

GEOMETRIA

a.a. 2011/12 (Prof. M. Spina)

Prova scritta del **22** febbraio 2013

- ① Data la superficie cartesiana

$$\Sigma: \quad z = x^2 - 2xy + 4y^2 + \sin(x^3)$$

Se ne calcoli la curvatura gaussiana, media e le curvature principali in $P_0: (0,0,0)$.

Calcolare poi la curvatura normale delle curve su Σ uscenti da P_0 , di direzione $\langle \underline{v} \rangle$, $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

- ② Con riferimento all'cs. ①, individuare le direzioni principali in $T_{P_0}\Sigma$ e calcolare nuovamente la curvatura normale dell'cs. ①. Nome la formula di Euler.

- ③ Dimostrare che $\mathbb{R}IP^2 = S^2/n$ (n : identificazione dei poli opposti) è connesso e compatto.

Tempo a disposizione: 2h

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

①

Data la superficie
conteriana

$$Z: z = x^2 - 2xy + 4y^2 + \sin(x^3)$$

se ne calcoli la curvatura gaussiana, media, e
le curvature principali in $P_0: (0, 0, 0)$.
calcolare poi la curvatura normale delle curve in Z
uscanti da P_0 di direzione $v: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sol: Da $\sin x^3 = x^3 - \frac{x^6}{6} + \dots$ è subito visto che

$$\tilde{Z}: (0, 0) \text{ è critico per } z = z(x, y) \text{ e che } H_{\tilde{Z}} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

maximin.

Pertanto $K = \det H_{\tilde{Z}} = 16 - 4 = 12 > 0$

Da $E = G = 1$ e $F = 0$ (curv. immediata)

il pure $H = \frac{1}{2} \frac{Eg - 2Ff + Ge}{EG - F^2}$

$$= \frac{1}{2} (f_{yy}^{\circ} + f_{xx}^{\circ})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$$

Curvature principali:

$$R^2 - 2H R + K = 0$$

$$R^2 - 10R + 12 = 0$$

$$R = 5 \pm \sqrt{25 - 12}$$

$$= 5 \pm \sqrt{13}$$

Duppa: ellipse

somma = 10

$$\text{prod} = (5 + \sqrt{13})(5 - \sqrt{13})$$

$$= 25 - 13 = 12 \quad \checkmark$$

geometria
22
Febbraio
2013

def. positiva
 $\Rightarrow$ curv. princ.
positive



$$\tilde{r} = (x, y, f(x, y))$$

$$\tilde{r}_x = (1, 0, f_x) \quad \text{e } (0, 0) \text{ critico}$$

$$\tilde{r}_y = (0, 1, f_y) \quad (1, 0, 0) \text{ e } (0, 1, 0)$$

$$\tilde{r}_{xx} = (0, 0, f_{xx})$$

$$\tilde{r}_{xy} = (0, 0, f_{xy})$$

$$\tilde{r}_{yy} = (0, 0, f_{yy})$$

$$\tilde{N} = (0, 0, 1) \quad (\text{in } (0, 0))$$

$$E = F = G = 1$$

$$e^{\circ} = f_{xx}$$

$$f^{\circ} = f_{xy}$$

$$g^{\circ} = f_{yy}$$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dal primo tang.

Per Hermit

si ha

$$2 \cdot 1 - 4 + 8 = 6$$

$$R_n = \frac{(1 \ 1) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\underbrace{\|\tilde{v}\|^2}_2} = \frac{1}{2} (1 \ 1) \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 6 = 3$$

② Con riferimento all'ex. ① individuare le direzioni principali in $T_{P_0} \Sigma$ e calcolare R_n con la formula di Eulero

autovalori (= aut. principali)

Autospazi di $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$ $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(2-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 0 \quad 16 + \lambda^2 - 8\lambda - 2\lambda - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 12 = 0 \quad \lambda = 5 \pm \sqrt{13} \quad (\text{ok, come da prima})$$

$$\lambda_+ = 5 + \sqrt{13}$$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_+ & -2 \\ -2 & 8-\lambda_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(2-\lambda_+)x - 2y = 0$$

