Correzione del compito

17 dicembre 2004

Esercizio 1. Si consideri la seguente relazione sull'insieme $\mathbb{Z}$ dei numeri interi.

$$R = \{ ((a,b) : a, b \in \mathbb{Z}, a - b \text{ è multiplo di } 8\}.$$

Dire se si tratta di una relazione di tipo noto, motivando la risposta. Quali sono gli elementi $x \in \mathbb{Z}$ tali che $(5, x) \in R$? Quali sono gli elementi $x \in \mathbb{Z}$ tali che $(x, 5) \in R$?

Soluzione: mostriamo che la relazione R è di equivalenza.

1. • *Proprietà riflessiva*
   Sia $a \in \mathbb{Z}$, allora $(a, a) \in R$, infatti $a - a = 0$ che è multiplo di 8.
   • *Proprietà simmetrica*
   Sia $(a, b) \in R$ cioè esiste un $w \in \mathbb{Z}$ tale che $a - b = 8w$. Consideriamo questa relazione e moltiplichiamo ambo i membri per -1, ottenendo $-a + b = 8(-w)$, cioè $b - a = 8v$ con $v = -w$. Di conseguenza $b - a$ è multiplo di 8.
   • *Proprietà transitiva*
   Siano (a, b), $(b, c) \in R$, cioè esistono $w, v \in \mathbb{Z}$ tali che $a - b = 8w$ e $b - c = 8v$. Sommando tali espressioni membro a membro si ha che $a - b + b - c = 8(w + v)$ e quindi $(a, c) \in R$.

2. gli elementi $x \in \mathbb{Z}$ tali che $(5, x) \in R$ altro non sono che la classe d'equivalenza di 5
   $[5]_R = \{x \in \mathbb{Z}\,, 5 - x\,\text{è multiplo di8}\}$
   cioè quando $5 - x = 8w$, che possiamo vedere come $-x = 8w - 5$ e moltiplicando per -1 otterremo $x = 8v + 5$, cioé i numeri che divisi per 8 danno resto 5

3. gli elementi $x \in \mathbb{Z}$ tali che $(x, 5) \in R$ altro non sono che la classe d'equivalenza di 5, precedentemente calcolata, grazie alla proprietá simmetrica

Esercizio 2. Mostrare che $R = \{(a,c),(a,d),(a,e),(a,f),(b,c),(b,d),(b,e),(b,f),(c,d),(c,e),(c,f),(e,f)\}$? una relazione d'ordine stretto sull'insieme $\{a,b,c,d,e,f\}$. Determinare gli elementi massimali, minimali, eventuali massimo, minimo, maggioranti, minoranti, estremo superiore o estremo inferiore del sottoinsieme $\{c,d,e\}$.

Soluzione: mostriamo che la relazione R è di ordine stretto.

1. • *Proprietà antiriflessiva*
   R è antiriflessiva, poichè non abbiamo nessuna coppia del tipo (x,x) nell'elenco proposto.
   • *Proprietà transitiva*
   R è transitiva, ad esempio $(c,d),(d,a) \rightarrow (c,a)$, e opportunamente $(b,c),(c,d) \rightarrow (b,d)$.
   Quindi R è relazione di ordine stretto.

2.

massimale	$\{e;d\}$	minimale	$\{c\}$
maggioranti	$\emptyset$	minoranti	$\{a,b,c\}$
sup	$\emptyset$	inf	$\{c\}$
max	$\emptyset$	min	$\{c\}$

Esercizio 3. Dimostrare per induzione una delle due formule seguenti (a scelta):

1. per $n > 2$, $n! + n > 2^n$
2. per $n \geq 0$ $\sum_{i=0}^{n} 2i = n^2 + n$

Soluzione 3.1:

1. *Passo base*: il primo termine corrisponde a $n > 2$ $\quad 3! + 3 = 6 + 3 = 9$ e $2^3 = 8$.
2. *Passo induttivo.*

$$\begin{aligned}(n+1)! + (n+1) &= n \cdot n! + n! + n + 1 \\ &> n \cdot n! + 1 + 2^n \\ &> 2^n + 2^n = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}\end{aligned} \tag{1}$$

Nell'ultimo passaggio occorre osservare (e all'occorrenza dimostrare!!!) che per $n > 3$ vale banalmente che $n \cdot n! > 2^n$.

