chiamiamo $\mathbf{A}_{f_\alpha}$ la matrice associata all'applicazione lineare f_α, allora il vettore $[1 \quad 1 \quad -1]^T$ di $\mathbf{C}^3$ è un elemento dell'immagine di f_α se il sistema

$$\mathbf{A}_{f_\alpha}\mathbf{v} = [1 \quad 1 \quad -1]^T$$

ammette soluzione e ciò si ha per $\alpha \neq 0$.

Costruiamo ora una base ortonormale di $\mathbf{C}^3$ contenente $\mathbf{v}_1$. Poniamo $\mathbf{u}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{(\mathbf{v}_1|\mathbf{v}_1)}}$, per cui gli altri elementi di una base ortonormale di $\mathbf{C}^3$ si ottengono applicando l'algoritmo di G-S a $\mathbf{v}_2$ e $\mathbf{v}_3$.

$$\mathbf{v'}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_2)\mathbf{u}_1 = [-1 \quad 1 \quad 1]^T$$

quindi

$$\mathbf{u}_2 = \frac{\mathbf{v'}_2}{(\mathbf{v'}_2|\mathbf{v'}_2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}[-1 \quad 1 \quad 1]^T$$

$$\mathbf{v'}_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{u}_1|\mathbf{v}_3)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{u}_2|\mathbf{v}_3)\mathbf{u}_2$$

e quindi

$$\mathbf{u}_3 = \frac{\mathbf{v'}_3}{(\mathbf{v'}_3|\mathbf{v'}_3)} = [\frac{1}{\sqrt{3\left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}} \quad \frac{1}{2}\sqrt{2-\frac{2}{\sqrt{3}}} \quad -\frac{1}{\sqrt{3\left(2-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)}}]$$

Una base richiesta è $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$.

E3) Si dica per quali valori del parametro $\beta \in \mathbf{C}$ la matrice

$$\mathbf{B}_\beta = \begin{bmatrix} \beta & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -2\beta & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

è diagonalizzabile e per uno di questi valori si calcoli una base di $\mathbf{C}^4$ formata da autovettori della matrice.

Sol) Il polionomio caratteristico della matrice $\mathbf{B}_\beta$ è

$$p_{\mathbf{B}_\beta}(t) = 4t - 2t^2 - 2t^3 + t^4 - 4t\beta + 4t^2\beta - t^3\beta$$

Gli autovalori sono

$$t_1 = 2, \quad t_2 = 0, \quad t_3 = \frac{\beta - \sqrt{\beta^2 - 8\beta + 8}}{2}, \quad t_4 = \frac{\beta + \sqrt{\beta^2 - 8\beta + 8}}{2}$$

Se $\frac{\beta-\sqrt{\beta^2-8\beta+8}}{2} \neq 0,2$ e $\frac{\beta+\sqrt{\beta^2-8\beta+8}}{2} \neq 0,2$, cioè se $\beta \neq 1$ allora la matrice $\mathbf{B}_\beta$ ammette 4 autovalori distinti e quindi è diagonalizzabile.

Se $\beta = 1$ allora gli autovalori sono $t_1 = 2$, $t_2 = 0$, $t_3 = 0$, $t_4 = 1$, quindi $_1$ è diagonalizzabile se e solo se la molteplicità geometrica relativa all'autovalore 0 è 2. Ora $m_g(0) = 1 = rank V_0$, per cui la matrice $\mathbf{B}_1$ non è diagonalizzabile.

Per $\beta \neq 1$ calcoliamo una base di $\mathbf{C}^4$ formata da autovettori. Calcoliamo i generatori degli autospazi nel caso in cui $\beta = 0$, risolvendo i sistemi lineari

$$\mathbf{B}_0\mathbf{v}_i = t_i\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \ldots, 4$$

con $\mathbf{v}_i \in \mathbf{C}^4$, per ogni i. Una base di autovettori è quindi data da:

$$\left\{\mathbf{v}_1 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T, \mathbf{v}_2 = [-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 1]^T, \mathbf{v}_3 = [-\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad 0 \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 1]^T, \mathbf{v}_4 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T\right\}$$

E4) Si consideri la conica di equazione $13x^2 - 10xy + 13y^2 - 36x + 2\alpha y - 36 = 0$. Si calcoli per quali valori di α essa è degenere e si trovino le rette in cui si spezza.

Posto $\alpha = 18$, si determini la natura della conica e se ne calcolino gli eventuali assi, centro, vertici e asintoti.

Sol) La matrice associata alla conica è

$$\mathbf{D}_\alpha = \begin{bmatrix} 13 & -5 & -18 \\ -5 & 13 & -\alpha \\ -18 & -\alpha & -36 \end{bmatrix}$$

La conica si spezza in due rette se il rango della matrice $\mathbf{D}_\alpha$ è 2. Il determinante di $\mathbf{D}_\alpha$ è $-13\alpha^2 - 180\alpha - 9396$ e, dal momento che il discriminante di tale trinomio di secondo grado in α è negativo, la conica non si spezza in due rette reali.

Sia ora $\alpha = 18$. Il rango di $\mathbf{D}_{18}$ è 3, quindi la conica associata è non-degenere e poiché $\mathbf{D}_{33}$[1] ha rango due la conica è a centro. Inoltre, poichè gli autovalori di $\mathbf{D}_{33}$ sono positivi (vedi oltre), la conica è un'ellisse. Il centro della conica è dato dalla soluzione del sistema $\mathbf{D}_{33}[x \quad y]^T = -[d_{13} \quad d_{23}]^T$. Cioè il centro della conica è dato dalla soluzione (che è unica poiché $rank\,\mathbf{D}_{33}$ è due) del sistema

$$\begin{cases} 13x - 5y = 18 \\ -5x + 13y = 18 \end{cases}$$

[1] $\mathbf{D}_{33}$ è il minore relativo a d_{33}.

Quindi il centro è $C = \left(\frac{9}{4}, \frac{9}{4}\right)$. Gli autovalori della matrice $\mathbf{D}_{33}$ sono 18 e 8. I rispettivi autovettori $[-1,1]^T$ e $[1,1]^T$ sono le direzioni degli assi, ovvero i i punti $[-1,1,0]$ e $[1,1,0]$ della retta improria. Quindi gli assi dell'ellisse sono

$$h_1 : \ y = x$$
$$h_2 : \ y = -x + \frac{9}{2}$$

Le coordinate dei vertici, date dall'intersezione degli assi con l'ellisse, sono rispettivamente

$$\left(\frac{3}{4}(3-\sqrt{13}), \frac{3}{4}(3-\sqrt{13})\right), \quad \left(\frac{9}{4}+\frac{3\sqrt{13}}{4}), \frac{3}{4}(3+\sqrt{13})\right)$$

e

$$\left(\frac{1}{4}(9-2\sqrt{13}), \frac{1}{4}(9+2\sqrt{13})\right), \quad \left(\frac{1}{4}(9+2\sqrt{13}), \frac{1}{4}(9-\sqrt{13})\right)$$