

2. RELAZIONI.

Nel linguaggio comune parliamo spesso di relazioni. Chiamiamo relazione quella tra genitori e figli, quella tra marito e moglie, quella tra i numeri naturali quando uno precede un altro (relazione d'ordine), eccetera.

Da un punto di vista matematico non interessa il motivo per cui certi individui sono in relazione con altri, ma piuttosto si vuole registrare con precisione chi è in relazione con chi. Così, se consideriamo la relazione genitori figli, da un punto di vista matematico non interessa sapere se un certo genitore è soddisfatto di un figlio, se i loro rapporti sono di piena confidenza o se sono tesi, ma si vuol sapere, considerati due individui, se il primo è genitore del secondo oppure no. In altri termini, ci interessa conoscere quali sono le coppie ordinate di individui in cui il primo elemento è genitore del secondo elemento. La conoscenza di tutte le coppie ordinate il cui primo elemento sia il genitore del secondo elemento, riporta esaurientemente le informazioni che ci interessano su chi è in quella relazione con chi, indipendentemente dalle motivazioni o dagli apprezzamenti sull'opportunità che certi individui siano nella relazione considerata o dagli stati d'animo di coloro che sono coinvolti nella relazione.

Perciò, in matematica, chiamiamo relazione un insieme di coppie ordinate. Considerare questo insieme di coppie ordinate dice tutto ciò che si vuol sapere della relazione dal punto di vista matematico.

Gli elementi che possono occorrere come primi nelle coppie ordinate di una certa relazione possono appartenere ad un insieme, diciamolo A , a volte sottinteso, ed analogamente gli elementi che possono occorrere come secondi nelle coppie ordinate di quella relazione possono appartenere ad un insieme, diciamolo B , non necessariamente lo stesso, ancora a volte sottinteso.

Osserviamo subito che in tale caso la relazione è un sottinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

Un insieme che contiene i primi elementi delle coppie ordinate di una relazione è detto primo insieme della relazione, mentre un insieme che contiene i secondi elementi delle coppie ordinate che appartengono ad una relazione è detto secondo insieme della relazione. Notiamo che il primo insieme e il secondo insieme di una relazione non sono individuati dalla relazione stessa e possono essere scelti ad arbitrio purché il primo insieme abbia tra i suoi elementi i primi elementi delle coppie ordinate che appartengono alla relazione, e il secondo insieme abbia tra i suoi elementi i secondi elementi delle coppie ordinate che appartengono alla relazione.

Per indicare la scelta del primo insieme e del secondo insieme, oltre alla scelta della relazione, si considera la terna ordinata il cui primo elemento è il primo insieme, il secondo elemento è il secondo insieme, e il terzo elemento è la relazione che, come abbiamo già osservato, è un sottinsieme del prodotto cartesiano del primo insieme per il secondo insieme.

Se A è il primo insieme scelto e B il secondo insieme scelto e R indica la relazione, allora la terna ordinata che raccoglie queste informazioni è (A, B, R) , e si usa dire che R è una relazione da A in B . Si noti la differenza tra il concetto di *relazione* (un insieme di coppie ordinate) e il concetto di *relazione da un insieme ad un altro* (una terna ordinata il cui primo elemento è il primo insieme, il secondo elemento è il secondo insieme, e il terzo elemento è una relazione nel senso precedente).

Può capitare che il primo insieme e il secondo insieme siano lo stesso insieme, cioè si ha a che fare con una relazione da un insieme A ad un insieme A . In tal caso si dice che si ha una relazione su A . Si noti che si può sempre fare in modo che il primo e il secondo insieme coincidano scegliendo per essi un insieme che contenga l'unione tra dominio e codominio della relazione. Ciò diventa particolarmente semplice quando il dominio della relazione contiene il codominio della stessa relazione oppure quando il dominio è contenuto nel codominio.

