

Università degli studi di Verona  
Corsi di laurea in Matematica Applicata, Informatica e Informatica Multimediale  
Prova scritta di Matematica di Base — 11 dicembre 2007

matricola ..... nome ..... cognome .....

Corso di Laurea in

Scrivere subito nome, cognome e numero di matricola, indicando la sezione di corso seguita. Le soluzioni vanno trascritte solo su questi fogli, negli spazi appositamente riservati. Si può comunque usare il retro, purché sia chiaro il riferimento.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Tot

1) Si consideri la seguente relazione sull'insieme  $\mathbf{Z}$  dei numeri interi

$$R = \{ (x,y) \mid x,y \in \mathbf{Z}, x^2 - y^2 \text{ è multiplo di } 5 \}.$$

Dimostrare che  $R$  è una relazione d'equivalenza. Descrivere le seguenti classi d'equivalenza:  $[0]_R$  e  $[1]_R$  e  $[3]_R$ . Quante sono le classi d'equivalenza individuate da  $R$ ?

2) Mostrare che  $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (a, e), (a, f), (b, c), (b, d), (b, e), (b, f), (c, e), (c, f), (d, e), (d, f), (e, f)\}$  è una relazione d'ordine stretto sull'insieme  $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ . Determinare gli eventuali elementi massimali e minimali, massimo e minimo, maggioranti e minoranti, estremo superiore ed estremo inferiore del sottoinsieme  $S = \{c, d, e\}$ .

3) Dimostrare per induzione che, per  $n \geq 1$ , 
$$\sum_{i=1}^n \frac{4i^2 + 2i - 1}{(2i + 1)!} = 1 - \frac{1}{(2n + 1)!}$$

4) Si risponda alle seguenti domande:

- (1) Quando due insiemi hanno la stessa cardinalità?
- (2) L'insieme  $3\mathbf{N} \cup \{\frac{1}{2}, \sqrt{3}\}$  e l'insieme  $\mathbf{N}$  hanno la stessa cardinalità? Perché?
- (3) L'insieme  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  dei numeri reali non razionali e l'insieme  $\mathbf{Q}$  hanno la stessa cardinalità? Perché?
- (4) Gli insiemi  $\{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x < \sqrt{2}\}$  e  $\{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x < 5\}$  hanno la stessa cardinalità? Perché?

5) Si consideri la struttura  $\mathfrak{N}$  dei numeri naturali, con le usuali relazioni e funzioni e l'usuale linguaggio  $\mathcal{L}$ . Nel linguaggio  $\mathcal{L}$  si scriva una formula  $\varphi(v_0, v_1)$  con le sole variabili libere indicate tale che  $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$  se e solo se  $3a > 4$ ,  $a - b$  è dispari e divisibile per 3.

6) Dire che cosa significa che una formula  $\gamma$  è soddisfacibile.  
 Dire cosa significa che la formula  $\gamma$  è conseguenza logica di un insieme di formule  $\Phi$ .  
 Dimostrare che, per ogni scelta delle formule  $\alpha$  e  $\beta$ ,

$$\{\neg\alpha\} \models \rightarrow \forall\beta\alpha\beta$$

7) Sia  $\mathfrak{N}$  la struttura dei numeri naturali e  $\mathfrak{R}$  quella dei numeri reali, con le usuali relazioni e funzioni e l'usuale linguaggio.

(1) Il seguente enunciato

$$\forall v_0 \rightarrow \langle 0v_0 \exists v_1 \wedge \langle 0v_1 = v_0 \times \times v_1 v_1 v_1$$

è vero o falso in  $\mathfrak{N}$ ? E in  $\mathfrak{R}$ ? Motivare le risposte.

(2) Si consideri la formula  $\varphi : \neg \exists v_2 \wedge \langle v_0 v_2 < v_2 v_1$  e la realizzazione  $\sigma = (\mathfrak{N}, \underline{a})$ , dove  $\underline{a} : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ ,  $n \rightarrow n + 2$ . Si calcoli esplicitamente (passaggio per passaggio)  $\varphi^\sigma$ .

8) Siano  $\gamma, \lambda \in \mathbf{R}$  e  $f_{\gamma, \lambda}: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definita da:

$$f_{\gamma, \lambda}(x) = \begin{cases} e^x + \gamma & x \geq 0 \\ \lambda x^2 + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

Dire per quali valori di  $\gamma$  e  $\lambda$   $f_{\gamma, \lambda}$  è una funzione da  $\mathbf{R}$  in  $\mathbf{R}$ . Per tali valori dire se  $f_{\gamma, \lambda}$  è totale, iniettiva, suriettiva.

Esiste la funzione inversa di  $f_{\gamma, \lambda}$ ? In caso affermativo, trovare  $f_{\gamma, \lambda}^{-1}$ .

9) Siano  $f, g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  definite da

$$f(x) = \ln((x^2 - 4x + 3)^3) \quad g(x) = \frac{1}{e^x}$$

- (1) Trovare l'insieme di definizione di  $f$  e l'insieme di definizione di  $g$ .
- (2) Determinare le funzioni composte  $f \circ g$  e  $g \circ f$ , specificandone gli insiemi di definizione.