Esercizi sulle disequazioni

1 Disequazioni razionali fratte

Esempio 1. *Risolviamo la seguente disequazione razionale fratta:*

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - 4} \geq 0 \tag{1}$$

Scomponiamo il numeratore. Il discriminante è: $\Delta = 9 - 8 = 1 > 0$, *quindi il numeratore ammette due radici reali distinte:*

$$x_{1,2} = \frac{31}{4}$$

e quindi $2x^2 - 3x + 1 = (x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ *Il denominatore si scompone immediatamente:*

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

Per cui 1 si riscrive:

$$\frac{(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{(x-2)(x+2)} \geq 0$$

Effettuiamo ora lo studio del segno dell'ultima espressione.

La soluzione quindi è:

$$\mathcal{S} = \left\{x > 2 \cup \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \cup x < 2\right\}$$

Esempio 2.

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - x + 1} \leq 0 \tag{2}$$

(**N**) *La scomposizione è semplice* $x^2 + 5x + 4 = (x+1)(x+4)$

(**D**) *Il discriminante è* $\Delta = -3$, *quindi il denominatore non ammette radici reali.*

Quindi la 2 diviene:

$$\frac{(x+1)(x+4)}{x^2 - x + 1} \leq 0$$

Effettuiamo ora lo studio del segno dell'ultima espressione.

La soluzione quindi è:

$$\mathcal{S} = \{-5 \leq x \leq -1\}$$

Esercizio 1.

$$
\begin{aligned}
\frac{4x^2+3x-1}{3x^2-4} &\leq 0 \\
\frac{3x^2+5x+2}{2x^2-x+2} &\leq 0 \\
\frac{2x^2-3x+1}{x^2-7x+6} > 0 \frac{x^2-5x+5}{9-x^2} &< 0 \\
\frac{2x-1}{x-3} \leq \frac{x+1}{x-1} \frac{7x-4}{x^2-4} - \frac{2}{x-2} &< \frac{7}{x+2} \\
\frac{x^3+x^2}{3} + \frac{x^2}{x+3} < x^3 &- \frac{x^2}{3x+9} \\
x(x-2) &< \frac{9-x}{x_1} \\
\frac{x^3-x^2}{x^2-3x+2} &> 0 \\
\frac{x^2-4x+1}{-x^2+12x-3} &> 0 \\
\frac{x^2-3x-4}{x^2} &< 0
\end{aligned}
$$

2 Disequazioni con i moduli

Esempio 3.

$$ \tag{3} $$

Esercizio 2.

$$
\begin{aligned}
\frac{|x-2|+|x+3|}{x^2-3x+1} &< 0 \\
\frac{|3x^2+2x^2-2|}{x^2-4} - 1 &\leq 0 \\
\left|\frac{x-1}{2+x}\right| &> \frac{1}{2} \\
\frac{3-|x+1|}{|2-x|-4} &\leq 0 \\
\frac{x^2+|x-2|}{x^2-|x+2|} &> 0 \\
\left|\frac{2x-1}{1-x}\right| &< 1 \\
x^2-3|x|+2 &> 0 \\
|\sin x| + |\cos x| &\leq 1 \\
|\sin x| - |\cos x| &\geq 0 \\
|x^2-3x+2| &\geq \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

3 Disequazioni irrazionali

Esempio 4.

$$\sqrt{x^2-x} - x + 1 < 0 \tag{4}$$

Condizioni di esistenza:

$$
\begin{aligned}
C.E. &= \{x^2 - x \leq 0\} \\
&= \left\{ x \leq 0 \cup x \geq \frac{1}{2} \right\}
\end{aligned}
$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - x < x^2 - 2x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x^2 + x - 1 < 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Osserviamo che $\frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$ *per cui tale sistema risulta imposibile e quindi 4 non è mai verificata.*

Esercizio 3.

$$\sqrt{2x^2 - 5x + 2} > 3x^2 - x - 1$$
$$\sqrt{|x^2 - 7x + 10|} - 3x - 1 > x^2$$
$$\frac{\sqrt{x^2 - 3x - 4}}{x^2 - 1} \leq 1$$
$$\sqrt{x} + x - 3 > 0$$
$$x^4 - 1 > \sqrt{-2x - x^4}$$
$$2x - 1 < \sqrt{1 - x^2}$$
$$\sqrt{1 + x^2} = |x|$$
$$\sqrt{2x - 1} < \sqrt{1 - x^2}$$
$$|\sqrt{x} - x| \leq 1$$

4 Disequazioni coi logaritmi

Esempio 5.

$$\ln(x^2 - 5x + 6) \geq 1 \tag{5}$$
$$C.E. = \{x^2 - 5x + 6 \leq 0\}$$
$$= \{x < 2 \cup x > 3\}$$