Riprendendo l'esempio della relazione genitori figli sopra considerata il primo insieme può essere l'insieme degli esseri viventi e il secondo insieme può essere ancora l'insieme degli esseri viventi; questa relazione è una relazione dall'insieme degli esseri viventi nell'insieme degli esseri viventi ed è un sottinsieme del prodotto cartesiano dell'insieme degli esseri viventi per sé stesso. Le coppie ordinate di esseri viventi in cui il primo ele-

mento è il genitore del secondo sono coppie che appartengono alla relazione e, in questo caso, non sono tutte le coppie ordinate di esseri viventi. Anzi le coppie ordinate di esseri viventi che non appartengono alla relazione ci indicano proprio quando l'essere vivente che occorre al primo posto in una tale coppia ordinata non è il genitore dell'essere vivente che è secondo elemento di quella coppia ordinata.

Analogamente, la relazione d'ordine tra numeri naturali sarà il seguente insieme: $\{(m,n): n \text{ e } m \text{ sono numeri naturali e, partendo da } 0 \text{ e continuando a passare al successore, si arriva ad } m \text{ prima che ad } n\}$.

Se il simbolo R indica una relazione, spesso, invece di scrivere $(a,b) \in R$ per dire che la coppia ordinata (a,b) appartiene alla relazione considerata, scriveremo aRb . Analogamente, diremo anche che l'elemento a è nella relazione R con l'elemento b , per dire che la coppia ordinata (a,b) appartiene alla relazione R . In tal caso diremo anche che b corrisponde ad a nella relazione R .

Dicesi dominio di una relazione l'insieme costituito da tutti gli elementi che hanno corrispondente nella relazione: cioè il dominio della relazione R , che si indica con $\text{dom}(R)$, è $\{x : \text{esiste } y \text{ tale che } (x,y) \in R\}$.

Se R è una relazione da A in B e il dominio D della relazione R è sicuramente un sottoinsieme del primo insieme A . Se poi D è uguale all'insieme A , allora diciamo che la relazione R è totale in A , o, più semplicemente, che è totale se è chiaro dal contesto qual'è l'insieme A . Notiamo che, mentre il dominio dipende solo dalla relazione, la totalità non si riferisce esclusivamente alla relazione, ma stabilisce un legame tra la relazione ed un suo primo insieme: pertanto ha senso parlare di totalità solo rispetto alla nozione di relazione da un insieme ad un altro.

Dicesi codominio di una relazione l'insieme costituito da tutti gli elementi che corrispondono a qualcosa nella relazione, cioè il codominio della relazione R , che si indica con $\text{cod}(R)$, è l'insieme $\{y : \text{esiste } x \text{ tale che } (x,y) \in R\}$.

Se R è una relazione da A in B , il codominio C della relazione R è sicuramente un sottoinsieme del secondo insieme. Se poi C è uguale all'insieme B , allora diciamo che la relazione R è suriettiva su B , o, più semplicemente, che è suriettiva se è chiaro dal contesto qual'è l'insieme B . Notiamo ancora che, mentre il codominio dipende solo dalla relazione, la suriettività non si riferisce esclusivamente alla relazione, ma stabilisce un legame tra la relazione ed un suo secondo insieme: pertanto ha senso parlare di suriettività solo rispetto alla nozione di relazione da un insieme ad un altro.

Riprendendo l'esempio della relazione genitori figli, possiamo considerare come primo insieme l'insieme degli esseri viventi, che non coincide con il dominio, essendo questo costituito da tutti gli esseri viventi che hanno figli (e ce ne sono che non ne hanno). Pertanto la relazione non è totale nell'insieme degli esseri viventi, ma lo è nell'insieme dei genitori se prendiamo quest'ultimo come primo insieme. Il codominio ha per elementi tutti gli esseri viventi che sono figli, ed esclude dunque il primo essere vivente. Dunque questa relazione non è suriettiva sull'insieme degli esseri viventi, ma lo è sull'insieme dei figli se prendiamo questo come secondo insieme.

Consideriamo altri esempi di relazioni. Uno può essere il seguente: la relazione, chiamiamola A_r , i cui elementi sono le coppie ordinate di figure geometriche che hanno ugual area. Un altro esempio può essere il seguente: la relazione, chiamiamola M , i cui elementi sono le coppie ordinate di prodotti su un mercato che hanno lo stesso prezzo. Ed ecco un terzo esempio: la relazione, chiamiamola I_d , i cui elementi sono le coppie ordinate di numeri naturali il cui primo elemento è uguale al secondo.

