ALGEBRA LINEARE CON ELEMENTI DI GEOMETRIA

modulo: ELEMENTI DI GEOMETRIA (Prof. M. Spera)

Prova scritta del 13 luglio 2011

1. Nel piano euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, ampliato proiettivamente, si determini la conica $\mathscr{C}$ tale che la polare di $P: [1,-1,0]$ sia $p: x_0 = 0$, $\mathscr{C}$ passi per $A: [0,1,2]$, un asse di $\mathscr{C}$ sia l'asse x e, infine, $\mathscr{C}$ passi per $O: [1,0,0]$. Determinarne gli eventuali asintoti, gli assi, i fuochi e la forma canonica metrica, nonché abbozzarne il grafico.

2. Nello spazio euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, determinare il fascio di piani di asse $r: \begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$

e, in particolare, i piani π_1, π_2 passanti, rispettivamente, per $P_1: (1,2,1)$, $P_2\,(2,1,1)$, nonché il piano π passante per P, punto medio di P_1P_2. Calcolare le distanze $d_1 = d(P_1, r)$ e $d_2 = d(P, r)$, e verificare che π biseca π_1 e π_2.
Individuare la sfera S di centro P e tangente a π_1 e π_2

Tempo a disposizione: 1h 15m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Elegeo 13/7/11

(1) Conica $\mathcal{C}$ tale che: la polare p di $P:[1,-1,0]$ sia $p: x_0 = 0$.

$\mathcal{C}$: passi per $A:[0,1,2]$

un asse di $\mathcal{C}$ sia l'asse x. $(y=0)$

$\mathcal{C}$ passi per l'origine.

Sol. $P \equiv C$ centro di $\mathcal{C}$: $A:[0,1,2]$ è la direzione di un asintoto r_1 ($\mathcal{C}$ è dunque un'iperbole)

$$r_1: \quad y = 2(x+1) \qquad \boxed{r_1: 2x - y + 2 = 0}$$

L'asse $a_1: y=0$ passa ovviamente per C. L'altro gli è $\perp$, e sarà pertanto: $x=-1$

$a_1: y=0$
$a_2: x=-1$

Dato che gli assi bisecano gli asintoti, l'altro asintoto è $\boxed{r_2: \quad y = -2(x+1)}$