Soluzione 3.2:

1. *Passo base*: il primo termine corrisponde a $i = 0$
   $\sum_{i=1}^{0} 2i = 0$ e $0^2 + 0 = 0$.

2. *Passo induttivo.*

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} 2i &= \sum_{i=1}^{n} 2i + 2(n+1)\\ &= (n^2+n) + 2(n+1)\\ &= n^2+n+2n+2\\ &= (n^2+2n+1)+(n+1)\\ &= (n+1)^2+(n+1)\end{aligned}$$

Esercizio 4. Si dica in quali strutture è vero il seguente enunciato

$$\exists v_0 \exists v_1 \forall v_2 \vee = v_0 v_2 \neg = v_2 v_1$$

Soluzione: In ogni struttura. Infatti, possiamo assegnare alle variabili v_0 e v_1 lo stesso elemento dell'insieme universo $a \in A$. Per ogni altro elemento $b \in A$, si verifica sicuramente $a = b$ oppure $a \neq b$.

Esercizio 5. Si dica, giustificando la risposta, se gli insiemi $\mathbb{N} \setminus \{3, 9\}$ e $3\mathbb{N} \cup \{7, 10, 11\}$ hanno la stessa cardinalitá. (Nota: con $\mathbb{N}$ denotiamo l'insieme dei numeri naturali e con $3\mathbb{N}$ l'insieme dei numeri naturali multipli di 3.)

Soluzione: per dimostrare che $\mathbb{N}\setminus\{3,9\}$ e$3\mathbb{N}\cup\{7,10,11\}$ hanno la stessa cardinalità esibiamo una biiezione tra di essi. La funzione $f : 3\mathbb{N} \cup \{7, 10, 11\} \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{3, 9\}$, definita come segue

$$f(n) = \begin{cases} 0, & n = 0\\ 1, & n = 7\\ 2, & n = 10\\ 4, & n = 11\\ \dfrac{n}{3} + 4, & 3 \leq n \leq 8\\ \dfrac{n}{3} + 5, & 5 \leq n \end{cases}$$

è una possibile biiezione di $3\mathbb{N} \cup \{7, 10, 11\}$ in $\mathbb{N} \setminus \{3, 9\}$. Occorre ovviamente ricordare al lettore che gli elementi di $3\mathbb{N}$ sono tutti multipli di 3...

Esercizio 6. Si definisca quando due insiemi hanno la stessa cardinalitá. Si enunci un criterio per verificare se $|A| = |B|$

Soluzione: si vedano le dispense.

Esercizio 7. Si consideri la struttura $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, \{\equiv, \prec\}, \{\oplus, \otimes\}, \{\mathit{0}, \mathit{1}\})$, dove $\mathbb{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, $\equiv$ la relazione binaria di essere lo stesso numero, $\prec$, $\oplus$ e $\otimes$ rispettivamente l'ordine, l'addizione e la moltiplicazione tra numeri naturali, *0* e *1* i numeri zero e uno.

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio adatto alla struttura i cui simboli propri siano i predicati $=$, $<$; i simboli per funzione $+$ e $\times$; i simboli per costante $\mathbf{0}$ e $\mathbf{1}$.

Nel linguaggio $\mathcal{L}$ si scriva una formula $\varphi(v_0, v_1)$ con le sole variabili libere indicate tale che $\mathfrak{N} \models \varphi(v_0, v_1)[a, b]$ se e solo se $a > 2b$ e $a + 3b$ é divisibile per 2 e per 3.

Soluzione: costruiamo per gradi le varie proposizioni e poi mettiamole assieme, assegnando, ovviamente alla variabile v_0 il valore a e v_1 il valore b.