Pur essendo relazioni diverse, hanno alcune proprietà in comune, vediamone alcune che ci interessano.

Notiamo subito che queste relazioni possono essere considerate in modo naturale relazioni da un insieme ad un altro scegliendo il dominio come primo insieme e il codominio come secondo insieme. Con questa scelta le relazioni dal primo al secondo insieme sono sia totali che suriettive. Si osservi, inoltre, che così, nei casi considerati, il primo insieme coincide con il secondo, e dunque si stanno considerando relazioni su A .

Una prima proprietà di cui godono le tre relazioni è la seguente: dato un qualsiasi elemento del dominio della relazione, la coppia ordinata che ha quell'elemento del dominio sia come primo che come secondo elemento della coppia appartiene alla relazione. Dia-

mo il nome di riflessività a questa proprietà e chiamiamo riflessive le relazioni che godono di questa proprietà.

Un'altra proprietà di cui godono le tre relazioni è la seguente: se una coppia ordinata, sia (a,b) , appartiene alla relazione, allora anche la coppia ordinata che ha gli stessi elementi ma considerati nell'ordine inverso, (b,a) , appartiene alla relazione. Diamo il nome di simmetria a questa proprietà e chiamiamo simmetriche le relazioni che godono di questa proprietà.

Una terza proprietà è la seguente: Se una coppia ordinata (a,b) appartiene alla relazione, ed anche la coppia ordinata (b,c) che ha per primo elemento il secondo elemento della coppia prima considerata appartiene alla relazione, allora anche la coppia ordinata (a,c) che ha per primo elemento il primo elemento della prima coppia e per secondo elemento il secondo della seconda coppia appartiene alla relazione. Diamo il nome di transitività a questa proprietà e chiamiamo transitive le relazioni che godono di questa proprietà.

Le relazioni su un certo insieme che, come quelle considerate negli ultimi tre esempi, sono sia riflessive che simmetriche che transitive, vengono dette relazioni di equivalenza. Nel seguito avremo più volte occasione di considerare relazioni di equivalenza.

E' importante osservare quando una relazione è di equivalenza perché, in tal caso, possiamo suddividere, ripartire il dominio in sottinsiemi disgiunti, detti classi di equivalenza, la cui unione è uguale al dominio stesso nel modo seguente; l'insieme delle classi di equivalenza è detto una partizione del dominio. Per ogni elemento x del dominio D della relazione R si consideri l'insieme $S_x = \{u: (x,u) \in R\}$, questa è una classe di equivalenza. Detto altrimenti, S_x è l'insieme degli elementi corrispondenti ad x nella relazione R . Poiché la relazione è totale, per ogni x appartenente a D , S_x è un sottinsieme di D . Osserviamo anche che per ogni $x \in D$, $x \in S_x$, perché la relazione è riflessiva, cioè $(x,x) \in R$.

Consideriamo ora due elementi x e y appartenenti a D tra loro diversi, e le classi S_x e S_y . Facciamo vedere che o $S_x = S_y$ o $S_x \cap S_y = \emptyset$. Se $S_x \cap S_y = \emptyset$ siamo a posto, altrimenti $S_x \cap S_y \neq \emptyset$, e, in tal caso sia t un elemento di $S_x \cap S_y$. Per definizione t corrisponde sia a x sia a y nella relazione R , cioè sia $(x,t) \in R$ che $(y,t) \in R$. Poiché R è simmetrica, anche $(t,y) \in R$, e, per la transitività di R , siccome sia $(x,t) \in R$ che $(t,y) \in R$, allora anche $(x,y) \in R$, cioè x e y sono nella stessa classe di equivalenza. Sia ora v un qualsiasi elemento di S_x , cioè $(x,v) \in R$, allora anche $(v,x) \in R$ (per la simmetria), ed anche $(v,y) \in R$ (per la transitività), ed ancora $(y,v) \in R$ (per la simmetria), sicché v è anche elemento di S_y e $S_x \subset S_y$. Analogamente si vede che $S_y \subset S_x$, e dunque $S_x = S_y$. Così si può concludere che se $S_x \cap S_y \neq \emptyset$ allora $S_x = S_y$, detto altrimenti due classi di equivalenza o coincidono o sono disgiunte.

