

◊ Geometria differenziale delle curve nello spazio

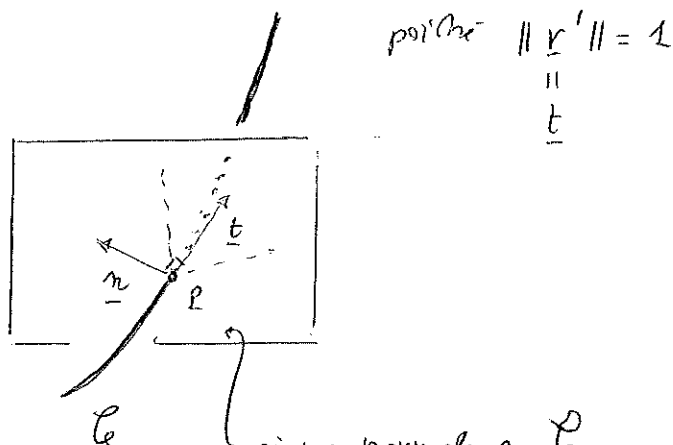
Dato una curva liscia, regolare, in $\mathbb{R}^3$, parametrizzata dall'ascissa curvilinea s , si definisce curvatura il modulo del vettore $\underline{r}''$ (accelerazione, rispetto a s)

$R = \|\underline{r}''\|$
 è spesso chiamato vettore di curvatura → $\underline{r}'' = R \underline{n} (= \underline{t}')$ $\underline{n}$: normale principale
 (chiamando $\langle \underline{r}'', \underline{r}' \rangle = 0$)

$R > 0$ (attenzione!)

(se $R = 0$ $\underline{n}$ non è univocamente definito)

|| (se $R > 0$ si parla di curva bi-regolare)



piano normale a $\underline{C}$
 in P (di osculazione s)

il piano passante per P e di giacitura individuata da $\underline{t}$, $\underline{n}$ si chiama piano osculatore (in P). Il

centro (di tale piano) di

centro $\underline{C} = P + \frac{1}{R} \underline{n}$

(centro di curvatura)

e raggio $\underline{C} = \frac{1}{R}$

(passante originariamente per P)

si dice cerchio osculatore a $\underline{C}$ in P

$\langle \underline{X} - P, \underline{t} \rangle = 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \\ z'(s) \end{pmatrix}$

$(x - x(s))x'(s) + (y - y(s))y'(s) + (z - z(s))z'(s) = 0$

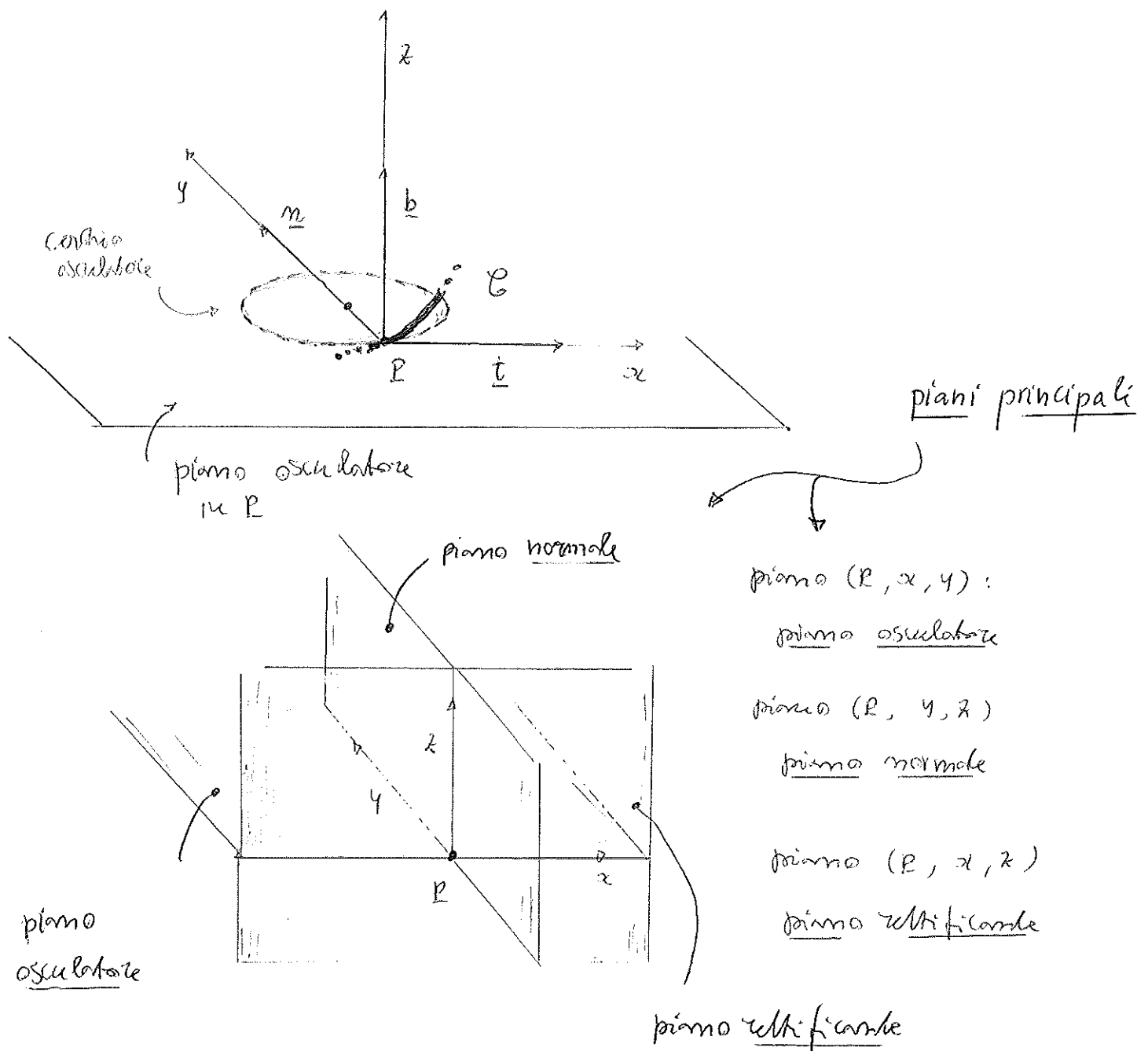
$\langle \underline{P} - \underline{r}(s), \underline{r}'(s) \rangle = 0$

si ponga ora $\underline{b} := \underline{t} \times \underline{n}$ $\underline{b}$: versore
binormale

$(P, \underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$ si dice triedro principale (o fondamentale,

o di Frenet) — o apparato di Frenet — in P

ed è il sistema di riferimento naturale per studiare la
curva in un intorno di un suo punto.