1. "$a > 2b$" diventa
$$< \times v_1 + \mathbf{1}\mathbf{1} v_0$$
2. "$a + 3b$ é divisibile per 2" diventa
$$\exists v_3 = +v_0 \times v_1 + +\mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{1} \times v_3 + \mathbf{1}\mathbf{1}$$
3. infine "$a + 3b$ é divisibile per 3" diventa semplicemente
$$\exists v_4 = +v_0 \times v_1 + +\mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{1} \times v_3 + +\mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{1}$$

Adesso non resta che metterle assieme con gli opportuni connettivi...

$$\wedge\wedge < \times v_1 + \mathbf{1}\mathbf{1} v_0 \exists v_3 = +v_0 \times v_1 + +\mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{1} \times v_3 + \mathbf{1}\mathbf{1} \exists v_4 = +v_0 \times v_1 + +\mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{1} \times v_4 + +\mathbf{1}\mathbf{1}\mathbf{1}$$

Esercizio 8. Dire che cosa significa che una formula è soddisfacibile. Dire cosa significa che una formula é conseguenza logica di un insieme di formule. Dimostrare che, per ogni scelta delle formule α e β,

$$\models \alpha \to \beta \text{ se e solo se } \{\alpha\} \cup \neg\beta \text{ è non soddisfacibile}$$

Soluzione: si vedano le dispense.

Esercizio 9. In un linguaggio in cui c'è un simbolo di relazione binaria P e un simbolo di funzione binaria f, dire quali delle seguenti successioni di simboli sono formule (F), quali termini (T) e quali nulla (N); in quest'ultimo caso scrivere nell'ultima colonna una breve giustificazione..

	F	T	N	
$fffv_0v_3$			$\times$	f è binaria
$fv_1fv_1v_2$		$\times$		
fv_1fv_2			$\times$	f è binaria
$\wedge\forall v_1Pfv_1v_0v_3\neg Pv_0v_1v_2$			$\times$	P è binaria
$\wedge\forall v_0Pfv_1v_0v_3\neg Pv_0fv_1v_2$	$\times$			
$\wedge\wedge fv_1v_2\neg Pv_3v_0\neg\forall v_1Pfv_1v_2v_3$			$\times$	fv_1v_2 è un termine e non una formula
$\wedge\wedge Pv_1v_2\neg Pv_3fv_0v_4\neg\forall v_1Pfv_1v_2v_3$	$\times$			

Esercizio 10. Dato l'insieme di coppie ordinate

$$\begin{aligned} g = &\{(x, x^2 + 2x) : x \in \mathbb{N}, x^2 - 1 < 10\} \cup \\ &\cup \{(x, 4x + 3) : x \in \mathbb{N}, 2 < x < 5\} \cup \\ &\cup \{(x, x - 5) : x \in \mathbb{N}, x \geq 5\} \cup \{(1, 3), (7, 2)\}, \end{aligned}$$

motivare perché g é una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$, precisando se é totale, suriettiva, iniettiva o biiettiva, giustificando le risposte.

Data poi la funzione $f = \{(0, 3), (2, 3), (1, 5)\}$, scrivere quali sono le funzioni $h = f(g)$ e $k = g(f)$. Di esse precisare insieme di definizione e insieme immagine e se sono iniettive.

Soluzione: scriviamo esplicitamente le coppie di g, spaccandole nei suoi intervalli:

$$\begin{aligned} g = &\{(0, 0), (1, 3), (2, 8), (3, 15)\} \cup \\ &\cup \{(3, 15), (4, 19)\} \cup \\ &\cup \{(5, 0), (6, 1), (7, 2), (8, 3), \ldots, (20, 15), \ldots (24, 19), \ldots\} \cup \\ &\cup \{(1, 3), (7, 2)\} \end{aligned}$$

g è funzione totale, poichè è rispettata la proprietà di univocità e il dominio coincide con l'insieme di definizione. g è suriettiva. g non è iniettiva, dal momento che 0 è immagine di 0 e di 5; 3 di 1 e di 8, 15 e 19 rispettivamente di 3 e 20, e 4 e 19.

Vediamo la composizione con la funzione $f = \{(0,1),(2,3),(1,5)\}$

$Def(f) = \{0,1,2,\}$, $Im(h) = \{1,3,5\}.f$ è iniettiva.

Componiamo: $f \circ g = \{(0,1),(6,5),(7,2)\}$

che é iniettiva...

$g \circ f = \{(1,3),(3,15),(5,0)\}$