Mostriamo infine che l'unione delle classi di equivalenza è proprio il dominio D . L'unione delle classi di equivalenza è l'insieme $\cup \{S_x: x \in D\}$. Poiché $S_x \subset D$ per ogni $x \in D$, allora anche l'unione di questi insiemi è contenuta in D , cioè $\cup \{S_x: x \in D\} \subset D$. D'altra parte ogni elemento x di D appartiene a S_x e dunque $D \subset \cup \{S_x: x \in D\}$. E allora $\cup \{S_x: x \in D\} = D$, come si voleva far vedere.

Dimostriamo ora che, viceversa, data una partizione P di un insieme T , la relazione R su quell'insieme costituita dalle coppie ordinate di elementi che stanno nella stessa classe di equivalenza (cioè $R = \{(a,b): a \text{ e } b \text{ appartengono alla stessa classe di equivalenza della partizione } P\}$), è una relazione di equivalenza. Infatti, banalmente, ogni elemento x è nella stessa classe di equivalenza in cui si trova l'elemento stesso, cioè $(x,x) \in R$ per ogni $x \in T$, e così la relazione è riflessiva. Inoltre se un elemento x è nella stessa classe di equivalenza dell'elemento y , allora anche l'elemento y è nella stessa classe di equivalenza dell'elemento x , cioè se $(x,y) \in R$ allora anche $(y,x) \in R$, e la relazione è simmetrica. Poi se un elemento x è nella stessa classe di equivalenza dell'elemento y , e questo è nella stessa classe di equivalenza dell'elemento z , allora anche l'elemento x è nella stessa classe di equivalenza dell'elemento z , cioè se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R$ allora anche $(x,z) \in R$, e la relazione è transitiva. Essendo sia riflessiva che simmetrica che transitiva, la relazione R è una relazione di equivalenza, come volevamo far vedere.

Si noti che se da una relazione di equivalenza passiamo alla partizione sul suo dominio nel modo sopra indicato e, poi, da questa partizione passiamo alla relazione di equivalenza degli elementi che stanno nella stessa classe di equivalenza, riotteniamo la relazio-

ne di partenza. Detto altrimenti, data una relazione di equivalenza R , se P è la partizione $\{S_x: S_x = \{u: (x,u) \in R\} \text{ e } x \in \text{dom}(R)\}$ e R' è la relazione $\{(a,b): a \text{ e } b \text{ appartengono alla stessa classe di equivalenza della partizione } P\}$, allora $R=R'$. Analogamente, data una partizione P , se R è la relazione $\{(a,b): a \text{ e } b \text{ appartengono alla stessa classe di equivalenza della partizione } P\}$ e P' è la partizione $\{S_x: S_x = \{u: (x,u) \in R\} \text{ e } x \in \text{dom}(R)\}$, allora $P=P'$.

I risultati appena ottenuti ci permettono di valutare meglio l'importanza delle relazioni di equivalenza. Infatti essi ci dicono che una relazione che sussista tra un primo elemento ed un secondo di un insieme se i due elementi hanno una certa proprietà in comune (sono uguali rispetto a una certa proprietà), ad esempio quella di avere gli stessi genitori, sono relazioni di equivalenza a cui corrisponde naturalmente la partizione dell'insieme nei sottinsiemi degli elementi che condividono quella certa proprietà (sono uguali rispetto a quella certa proprietà).

Ci sono relazioni che ci capiterà frequentemente di considerare che non sono relazioni di equivalenza.