Riprendiamo $\underline{t}' = \kappa \underline{n}$

Si ha $\underline{b}' = (\underline{t} \times \underline{n})' = \underline{t}' \times \underline{n} + \underline{t} \times \underline{n}'$,

"velocità di
variazione"
del primo
oscillatore

ossia

$$\underline{b}' = \underline{t} \times \underline{n}'$$

ma $\langle \underline{b}', \underline{t} \rangle = 0$, e, essendo un vettore,

$$\langle \underline{b}', \underline{b} \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{b}' = \tau \underline{n} \quad \text{per qualche } \tau = \tau(s) \in \mathbb{R}$$

★ τ : torsione della curva (o κ)

calcoliamo $\underline{n}'$: $\underline{n}' = (\underline{b} \times \underline{t})' =$

$$= \underline{b}' \times \underline{t} + \underline{b} \times \underline{t}' = \tau \underbrace{\underline{n} \times \underline{t}}_{-\underline{b}} + \underline{b} \times \kappa \underline{n} =$$

$$= -\tau \underline{b} - \kappa \underline{t}$$

$$= -\kappa \underline{t} - \tau \underline{b} \quad \text{Si hanno, in definitiva,}$$

le formule di Frenet (- Séret) ★

$$1 = \frac{d}{ds} \left\{ \begin{array}{l} \underline{t}' = \kappa \underline{n} \\ \underline{n}' = -\kappa \underline{t} - \tau \underline{b} \\ \underline{b}' = \tau \underline{n} \end{array} \right.$$

scriviamole in questa forma

$$(\underline{t}', \underline{n}', \underline{b}') = (\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -R & 0 \\ R & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{matr.} \\ \text{antisimmetrica}}} \quad \begin{matrix} 1 \times 3 & 1 \times 3 & 3 \times 3 \end{matrix}$$

oppure nella forma $\underline{\xi}' = \underline{\Omega} \times \underline{\xi}$ ($\underline{\xi} = \underline{t}, \underline{n}, \underline{b}$)

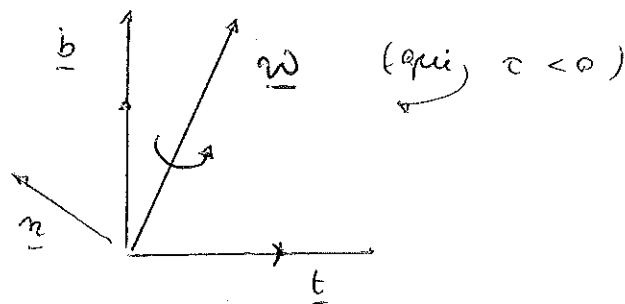
tramite il vettore di Darboux

$$\underline{w} = -\tau \underline{t} + R \underline{b} \quad \left\| \begin{array}{l} \underline{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \\ w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

(che dà la velocità angolare della "rotazione infinitesimale" del triedro di Frenet)

controlliamo:

$$\begin{aligned} \underline{t}' &= \begin{vmatrix} \underline{t} & \underline{n} & \underline{b} \\ -\tau & 0 & R \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -(-R) \underline{n} = R \underline{n} \\ \underline{n}' &= \begin{vmatrix} \underline{t} & \underline{n} & \underline{b} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -R \underline{t} - \tau \underline{n} \\ \underline{b}' &= \begin{vmatrix} \underline{t} & \underline{n} & \underline{b} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-\tau) \underline{n} = \tau \underline{n} \end{aligned}$$



oppure, ancora,
in forma
matriciale

$$\underline{\xi}' = \underline{\Omega} \cdot \underline{\xi}$$

★ in definitiva, "il sistema di riferimento" subisce una rotazione infinitesimale attorno all'origine, che a sua volta trasla di un tratto infinitesimo lungo la curva"

Dalla discussione generale del cap. III segue subito il teorema fondamentale delle curve spaziali:
curvatura e torsione determinano univocamente una curva a meno di un movimento rigido

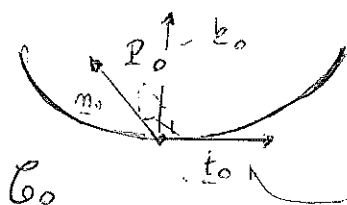
$$R = R(s)$$

$$\tau = \tau(s)$$

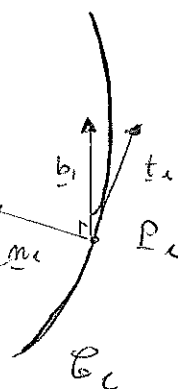
analiticamente,
 si tratta di
 un problema
 di Cauchy

$$R'(s) = A(s)R(s)$$

$$R(0) = I \dots$$



triedri di Frenet
iniziali



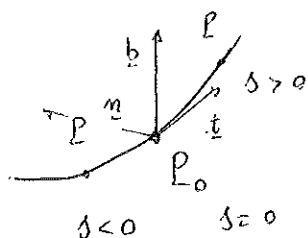
tramite una
traslazione e una rotazione
 opportune si portano i pli P_0 e

P_c a coincidere, e così gli appartati di Frenet iniziali.