La 5 la si può riscrivere come:

$$\ln(x^2 - 5x + 6) \geq \ln(e)$$

quest'ultima è vera se e solo se è vera la disuguaglianza tra gli argomenti:

$$x^2 - 5x + 6 \geq e$$
$$x^2 - 5x + 6 - e \geq 0$$

Il discriminante è $\Delta = 25 - 24 + 4e$, *quindi*

$$\left(x - \frac{5 - \sqrt{1 + 4e}}{2}\right)\left(x - \frac{5 + \sqrt{1 + 4e}}{2}\right) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x < \frac{5 - \sqrt{1 + 4e}}{2} \cap x > \frac{5 + \sqrt{1 + 4e}}{2}$$

Infine vediamo quali soluzioni sono accettabili intersecando con le condizioni di esistenza.
Si ha che $\mathcal{S} = \left\{x < \frac{5-\sqrt{1+4e}}{2} \cap x > \frac{5+\sqrt{1+4e}}{2}\right\}$

Esercizio 4.

$$\log_2(x^2 - 5x + 3) < 0$$
$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{1 + x^2}\right) < 1$$
$$\frac{1}{2}\log(3x + 5) + \frac{1}{2}\log x = 1$$
$$\frac{\log x + 5}{\log x + 2} - \frac{2}{5}(\log x + 5) = -\frac{2}{5}$$

5 Disequazioni con gli esponenziali

Esempio 6.

$$5^{2x-4} - 5^{x-1} - 12 > 0 \tag{6}$$

Si noti che la 6 si può riscrivere come:

$$\left(5^{x-2}\right)^2 - 5^{x-1+1-1} - 12 > 0$$
$$\left(5^{x-2}\right)^2 - 5\,5^{x-2} - 12 > 0$$

Ora poniamo $t = 5^{x-2}$*, da cui si ottiene:*

$$t^2 - 5t - 12 < 0$$

Il discriminante è $\Delta = 25 + 48 = 73 > 0$ *e quindi*

$$\left(t - \frac{5-\sqrt{73}}{2}\right)\left(t - \frac{5+\sqrt{73}}{2}\right) \geq 0$$
$$\Leftrightarrow t < \frac{5-\sqrt{73}}{2} \cup t > \frac{5+\sqrt{73}}{2}$$

Tornando alla variabile x*, la soluzione è:* $^{x-2} < \frac{5-\sqrt{73}}{2} \cup 5^{x-2} > \frac{5+\sqrt{73}}{2}$ *La prima disuguaglianza non è mai verificata, da momento che* $\frac{5-\sqrt{73}}{2} < 0$*; la seconda è invece accettabile. Prendiamo il logaritmo in base 5 di ambo i membri della seconda, ottenendo:*

$$\log_5(5^{x-2}) > \log_5\left(\frac{5+\sqrt{73}}{2}\right)$$

cioè $\mathcal{S} = \left\{x > \log_5\left(\frac{5+\sqrt{73}}{2}\right) + 2\right\}$

Esercizio 5.

$$3^{2x-4} - 4 \cdot 3^{x-2} + 3 > 0$$
$$4^{x+1} \cdot 8^{2x-3} < \frac{2^{1+x}}{16}$$
$$\left(3^{x+1}\right)^{x-2} \cdot 9^{3x+2} > 81^{x+2}$$
$$x^2 \cdot 2^{x+1} + 2^{|x-3|+2} \geq x^2 \cdot 2^{|x-3|+4} + 2^{x-1}$$

6 Esercizi di ricapitolazione

Esercizio 6.

$$\Big|\frac{x-3}{2x+1}\Big| \geq \frac{1}{2}$$
$$|x+3| - |x-1| \leq 0$$
$$x^4 - 6x^2 + 8 < 0$$
$$x^3 + x^2 - 2 < 0$$
$$\frac{1}{2x} + |2x-1| < 2$$
$$|\cos x| < \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Big|\frac{|x|-3}{x-3}\Big| < 2$$
$$1 + \sqrt{2(\ln x)^2 + 3\ln x - 2} > \ln x$$
$$2^{1+x^2} \log(1+x^2) < 2^{10}$$
$$|x-1| \leq x^2 - 3$$
$$|x^2 - 3x - 2| < x + 1$$
$$|x|^3 - 2x(1+|x|) < 0$$
$$\sqrt{x^2 - x + 1} \leq x - 1$$
$$\sqrt{x^2 - 2x + 4} \geq x - 2$$
$$\sqrt{3x - x^2 + 1} \leq 2x - 1$$
$$(x^2 + 2x)e^x \leq 0$$
$$\frac{\ln x}{x^2} > 0$$
$$\frac{x}{x+1} e^{-x} > 0$$
$$\frac{\sqrt{x^2+x} - x}{x^+ 7x + 12} \leq 0$$

Riferimenti bibliografici

[1] G. de Marco, *Analisi zero.* Decibel-Zanichelli, Padova 1981.

[2] E. Giusti *Esercizi e complementi di analisi matematica.* vol.1, Bollati Boringhieri Torino, 1994.