Eccone un primo esempio. Consideriamo la seguente relazione tra numeri naturali: $R = \{(m,n): m \text{ e } n \text{ sono numeri naturali e, partendo da } 0 \text{ e continuando a passare al successore, si arriva ad } m \text{ prima che ad } n\}$, cioè l'usuale relazione d'ordine stretto tra i numeri naturali. Possiamo considerare anche la usuale relazione d'ordine stretto tra le lettere dell'alfabeto, che è una cosa diversa dalla relazione precedente. Consideriamo anche la relazione S tra i sottinsiemi di un insieme X così definita: $\{(s,t): s \subset X \text{ e } t \subset X \text{ e } s \subset t \text{ e } s \neq t\}$, cioè la relazione di inclusione propria, cioè di contenuto ma non uguale, tra i sottinsiemi di X .

Anche queste relazioni hanno delle caratteristiche comuni, vediamo alcune.

Come per le relazioni di equivalenza, possono essere considerate in modo naturale relazioni da un insieme ad un altro scegliendo l'unione tra il dominio e il codominio sia come primo insieme che come secondo insieme. Si osservi, inoltre, che così il primo insieme coincide con il secondo. Inoltre queste relazioni sono transitive. Ma, a differenza di quanto avviene nelle relazioni di equivalenza, queste relazioni non sono riflessive, anzi, ancor di più, nessun elemento del dominio è in relazione con sé stesso, cioè, per ogni elemento x del dominio della relazione, la coppia ordinata (x,x) non appartiene alla relazione.

Chiamiamo antiriflessività questa proprietà delle relazioni considerate, e diremo antiriflessiva una relazione che goda di questa proprietà, cioè una relazione R è antiriflessiva se $(x,x) \notin R$ per ogni x appartenente a $\text{dom}(R)$.

Le relazioni su di un insieme che siano antiriflessive e transitive sono dette relazioni d'ordine stretto.

Le relazioni d'ordine stretto non sono simmetriche. Infatti, se lo fossero, se la coppia ordinata (x,y) appartenesse alla relazione, anche la coppia ordinata (y,x) le apparterebbe, e così pure la coppia ordinata (x,x) , per la transitività della relazione, ma ciò contraddice l'antiriflessività della relazione.

Non tutte le relazioni d'ordine stretto godono esattamente delle stesse proprietà. Già dagli esempi proposti possiamo cogliere alcune differenze. Nella relazione d'ordine tra i numeri naturali, considerati due qualsiasi numeri naturali, o uno precede l'altro o l'altro precede il primo o sono uguali. Più in generale una relazione d'ordine stretto R può godere della seguente proprietà: per ogni due elementi x e y appartenenti all'insieme su cui la relazione è data o $(x,y) \in R$ o $(y,x) \in R$ o $x=y$.

Questa proprietà di una relazione d'ordine stretto viene detta tricotomia.

Si noti che anche la relazione d'ordine usuale tra le lettere dell'alfabeto è una relazione d'ordine stretto che gode della tricotomia, mentre la relazione di contenuto tra sottinsiemi di un certo insieme con almeno due elementi, a e b , non gode della tricotomia poiché ci sono sottinsiemi non uguali, ad esempio $\{a\}$ e $\{b\}$, tali che nessuno dei due contiene l'altro.

Una relazione d'ordine stretto che goda della tricotomia è detta totale. (Attenzione a non confondere la nozione di totalità di una relazione d'ordine con la nozione di totalità di una relazione da un insieme ad un altro quando il primo insieme coincide con il dominio). Ma l'usuale relazione d'ordine tra i numeri naturali gode anche di un'altra importante

proprietà, e precisamente la seguente: preso un qualsiasi sottinsieme del dominio c'è un elemento del sottinsieme con cui tutti gli altri elementi del sottinsieme sono in relazione, cioè, nel nostro caso, più piccolo di tutti gli altri elementi del sottinsieme. Una relazione d'ordine stretto che abbia anche questa caratteristica viene detta una relazione di buon ordine stretto.

Notiamo che anche l'usuale ordine stretto delle lettere dell'alfabeto è un buon ordine, mentre l'usuale ordine stretto dei numeri interi non è un buon ordine perché ci sono sottinsiemi, ad esempio quello dei numeri interi negativi, che non hanno un elemento più piccolo di tutti gli altri del sottinsieme.