Se R e τ sono le stesse, C_0 e C_c coincidono.
 (ovvero, i vettori di tangenza coincidono)

Sia ora $r = r(s)$, $s \in \gamma$
 intervallo

s ascissa curvilinea, per convenzione
negativa a sinistra di P_0 fissato,
positiva a destra; sia $r \in \mathcal{C}^\infty$



$s \in \mathbb{I}$ (contenente 0)

Sviluppiamo in serie di Mac-Laurin

$$r(s) = \underbrace{r(0)}_{\substack{= \\ 0}} + \underbrace{r'(0)}_{\substack{= \\ t \\ = \\ t_0}} s + \frac{1}{2} \underbrace{r''(0)}_{= R} s^2 + \frac{1}{6} \underbrace{r'''(0)}_{= \tau} s^3 + o(s^3)$$

(vedere)

N.B. R e τ sono calcolate
 in P_0

$$\frac{o(s^3)}{s^3} \rightarrow 0, s \rightarrow 0$$

$$\underline{r}''' = (\underline{R} \underline{n})' = \underline{R}' \underline{n} + \underline{R} \underline{n}' = \underline{R}' \underline{n} +$$

$$+ \underline{R} (-\underline{R} \underline{t} - \tau \underline{b})$$

$$= -\underline{R}^2 \underline{t} + \underline{R}' \underline{n} - \underline{R} \tau \underline{b}$$

In componenti, troviamo
rispetto a $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$

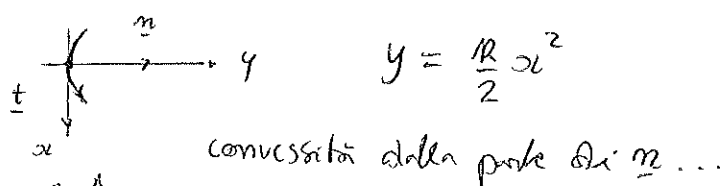
$$\begin{cases} x(s) = s - \frac{\underline{R}^2}{6} s^3 + \dots \\ y(s) = \frac{\underline{R}}{2} s^2 + \frac{\underline{R}'}{6} s^3 + \dots \\ z(s) = -\frac{\underline{R} \tau}{6} s^3 + \dots \end{cases}$$

di notevole interesse (v. anche oltre). Conservando
in ognuna i primi termini dello sviluppo abbiamo

$$\begin{cases} x(s) = s + \dots \\ y(s) = \frac{\underline{R}}{2} s^2 + \dots \\ z(s) = -\frac{\underline{R} \tau}{6} s^3 \end{cases}$$

Proiettiamo sui piani coordinati:

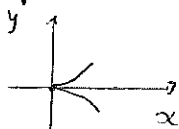
piano osculatore



piano normale

$$y = \frac{\underline{R}}{2} s^2$$

$$z = -\frac{\underline{R} \tau}{6} s^3 : \text{cuspidale (tangente doppia orizzontale)}$$



$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \quad y = x^{3/2} \quad x \geq 0$$

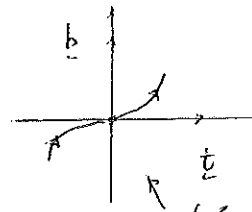
$$y^2 - x^3 = 0$$

$$y^2 = 0 \quad \text{ossia la tangente doppia}$$

piano rettificante

$$\alpha = s$$

$$\tau = -\frac{12\tau}{6} s^3$$



qui $\tau < 0$

|| Osserviamo che R e τ non dipendono dall'orientamento della curva.

La cosa è ovvia, per definizione, per R .

Osserviamo poi che, cambiando l'orientamento

$$\underline{t} \longmapsto -\underline{t}$$

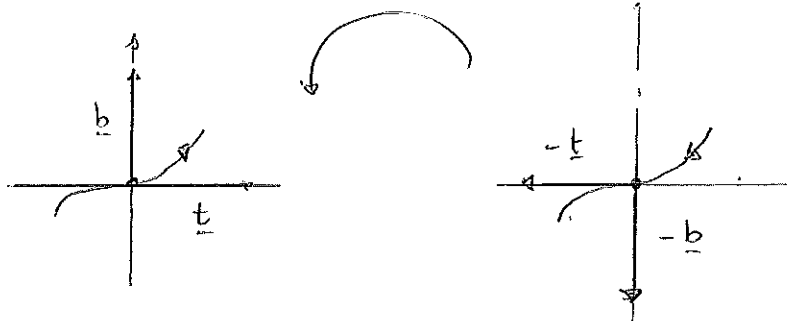
$$\underline{n} \longmapsto \underline{n}$$

$$\left(\frac{d\underline{t}}{ds} = \frac{d(-\underline{t})}{d(-s)} \dots \right)$$

$$\underline{b} \longmapsto -\underline{b}$$

si che $\underline{b}' = \frac{d\underline{b}}{ds} = \frac{d(-\underline{b})}{d(-s)} \longmapsto \underline{b}'$

ma, poiché $\underline{b}' = \tau \underline{n}$, τ rimane invariata



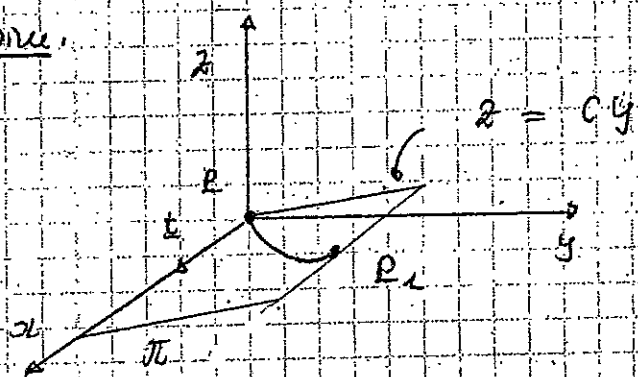
rirotando, è lo stesso grafico!

★ Ulteriore interpretazione geometrica del piano oscillatore (di P)

Proposizione. Sia $P_1 \in G$, $P \neq P_1$.

Si consideri il piano π contenente la retta tangente a G in P e P_1 . Se $P_1 \rightarrow P$, tale piano tende al piano oscillatore a G in P .

Dim.



L'equazione di π è $z = cy$.

$$\frac{z(s)}{y(s)} = c(s) = -\frac{z}{3} s \rightarrow 0 \quad \text{se } s \rightarrow 0.$$

Ormai, al limite, si ottiene $z = 0$, cioè il piano oscillatore. $\square$

★ Vogliamo trovare formule esplicite per θ e τ in funzione di un parametro quadratico. Cominciamo con l'ultimo. Tali formule in funzione di s ...