(ragioni di simmetria, o calcolo diretto) $\boxed{r_2: 2x + y + 2 = 0}$

L'equazione è allora, ad esempio, del tipo

$$r_1 r_2 + \lambda r_\infty^2 = 0$$

$$(2x+2+y)(2x+2-y) + \lambda = 0$$

$$[2(x+1)]^2 - y^2 + \lambda = 0$$

il passaggio per $O:(0,0)$ fornisce

$$4 + \lambda = 0 \implies \lambda = -4$$

e l'equazione

$$4(x+1)^2 - y^2 - 4 = 0$$

ovvero

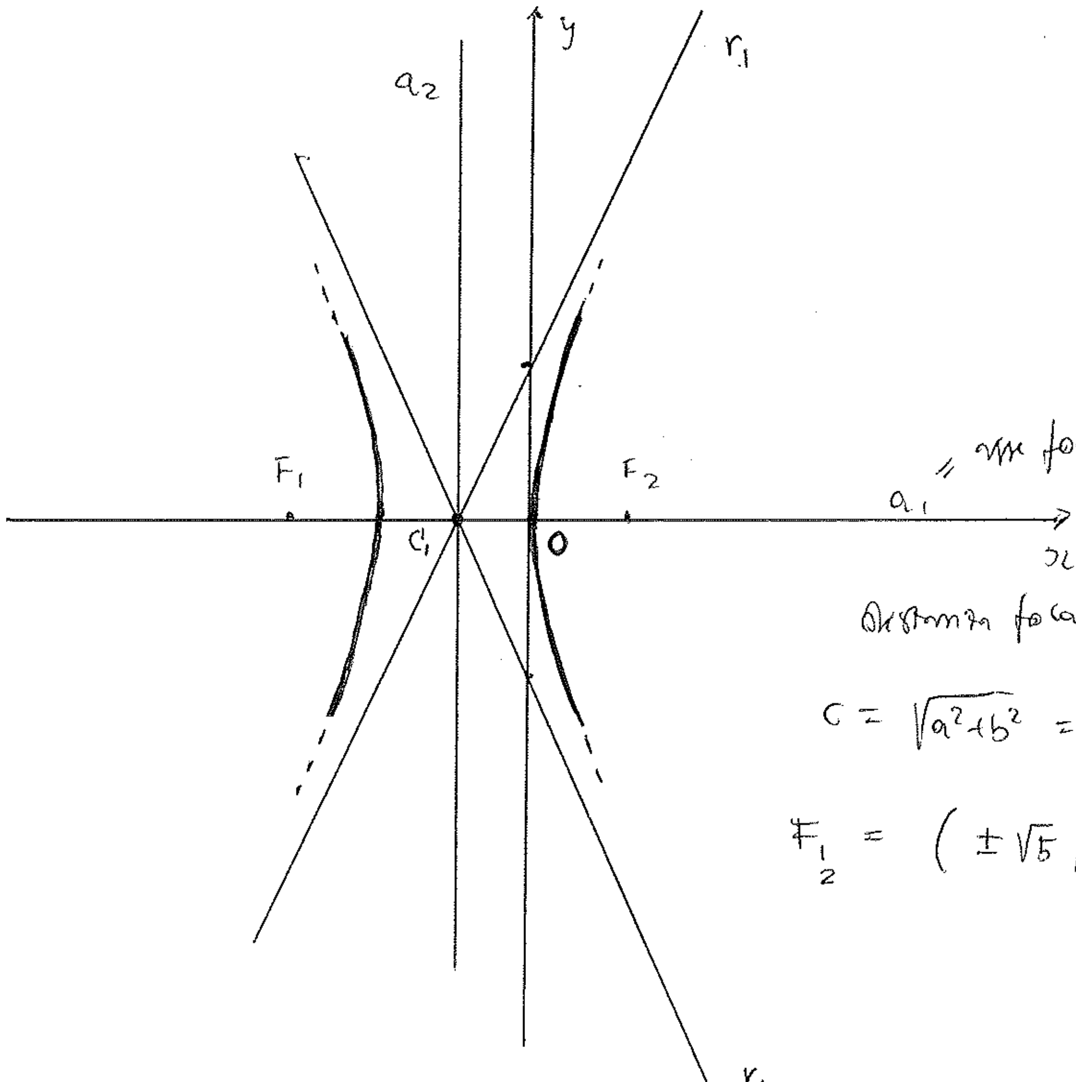
$$(x+1)^2 - \frac{y^2}{4} = 1$$

$$(x+1)^2 - \frac{y^2}{2^2} = 1$$

già in forma canonica metrica

$\Rightarrow \quad a = 1 \quad b = 2$

$A : [0, 1, 2]$



= asse focale

distanza focale

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$F_{\substack{1\\2}} = (\pm\sqrt{5}, 0)$$

(2)

Elegeo 13/7/11

piani del fascio $\mathcal{F}$ di asse

$$r: \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

passanti per $P_1: (1, 2, 1)$ (non sono su r)

$P_2: (2, 1, 1)$

$\mathcal{F}$: $\lambda (x - y) + \mu (y - z) = 0$

π_1: $\lambda (1-2) + \mu (2-1) = 0$

$-\lambda + \mu = 0 \qquad (\lambda = 1, \mu = 1)$

$x - y + y - z = 0$

$$\boxed{\pi_1: \; x - z = 0}$$

(controllo, passa per P_1) chiaro ✓

π_2: $\lambda (x - y) + \mu (y - z) = 0$

$\lambda (2 - 1) + \mu (\underbrace{1 - 1}_{=0}) = 0 \qquad \lambda = 0$

$\mu = 1$

$$\boxed{\pi_2: \; y - z = 0}$$

controllo, passa per P_2: chiaro ✓

$$P = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) = \frac{1}{2}(3, 3, 2) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$$

punto medio

π : piano per P :

$$\lambda(x-y) + \mu(y-z) = 0$$

$$\lambda\left(\overbrace{\frac{3}{2} - \frac{3}{2}}^{=0}\right) + \mu \cdot \frac{1}{2} = 0$$

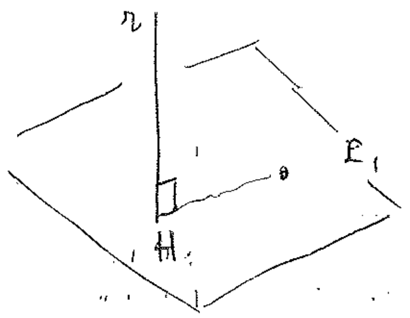
$$\mu = 0$$

$$(\lambda = 1)$$

$$\boxed{\pi : \quad x - y = 0}$$

passa per P

distanza $d_1 = d(P_1, r)$: piano per P_1 $\perp$ a r:



$$(x-1) + (y-2) + (z-1) = 0$$

int. con r:

$$t - 1 + t - 2 + t - 1 = 0$$

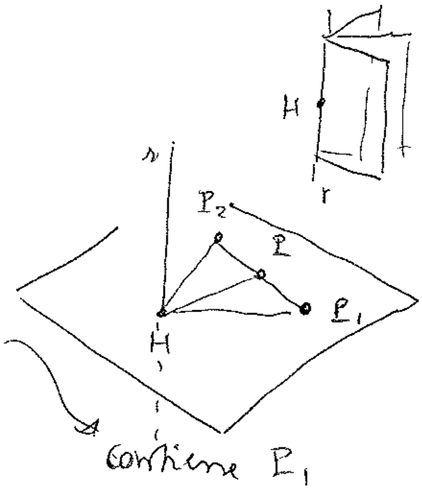
$$3t - 4 = 0 \qquad t = \frac{4}{3}$$

$$H_1 = \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$d_1 = d(P_1, H) = \sqrt{\left(1 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(2 - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(1 - \frac{4}{3}\right)^2}$$

$$\sqrt{\frac{1}{9} + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

distanza $d_2 = d(P_2, r)$.



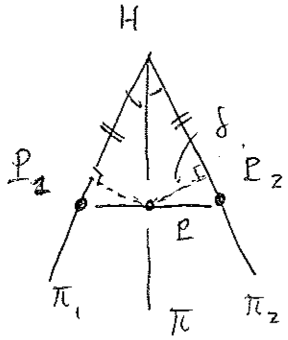
piano per P_2 $\perp$ r

$$(x-2)+(y-1)+(z-1)=0$$
$$x+y+z-4=0$$

$\cap\, r$: $$t-2+t-1+t-1=0$$

$$3t-4=0 \qquad t=\frac{4}{3}$$

stesso pto H.



π è allora un piano bisettore di π_1, π_2

chiaro per ragioni geometriche.

Calcoliamo $\delta = d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$

$P: \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$ $\pi_1: x-z=0$

$$\delta = \frac{\left|\frac{3}{2}-1\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$=R$ della sfera cercata:

$$S: \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2+(z-1)^2 = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$