Rispetto ad una relazione d'ordine su un insieme, non si considerano solo confronti tra singoli elementi, ma si possono precisare anche caratteristiche di certi sottinsiemi. Ad esempio il sottinsieme dei numeri naturali costituito dai numeri pari non ha un numero naturale maggiore, rispetto alla usuale relazione d'ordine, di tutti i numeri pari. Mentre per il sottinsieme dei numeri razionali compresi tra 0 e 1 ci sono numeri razionali maggiori, secondo l'usuale relazione d'ordine dei razionali, di tutti i numeri del sottinsieme.

In generale, dato un insieme X , con una relazione d'ordine R su X , e un suo sottinsieme non vuoto S , si dice che un elemento u di X è un maggiorante di S se per ogni x appartenente a S o $u=x$ o la coppia ordinata (x,u) appartiene a R . Detto altrimenti, in X rispetto ad una relazione d'ordine R , u è maggiorante di S se $u \in X$ e per ogni $x \in S$ si ha che o $x=u$ oppure $(x,u) \in R$. Nell'ultimo esempio il numero razionale 5 è un maggiorante del sottinsieme che era stato indicato; e così pure 1 e 250. Si vede immediatamente che non è detto che ci sia un unico maggiorante; addirittura possono esserci insiemi senza maggioranti, come illustrato dall'esempio del sottinsieme dei numeri pari.

Simmetricamente, dato un insieme X , con una relazione d'ordine R su X , e un suo sottinsieme non vuoto S , si dice che un elemento t di X è un minorante di S se per ogni x appartenente a S o $x=t$ o la coppia ordinata (t,x) appartiene a R . Detto altrimenti, in X rispetto ad una relazione d'ordine R , t è minorante di S se $t \in X$ e per ogni $x \in S$ si ha che o $x=t$ oppure $(t,x) \in R$. Anche il minorante per alcuni sottinsiemi può non esserci, e, se c'è, in generale non è unico.

Un insieme non vuoto che ha maggioranti si dice superiormente limitato, mentre un insieme non vuoto che ha minoranti si dice inferiormente limitato, ed infine un insieme non vuoto che ha sia maggioranti che minoranti si dice limitato.

In un insieme X , con una relazione d'ordine R su X , dato un suo sottinsieme non vuoto S , si dice che un elemento M di S è massimale per S se in S non ci sono elementi maggiori di M , cioè per ogni x appartenente a S la coppia ordinata (M,x) non appartiene a R . Detto altrimenti, M è massimale di S in X rispetto ad una relazione d'ordine R se $M \in S$ e per ogni $x \in S$ si ha che $(M,x) \notin R$. Si noti che $(M,x) \notin R$ non vuol necessariamente dire che allora $(x,M) \in R$, poiché potrebbe essere x non confrontabile con M .

Analogamente, in un insieme X , con una relazione d'ordine R su X , dato un suo sottinsieme non vuoto S , si dice che un elemento m di S è minimale per S se in S non ci sono elementi minori di m , cioè per ogni x appartenente a S la coppia ordinata (x,m) non appartiene a R . Detto altrimenti, m è minimale di S in X rispetto ad una relazione d'ordine R se $m \in S$ e per ogni $x \in S$ si ha che $(x,m) \notin R$. Si noti che $(x,m) \notin R$ non vuol necessariamente dire che allora $(m,x) \in R$, poiché potrebbe essere x non confrontabile con m .

Sempre in un insieme X , con una relazione d'ordine R su X , dato un suo sottinsieme non vuoto S , si dice che un elemento M di S è massimo per S se, per ogni x appartenente a S e diverso da M , la coppia ordinata (x,M) appartiene a R . Detto altrimenti, in X rispetto ad una relazione d'ordine R , M è il massimo di S se $M \in S$ e per ogni $x \in S$ e $x \neq M$ si ha che $(x,M) \in R$. Non è detto che un sottinsieme abbia massimo (ad esempio quello dei numeri pari nel caso considerato precedentemente), ma se c'è massimo, allora questo è unico.