Normale

generali

1/1 convenzione

$$\dot{\cdot} = \frac{d}{dt}$$

$$' = \frac{d}{ds}$$

osserviamo subito che

$$\underline{\dot{r}} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d\underline{r}}{ds} \frac{ds}{dt} = \underline{r}' \cdot \frac{ds}{dt}$$

accelerazione

$$\underline{\ddot{r}} = \frac{d}{dt} \left(\underline{r}' \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d}{ds} \underline{r}' \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \underline{r}' \frac{d^2s}{dt^2} =$$

$$= \underline{r}'' \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \underline{r}' \frac{d^2s}{dt^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\rho} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \underline{n}}_{\text{accelerazione centripeta}} + \underbrace{\frac{d^2s}{dt^2} \underline{t}}_{\text{accelerazione tangenziale}}$$

accelerazione centripeta

accelerazione tangenziale

Si può calcolare per $\underline{\ddot{r}}$ etc...

ma anche

$$\underline{r}' = \frac{\underline{\dot{r}}}{\|\underline{\dot{r}}\|}$$

$$\underline{r}'' = \dots \frac{\|\underline{\dot{r}}\|^2 \underline{\ddot{r}} - \langle \underline{\dot{r}}, \underline{\ddot{r}} \rangle \underline{\dot{r}}}{\|\underline{\dot{r}}\|^4}$$

Calcoliamo

$$\kappa = \|\underline{r}''\| = \|\underline{r}'' \times \underline{r}'\| = \dots = \frac{\|\underline{\ddot{r}} \times \underline{\dot{r}}\|}{\|\underline{\dot{r}}\|^3}$$

Calcoliamo τ .

$$\tau = - \frac{\langle \underline{r}' \times \underline{r}'', \underline{r}''' \rangle}{R^2} = - \frac{\langle \underline{r}' \times \underline{r}'', \underline{r}''' \rangle}{\|\underline{r}' \times \underline{r}''\|^2}$$

$$= \dots = - \frac{\langle \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}, \ddot{\underline{r}} \rangle}{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|^2}$$

(lunghe calcoli)

Verifichiamo la prima...

$$\begin{aligned} - \frac{\langle \underline{r}' \times \underline{r}'', \underline{r}''' \rangle}{R^2} &= - \frac{\langle \underline{t} \times R \underline{n}, (R \underline{n})' \rangle}{R^2} = \\ &= - \frac{\langle R \underline{b}, R' \underline{n} + R \underline{n}' \rangle}{R^2} = \\ &= - \frac{\langle R \underline{b}, R \underline{n}' \rangle}{R^2} = - \langle \underline{b}, \underline{n}' \rangle = \\ &= - \langle \underline{b}, -R \underline{t} - \tau \underline{b} \rangle = \tau \quad \square \end{aligned}$$

Determiniamo le equazioni dei piani
coordinati (Cintreschi) (= piani principali)

(*) piano tangente $\langle \underline{r} - \underline{r}_0, \dot{\underline{r}}_0 \rangle = 0$

(*) piano osculatore

$$\langle \underline{r} - \underline{r}_0, \underline{r}_0'' \times \underline{r}_0' \rangle = 0$$

$$\underline{r}_0'' \times \underline{t}$$

$$0 = \frac{d}{dt} \\ 1 = \frac{ds}{ds}$$

ora si ha $\underline{\dot{r}} \times \underline{\dot{r}}_0 = \dot{s} \underline{r}' \times [\underline{r}'' \hat{s}^2 + \underline{r}' \hat{s}^0] =$

$$= \dot{s}^3 (\underline{r}' \times \underline{r}'') \quad (= (\frac{ds}{dt})^3 (\underline{r}' \times \underline{r}'') \neq 0)$$

$\Rightarrow$ rispetto ad un parametro qualsiasi:

$$\langle \underline{r} - \underline{r}_0, \underline{\dot{r}}_0 \times \underline{\dot{r}}_0 \rangle = 0$$

(*) piano rettificante

$$\langle \underline{r} - \underline{r}_0, \underline{r}_0'' \rangle = 0$$

... oppure $\langle \underline{r} - \underline{r}_0, \underline{n}_0 \rangle = 0 \dots$

$$\underline{b}_0 \times \underline{t}_0$$

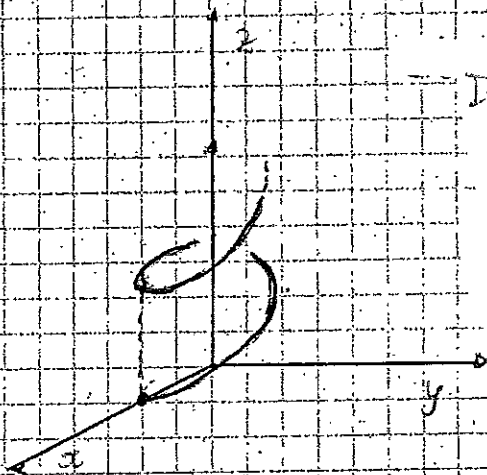
det. del piano osculatore

⇒ Conclusione ... nei calcoli espliciti non è necessario passare attraverso la legge di Lenz

★ Esempio classico: l'elica cilindrica $\mathcal{C}$

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \\ z = bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} a, b > 0 \\ \text{per fissare le idee} \end{array}$$

passo dell'elica = $2\pi b$



In un teorema fondamentale,
 $\mathcal{C}$ è piana $\Leftrightarrow z = 0$
 (v. anche oltre per una altra
 dritta.
 Vi sono poi metodi ad hoc

[Verifichiamo che $\mathcal{C}$ non è piana...

per es. ... se la fosse $\exists A, B, C, D$ tali che,
 (ovviamente, vi sembrerebbe

$$A x(t) + B y(t) + C z(t) + D = 0$$

e questo non è possibile: ... se $t \rightarrow \pm\infty$ $x(t) \in y(t)$

rimangono limitate e $z(t)$ no...]

Altro esempio: la cubica gobba.

[Se per un momento consideriamo

$$x = t$$

$$y = t^2$$

$$z = t^3$$

$$, \text{ si avrebbe } A t + B t^2 + C t^3 + D = 0$$

il che è palese assurdo...]

E in generale si può anche procedere così...

Si considera il piano passante per tre punti
 (non allineati) della curva e si verifica che vi sono
 altri punti di $\mathcal{C}$ non giacenti su di esso.]

L'elica è regolare...