(l'altra è cons. dalla prima)

$$y = \frac{2-\lambda_+}{2} x = \frac{2-5-\sqrt{13}}{2} x = -\frac{3+\sqrt{13}}{2} x$$

l'altro autospazio è ort:

$$y = -\frac{2}{-3-\sqrt{13}} x = -\frac{3+\sqrt{13}}{2} x$$

$$= \frac{2}{3+\sqrt{13}} x$$

$$y = \frac{2}{3+\sqrt{13}} x$$

$$\frac{2}{3+\sqrt{13}} = \frac{2(3-\sqrt{13})}{9-13}$$

$$= \frac{2(3-\sqrt{13})}{-4} = -\frac{3-\sqrt{13}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{13}-3}{2} x$$

$$\eta = \frac{\sqrt{13}-3}{2} \quad (>0)$$

$$y = \frac{\sqrt{13}-3}{2} x$$

$$\frac{\sqrt{13}-3}{2} \cdot -\frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

$$= -\frac{(\sqrt{13}-3)(\sqrt{13}+3)}{4}$$

$$= -\frac{13-9}{4} = -1 \quad \checkmark$$

$$v_L = \frac{1}{\sqrt{1+\eta^2}} (1, \eta)$$

$$v^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 1)$$

$$R_1 = 5-\sqrt{13} < R_2 = 5+\sqrt{13}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2(1+\eta^2)}} (1+\eta)$$

$$\cos^2 \varphi = \frac{(1+\eta)^2}{2(1+\eta^2)}$$

$$\sin^2 \varphi = \frac{(1-\eta)^2}{2(1+\eta^2)}$$

$$\sin^2 + \cos^2 = \frac{1+1+2\eta^2}{2+2\eta^2} = 1 \quad \checkmark$$

Enunciato:

$$R_1 \cdot \cos^2 \alpha + R_2 \sin^2 \alpha =$$

$$(5 - \sqrt{13}) \frac{(1 + \eta)^2}{2(1 + \eta^2)} + (5 + \sqrt{13}) \frac{(1 - \eta)^2}{2(1 + \eta^2)} =$$

$$= 5 \left\{ \frac{(1 + \eta)^2 + (1 - \eta)^2}{2(1 + \eta^2)} \right\} + \sqrt{13} \left\{ \frac{(1 - \eta)^2 - (1 + \eta)^2}{2(1 + \eta^2)} \right\}$$

1

$$= 5 + \sqrt{13} \frac{(1 - \eta + 1 + \eta) \cdot (-2\eta)}{2(1 + \eta^2)}$$

$$= 5 + \sqrt{13} \left(\frac{-2\eta}{1 + \eta^2} \right)$$

$$\eta = \frac{\sqrt{13} - 3}{2}$$

$$\eta^2 = \frac{13 + 9 - 6\sqrt{13}}{4}$$

$$= \frac{22 - 6\sqrt{13}}{4} = \frac{11 - 3\sqrt{13}}{2}$$

$$1 + \eta^2 = 1 + \frac{11 - 3\sqrt{13}}{2} = \frac{13 - 3\sqrt{13}}{2}$$

per tanto

$$\frac{-2\eta}{1 + \eta^2} = -2 \cdot \frac{\sqrt{13} - 3}{2} \cdot \frac{2}{13 - 3\sqrt{13}} = -2 \cdot \frac{\sqrt{13} - 3}{\sqrt{13}(\sqrt{13} - 3)} = -\frac{2}{\sqrt{13}}$$

risultato

$$\sqrt{13} \left(-\frac{2}{\sqrt{13}} \right) = -2$$

$$R_n = 5 - 2 = 3$$

③

Dimostrare che $\text{IRIP}^2 = S^2/n$

(n : identificazione dei gli antipodali)

$\bar{\pi}$ connesso e compatto.

$\pi: S^2 \rightarrow S^2/n$ π continua

S^2 $\bar{\pi}$ connesso e compatto $\Rightarrow \text{lo } \bar{\pi} \text{ IRIP}^2$.