Analogamente, in un insieme X , con una relazione d'ordine R su X , dato un suo sottinsieme non vuoto S , si dice che un elemento m di S è minimo per S se, per ogni x appartenente a S e diverso da m , la coppia ordinata (m,x) appartiene a R . Detto altrimenti, in X rispetto ad una relazione d'ordine R , m è il minimo di S se $m \in S$ e per ogni $x \in S$ e $x \neq m$ si ha che $(m,x) \in R$. Non è detto che un sottinsieme abbia minimo (ad esempio quello dei numeri razionali strettamente maggiori di zero come sottinsieme dei

numero razionali rispetto alla usuale relazione d'ordine), ma se c'è minimo, allora questo è unico.

E' opportuno estendere le nozioni di maggiorante e minorante anche al caso in cui S è l'insieme vuoto. In tal caso si conviene che ogni elemento di X sia maggiorante, poiché non si trova alcun elemento del sottinsieme (che è vuoto) che impedisca ad un qualsiasi elemento di X di essere maggiorante di quel sottinsieme (vuoto), essendogli maggiore. Analogamente si conviene che ogni elemento di X sia minorante, poiché non si trova alcun elemento del sottinsieme (che è vuoto) che impedisca ad un qualsiasi elemento di X di essere minorante di quel sottinsieme (vuoto), essendogli minore.

Si noti, però, che il sottinsieme vuoto non ha né massimo né minimo rispetto a nessuna relazione d'ordine, perché essi dovrebbero essere almeno elementi del sottinsieme, ma questo è vuoto.

Sempre in un insieme X , con una relazione d'ordine R su X , dato un suo sottinsieme S , si dice che un elemento E di X è estremo superiore di S se è il minimo dei maggioranti, mentre si dice che è estremo inferiore se è il massimo dei minoranti. E' immediato dalle precedenti definizioni che un insieme non superiormente limitato non può avere estremo superiore, e che un insieme non inferiormente limitato non può avere estremo inferiore. In base a quanto convenuto su maggioranti e minoranti, l'insieme vuoto ha per estremo superiore il minimo dell'insieme X , se questo esiste, e per estremo inferiore il massimo dell'insieme X , ancora se questo esiste.

Esercizio. Si costruiscano esempi delle nozioni introdotte, che illustrino i vari casi possibili e loro combinazioni.

Spesso si considera la relazione minore od uguale, ad esempio tra numeri naturali, cioè la relazione $\{(m,n): n \text{ e } m \text{ sono numeri naturali e, partendo da } 0 \text{ e continuando a passare al successore, si arriva ad } m \text{ prima che ad } n \text{ o contemporaneamente}\}$. Questa non è una relazione d'ordine stretto perché è riflessiva e non antiriflessiva. Ma oltre ad essere una relazione sul suo dominio che è sia riflessiva che transitiva, questa relazione gode anche della seguente proprietà: se la coppia ordinata (a,b) e la coppia ordinata (b,a) entrambe appartengono alla relazione, allora $a=b$. Detto altrimenti se a è in relazione con b e b è in relazione con a allora a e b sono uguali. Questa proprietà di una relazione si chiama antisimmetria, e diremo relazioni antisimmetriche quelle che godono della proprietà antisimmetrica.

Chiameremo relazione d'ordine una relazione su un insieme che sia riflessiva antisimmetrica e transitiva.

Tra le nozioni di relazione d'ordine stretto e relazione d'ordine c'è un forte legame precisato dalle seguenti osservazioni.

Sia R una relazione d'ordine su un insieme A . Consideriamo la relazione $R'=\{(a,b): (a,b) \in R \text{ e } a \neq b\}$. R' è una relazione d'ordine stretto inclusa in R . Viceversa, se R è una relazione d'ordine stretto, si consideri la relazione $R'=\{(a,b): (a,b) \in R \text{ oppure } a=b\}$. R' è una relazione d'ordine che include R . Non solo, se si passa nei modi descritti da una relazione d'ordine ad una relazione d'ordine stretto e da questa ad una relazione d'ordine si riottiene la relazione di partenza; e, analogamente, se si passa nei modi descritti da una relazione d'ordine stretto ad una relazione d'ordine e da questa ad una relazione d'ordine stretto si riottiene la relazione di partenza.