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt$$

Quando l'elica si annulla si ha

$$\begin{cases} x(s) = a \cos \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ y(s) = a \sin \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ z(s) = b \frac{s}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

[se parto da $t=0$
ho $s = \sqrt{a^2 + b^2} t$

$$\underline{r} = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

$$\underline{\dot{r}} = (-a \sin t, a \cos t, b)$$

$$\underline{\ddot{r}} = (-a \cos t, -a \sin t, 0)$$

$$\underline{\ddot{\ddot{r}}} = (a \sin t, -a \cos t, 0)$$

$$R = \frac{\|\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}\|}{\|\underline{\dot{r}}\|^3} = (\text{poiché } \langle \underline{\dot{r}}, \underline{\ddot{r}} \rangle = 0)$$

$$= \frac{\|\underline{\dot{r}}\| \|\underline{\ddot{r}}\|}{\|\underline{\dot{r}}\|^3} = \frac{\|\underline{\ddot{r}}\|}{\|\underline{\dot{r}}\|^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (\text{costante})$$

$$\tau = - \frac{\langle \underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}, \underline{\ddot{\ddot{r}}} \rangle}{\|\underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}\|^2} = \dots = \frac{- \langle \underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}, \underline{\ddot{\ddot{r}}} \rangle}{\|\underline{\dot{r}}\|^2 \|\underline{\ddot{r}}\|^2} =$$

$$= - \frac{1}{(a^2+b^2)a^2} \cdot \begin{vmatrix} -a \sin t & a \cos t & b \\ -a \cos t & -a \sin t & a \\ a \sin t & -a \cos t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= - \frac{1}{(a^2+b^2)a^2} \cdot b \cdot a^2 = - \frac{b}{a^2+b^2} < 0 \quad (b > 0)$$

se $b < 0$ la torsione è positiva

★ ... una vite può essere di due tipi...

★ Attenzione ... ciò non ha nulla a che vedere con l'orientamento!

★ In virtù del teorema fondamentale,
le eliche cilindriche sono le uniche curve
aventi curvatura e torsione costanti

||| Inoltre $\mathcal{C}$ è piana $\Leftrightarrow \tau \equiv 0$,
sempre per il teor. fondamentale, oppure osservando,
direttamente, che $\tau \equiv 0 \Rightarrow \underline{b} = \underline{b}(s) = \underline{b}_0$
(costante). Posto $f(s) = \langle \underline{r}(s), \underline{b}_0 \rangle$, è
 $f'(s) = \langle \underline{r}'(s), \underline{b}_0 \rangle = \langle \underline{t}(s), \underline{b}_0 \rangle = 0 \Rightarrow$
 $\langle \underline{r}(s), \underline{b}_0 \rangle = c$ costante, la quale ci dice che $\mathcal{C}$ "
appartiene al piano di equazione $\langle X, \underline{b}_0 \rangle = c$.

* Sfera osculatrice

Applichiamo la descrizione locale di una curva spaziale

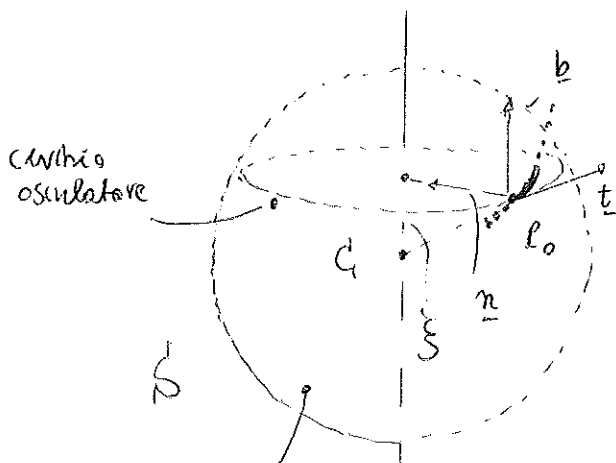
$$\begin{cases} x = x(s) = s - \frac{k^2}{6} s^3 + \dots \\ y = y(s) = \frac{k}{2} s^2 + \frac{k'}{6} s^3 + \dots \\ z = z(s) = -\frac{k\tau}{6} s^3 + \dots \end{cases}$$

alla determinazione
della sfera osculatrice S
a C in un suo pto
 P_0 , ovvero la sfera

limite di quelle passanti per P_0 e per altri tre pti della curva,
quando si portano questi ultimi a coincidere con P_0 .

Tale sfera contiene il cerchio osculatore di C in P_0

$$k > 0 \quad \tau \neq 0$$



Sfera osculatrice

Equazione della sfera di centro $C_1: (x_0, y_0, z_0)$
e raggio R ↓

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

nel nostro caso (utilizzando il teorema
di Frenet in P_0 ... v. figura

$$C_1 = (0, \frac{1}{k}, \xi)$$

da determinarsi
(la sfera passa)
per P_0

e si ha subito: $R^2 = \frac{1}{k^2} + \xi^2$

Via ora $P = (x(s), y(s), z(s))$ imponiamo l'appartenenza
del pto alla sfera (trovando lo sviluppo al 3° ordine,
accennando con ciò, al limite, un contatto
quadruplo. Calcoliamo:



$$x(s)^2 + (y(s) - \frac{1}{k})^2 + (z(s) - \xi)^2 = \frac{1}{k^2} + \xi^2$$

$$\left(1 - \frac{R^2}{6} \delta^3\right)^2 + \left(\frac{R}{2} \delta^2 + \frac{R'}{6} \delta^3 - \frac{1}{R}\right)^2 + \left(-\frac{R\tau}{6} \delta^3 - \zeta\right)^2 = \frac{1}{R^2} + \zeta^2$$

controlliamo ordine per ordine (in δ):

ordine 0: $\frac{1}{R^2} + \zeta^2 = \frac{1}{R^2} + \zeta^2$ ✓

ordine 1: $0 = 0$ ✓

ordine 2: $\delta^2 - 2 \frac{R}{2} \frac{1}{R} \delta^2 = 0$ ✓

ordine 3: $-2 \frac{R'}{6} \frac{1}{R} \delta^3 + 2 \frac{R\tau}{6} \zeta \delta^3 = 0$, che implica:

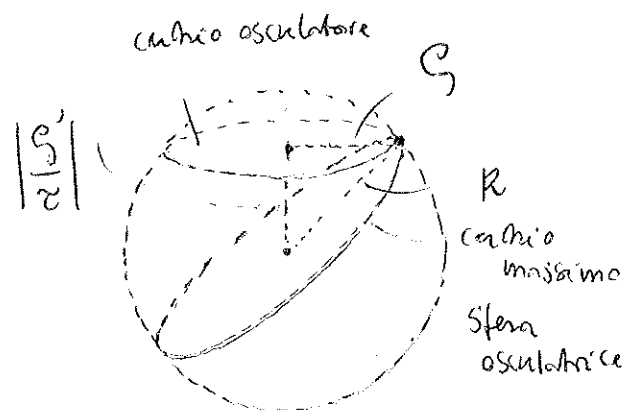
$$-\frac{R'}{R} + R\tau\zeta = 0$$

$$\Rightarrow \zeta = \frac{1}{R\tau} \cdot \frac{R'}{R} =$$

$$= -\frac{1}{\tau} C'$$

$$\Rightarrow \boxed{R = \sqrt{C^2 + \frac{C'^2}{\tau^2}}}$$

raggio di ζ



Determiniamo esplicitamente le coordinate
del centro della sfera osculatrice (Formula di de Saint Venant)

Si ha, in virtù della discussione appena svolta:

$$(*) \quad \underline{r}_c = \underline{r} + \varrho \underline{n} - \frac{\varrho'}{\tau} \underline{b} \quad \tau \neq 0$$

III Determiniamo le curve sferiche: $\underline{r}_c$ è costante, e così R .

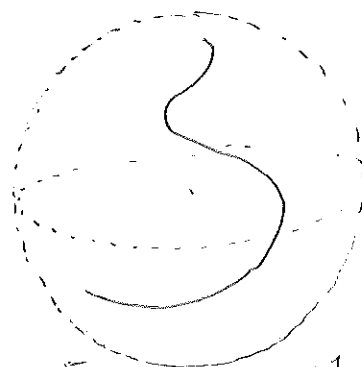
Si ha

$$\begin{aligned} 0 = \underline{r}_c' &= \underline{t} + \varrho' \underline{n} + \varrho \underline{n}' - \left(\frac{\varrho'}{\tau}\right)' \underline{b} - \frac{\varrho'}{\tau} \underline{b}' = \\ &= \underline{t} + \varrho' \underline{n} + \varrho (-\tau \underline{t} - \tau \underline{b}) - \left(\frac{\varrho'}{\tau}\right)' \underline{b} - \frac{\varrho'}{\tau} \tau \underline{n} = \\ &= -(\tau \varrho + \left(\frac{\varrho'}{\tau}\right)') \underline{b} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(*) \quad \boxed{\tau \varrho + \left(\frac{\varrho'}{\tau}\right)' = 0}$$

calcoliamo $(R^2)' = \left(\varrho^2 + \frac{\varrho'^2}{\tau^2}\right)' =$

$$= 2 \varrho \varrho' + 2 \left(\frac{\varrho'}{\tau}\right) \left(\frac{\varrho'}{\tau}\right)' = 2 \frac{\varrho'}{\tau} \left[\tau \varrho + \left(\frac{\varrho'}{\tau}\right)' \right]$$



$\Rightarrow (*)$ implica $R' = 0$ (cioè R costante).

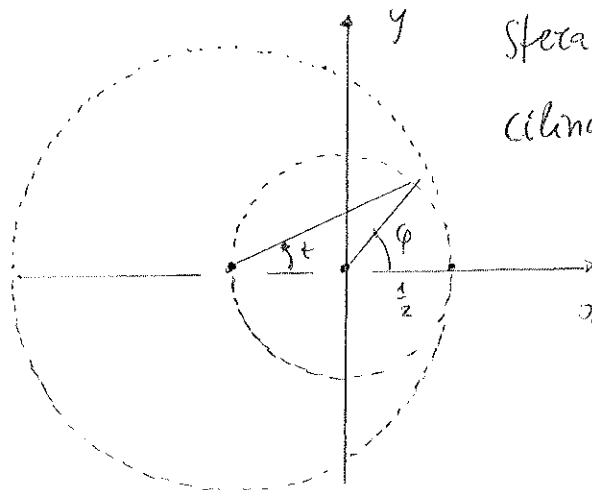
viceversa R costante da' $\frac{\varrho'}{\tau} = 0$ oppure $\tau \varrho + \left(\frac{\varrho'}{\tau}\right)' = 0$;

nel primo caso $\varrho' = 0 \Rightarrow R$ è costante (e in

tal caso $R = \varrho$ (il cerchio osculatore è un cerchio massimo)

oppure si ha $(*)$

★ La finestra di Viviani



$$\begin{cases} \text{sfera } \mathcal{S} & (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ \text{cilindro } \mathcal{C} & x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\gamma = \mathcal{S} \cap \mathcal{C}$$

curva
di Viviani

determiniamo i pti. singolari

$$\begin{cases} f = 0 \\ g = 0 \end{cases}$$

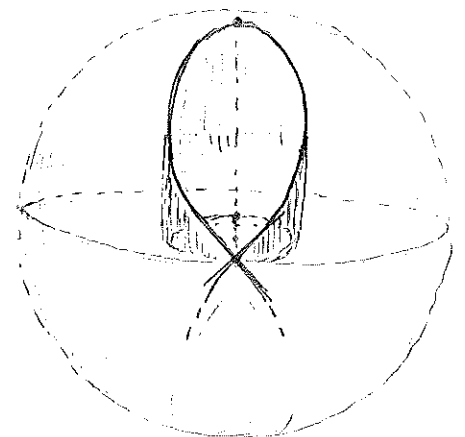
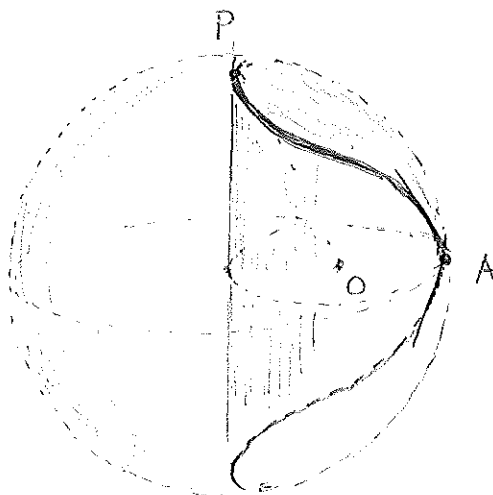
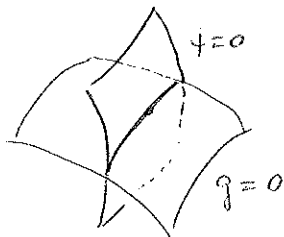
$$\nabla f \times \nabla g = 0$$

$$\nabla f \neq 0$$

$$\nabla g \neq 0$$

$$(i.e. \nabla f \parallel \nabla g)$$

(cf. l' "ippopede" di
Eudosso)