Nelle considerazioni fin qui svolte, si sono considerate solo relazioni i cui elementi sono coppie ordinate di individui. Ma, spesso ci si trova di fronte a relazioni che legano tra loro più di due individui. Ad esempio essere un certo punto sulla superficie terrestre è una relazione che lega tra loro tre elementi: la longitudine, la latitudine e l'altezza di quel punto. Così, anche se, per semplicità, abbiamo chiamato relazioni quelle considerate finora, più propriamente avremmo dovuto chiamarle relazioni binarie per indicare che ad esse appartengono coppie ordinate di elementi.

Il numero degli elementi che sono legati tra loro in una relazione viene detto l'arietà di quella relazione. Così le relazioni binarie hanno arietà due, la relazione tra longitudine, latitudine ed altezza che è quella di indicare un punto sulla superficie terrestre ha arietà tre, o, come si dice usualmente, è ternaria, e in generale una relazione costituita da n -uple ordinate di elementi ha arietà n , o, come si usa dire, è n -aria.

Si noti che n può essere anche 1: in tal caso la relazione si dice unaria ed è un insieme di 1-uple ordinate cioè di elementi, come abbiamo convenuto, sicché una relazione unaria è un insieme. Spesso una relazione unaria viene detta una proprietà. Come esempio di relazione unaria si può considerare la relazione essere numero naturale pari. E' ovvio che il soggetto di cui si può dire che è pari è un solo elemento, sicché la relazione è proprio unaria, e che gli elementi pari costituiscono un insieme.

Anche per le relazioni di arietà n , con n un qualsiasi numero naturale, si possono introdurre varie nozioni analoghe a quelle viste per le relazioni binarie.

Corrispondentemente alla nozione di relazione da un insieme ad un altro si avrà la nozione di relazione n -aria tra gli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$. Questa sarà una $(n+1)$ -upla ordinata $(A_1, A_2, \dots, A_n, R)$ in cui $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono insiemi e R è una relazione, nel senso già introdotto di insieme di n -uple ordinate, tale che gli elementi che sono primo elemento di n -uple ordinate appartenenti ad R appartengono ad A_1 , quelli che sono secondo elemento di n -uple ordinate appartenenti ad R appartengono ad A_2 , e così via fino a dire che quelli che sono n -esimo elemento di n -uple ordinate appartenenti ad R appartengono ad A_n . Si noti che la relazione è un sottinsieme del prodotto cartesiano degli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$, cioè $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \supset R$.

Se gli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$ sono tutti uguali ad un insieme A , la relazione n -aria tra gli insiemi $A_1, A_2, \dots, A_n$ viene detta una relazione n -aria su A .

Ancora possiamo parlare di dominio, ma questa volta dovremo dire primo dominio l'insieme $\{x_1 : \text{esistono } x_2, \dots, x_n \text{ tali che } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R\}$, secondo dominio l'insieme $\{x_2 : \text{esistono } x_1, x_3, \dots, x_n \text{ tali che } (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R\}$, e così via fino a n -esimo dominio che sarà l'insieme $\{x_n : \text{esistono } x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \text{ tali che } (x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \in R\}$. E' chiaro che rispetto alla nozione di relazione n -aria tra insiemi si avrà che l' i -esimo dominio ($i=1, 2, \dots, n$) è un sottinsieme dell' i -esimo degli insiemi della relazione tra insiemi. Se l' i -esimo dominio ($i=1, 2, \dots, n$) è uguale all' i -esimo insieme della relazione n -aria diremo che la relazione è totale nell' i -esima componente. Anche ora, mentre la nozione di i -esimo dominio ($i=1, 2, \dots, n$) si può introdurre rispetto alla nozione di relazione n -aria, la nozione di totale si riferisce solo alla nozione di relazione n -aria tra insiemi.