$$f = 0$$

regolarità ~

intersezione transversale

(teorema del Dini

generalizzato)

$$\nabla f \neq 0 : \text{infatti } (-\frac{1}{2}, 0, 0) \notin \mathcal{S}$$

$$\nabla g \neq 0 : = (0, 0, 0) \notin \mathcal{C} \quad \text{successi:}$$

$$g = 0$$

$$\nabla f \parallel \nabla g \Rightarrow z = 0 \Rightarrow y = 0 \quad (\text{chiuso geometricamente}) \quad x^2 + y^2 = \frac{1}{4} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4}, \quad x = \pm \frac{1}{2}, \quad \text{ma i punti}$$

$$(x + \frac{1}{2})^2 - 1 = 0$$

[punti chiusi geometricamente]

$$(x - \frac{1}{2})(x + \frac{3}{2}) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Variante (zh. Angelegen)

$$\underline{0} = \nabla f \times \nabla g = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ x + \frac{1}{2} & y & z \\ x & y & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \underline{i} \begin{pmatrix} -yz \end{pmatrix} - \underline{j} \begin{pmatrix} -xz \end{pmatrix} + \underline{k} \begin{pmatrix} \frac{y}{2} \end{pmatrix}$$

$$= -yz \underline{i} + xz \underline{j} + \frac{y}{2} \underline{k}$$

$$\Rightarrow y = 0 \quad \Rightarrow \text{(da } x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \text{)}$$

$$x = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow z = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

V1-18'

Determiniamo una parametrizzazione per γ

Poniamo (coordinate cilindriche)

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

Si ha $\rho = \frac{1}{2}$

e, da $x^2 + 2 \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} + y^2 + z^2 = 1$,

$$x + \underbrace{x^2 + y^2}_{= \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} + z^2 = 1 \Rightarrow x + z^2 = \frac{1}{2}$$

$$\gamma: \begin{cases} x + z^2 = \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

NOTA:

si può giungere alla parametrizzazione anche direttamente per via geometrica v. figura.

Come si vede, successivamente:

$$x = \frac{1}{2} \cos \varphi = \frac{1}{2} \left[2 \cos^2 \left(\frac{\varphi}{2} \right) - 1 \right] = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \frac{1}{2}$$

$$y = \frac{1}{2} \sin \varphi = \frac{1}{2} \cdot 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$z^2 = \frac{1}{2} - x = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi) = \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

$$\Rightarrow \text{(v. anche fig.)} \quad z = + \sin \frac{\varphi}{2} \quad \text{In def.}$$

$$\text{se } t = \frac{\varphi}{2}$$

A partire da
è facile calcolare
 R, τ e verificare,
a ritroso, che
 γ è sferica...

$$\gamma: \begin{cases} x = \cos^2 t - \frac{1}{2} \\ y = \sin t \cos t \\ z = \sin t \end{cases} \quad t \in [0, \pi)$$

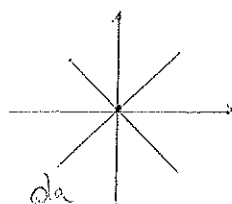
$$\begin{cases} \dot{x} = 2 \cos t (-\sin t) = -\sin 2t \\ \dot{y} = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t = \cos 2t \\ \dot{z} = \cos t \end{cases} \quad ds = \sqrt{1 + \cos^2 t} dt \dots$$

$$t=0 \Rightarrow \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1, \quad \dot{z}(0) = 1$$

$$t=\pi \Rightarrow \dot{x}(\pi) = 0, \quad \dot{y}(\pi) = 1, \quad \dot{z}(\pi) = -1$$

[la curva è regolare e non richiediamo l'unicità, non lo è secondo la def. da noi data]

È facile a questo punto determinare le espressioni di R e τ , a partire da



$$R = \frac{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|}{\|\dot{\underline{r}}\|^3}$$

$$\dot{\underline{r}} = (-\sin 2t, \cos 2t, \cos t)$$

$$\ddot{\underline{r}} = (-2\cos 2t, -2\sin 2t, -\sin t)$$

$$\ddot{\underline{r}} = (+4\sin 2t, -4\cos 2t, -\cos t)$$

$$\tau = - \frac{\langle \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}, \ddot{\underline{r}} \rangle}{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|^2}$$

ad esempio (per confronto con il calcolo alternativo che faremo in seguito) poniamo $t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{r}(\frac{\pi}{2}) = (-\frac{1}{2}, 0, 1)$

$$\Rightarrow \dot{\underline{r}} = (0, -1, 0)$$

$$\|\dot{\underline{r}}\| = 1$$

$$\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}} =$$

$$\ddot{\underline{r}} = (2, 0, -1)$$

$$\ddot{\underline{r}} = (0, 4, 0)$$

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\| \dots \| = \sqrt{2^2 + 0 + 1} = \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{5} \quad . \quad \text{Si ha subito } \tau = 0 \text{ perché } \ddot{\underline{r}} = -4\dot{\underline{r}} \dots$$

Riprendiamo la curva di v'ioni

$$V: \begin{cases} (x + \frac{1}{2})^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Calcolo della curvatura e
torsione per via
indiretta in un pto
(bi)regolare ($K > 0$)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + \frac{1}{4} + z^2 = 1 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{matrix} x^2 + y^2 + x + z^2 = \frac{3}{4} \\ \underbrace{}_{\frac{1}{4}} \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x + z^2 + \frac{1}{2} = 1 \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} x + z^2 = \frac{1}{2} \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \quad (A)$$

Sia $x = x(s)$ etc. si ha:
 $\frac{1}{ds} \approx$ lunghezza d'arco

$$\begin{cases} x' + 2zz' = 0 \\ 2xx' + 2yy' = 0 \end{cases} \quad (B)$$

Deriviamo successivamente

$$\begin{cases} x'' + 2z'^2 + 2zz'' = 0 \\ x'^2 + 2xx'' + y'^2 + 2yy'' = 0 \end{cases} \quad (C)$$

$$\begin{cases} x''' + \underbrace{2 \cdot 2 \cdot z' z''}_{4z'z''} + \underbrace{2z'z''}_{6z'z''} + 2zz''' = 0 \\ 2x'a'' + a'a'' + 2x''' + 2y'y'' + y'y'' + yy''' = 0 \end{cases} \quad (D)$$



Tali relazioni consentono, usate ricorsivamente, di calcolare R e τ in un qualsiasi punto della curva; il metodo usato è del tutto generale. $\triangle$ tutto funziona se $R > 0 \dots$

(+) usate assieme a $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ (e le derivate)

Per esempio sia $P: (-\frac{1}{2}, 0, 1)$

Si trova:

$$\text{in } P \quad (B) \quad \begin{cases} x' + 2 \cdot 1 \cdot z' = 0 \\ -\frac{1}{2} x' = 0 \end{cases} \Rightarrow x' = 0 \quad \left. \begin{matrix} \\ \\ \end{matrix} \right\} z' = 0$$

da $x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ si ha $y' = \pm 1$

(Dipende dall'orientamento...) scegliamo $y'(P) = +1$

$\Rightarrow \underline{r}' = \underline{t}(P) = \underline{j}$. Proseguiamo:

(C) $\begin{cases} x'' + 2z'' = 0 \\ -\frac{1}{2}x'' + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x'' = 2$ $\begin{matrix} z'' = -1 \\ \uparrow \end{matrix}$

Mostra y'' : determiniamola così: da

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1$ si ha , derivando

$\begin{matrix} 2x'x'' & + & 2y'y'' & + & 2z'z'' & = & 0 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \\ 0 & & +1 & & 0 & & \end{matrix} \Rightarrow y''(P) = 0$

$\Rightarrow \underline{r}''(P) = 2\underline{i} - \underline{k} \Rightarrow R = \|\underline{r}''\| = \sqrt{5} \quad \Downarrow$

troviamo (D)

$\begin{cases} x''' + 2z''' = 0 \\ -\frac{1}{2}x''' = 0 \end{cases} \Rightarrow x''' = 0 \quad \Downarrow \quad z''' = 0 \quad S = \frac{1}{\sqrt{5}}$

deriviamo ancora

$\begin{matrix} x''^2 & + & \underbrace{x'x'''}_0 & + & \underbrace{y''^2}_0 & + & \underbrace{y'y'''}_{+1} & + & \underbrace{z''^2}_1 & + & \underbrace{z'z'''}_0 & = & 0 \\ \parallel & & & & & & & & & & & \\ 4 & & & & & & & & & & & \end{matrix}$

$4 + y''' + 1 = 0$

$y''' = -5$

$\underline{r}'''(P) = -5\underline{j}$

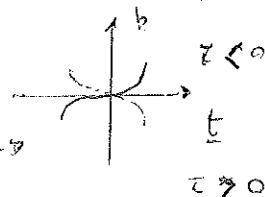
A questo punto possiamo calcolare la torsione in P :

$$\tau = - \frac{\langle \underline{r}' \times \underline{r}'', \underline{r}''' \rangle}{|\underline{r}'|^3} = - \frac{1}{5} \begin{vmatrix} 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

anche direttamente... $\underline{r}' \times \underline{r}''' = \underline{0}$ $\tau = 0$
in P

Era da attendersi tale risultato?

Sì: per ragioni di simmetria, la curva, in un intorno di P , rimane da una stessa parte del primo osculatore e pertanto, in virtù della descrizione locale sui piani principali, τ deve essere nulla, altrimenti



il primo osculatore in P non è $\underline{z} = \underline{i}$

$$= \sqrt{5} \underline{b}$$

la sua equazione è

$$\langle \underline{X} - \underline{P}, \underline{r}' \times \underline{r}'' \rangle = 0$$

ciò consente di concludere che $\tau'(P) = 0$

$$-(2x + \frac{1}{2}) - 2(2-1) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{j} \times (2\underline{i} - \underline{r}) =$$

$$= -2\underline{r} - \underline{i}$$

$$= -\underline{i} - 2\underline{r}$$

$$2x + \frac{1}{2} + 2z - 2 = 0$$

$$2x + 4z - 3 = 0 \quad (\text{controlla: } 2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 4 - 3 = 0)$$

Osservazione: in virtù della sfericità di γ , e da $\tau(P) = 0$, possiamo anche concludere che $\tau'(P) = 0$, e che

$$\lim_{P' \rightarrow P} \left| \frac{\underline{g}'}{\tau} \right| = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \quad (\text{si ricordi } R^2 = \rho^2 + \left(\frac{\underline{g}'}{\tau}\right)^2 \quad \tau \neq 0 \dots)$$

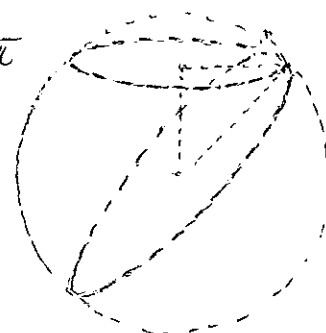
◇ I teoremi di Fenchel e di Fary-Milnor

Sia γ una curva spaziale, liscia, regolare, chiusa.

Si ha $\int_{\gamma} \kappa ds \geq 2\pi$, e vale
 $\Leftrightarrow \gamma$ è piana e convessa.
curvatura totale

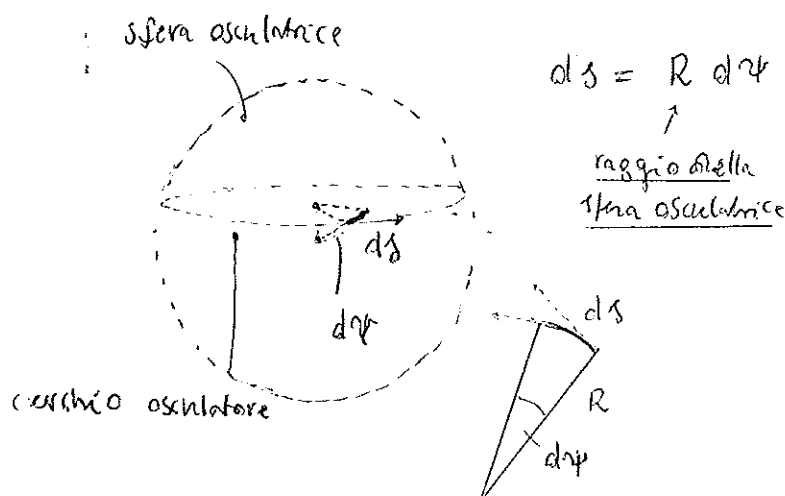
(Fenchel)

e, se γ è annodata, è $\int_{\gamma} \kappa ds > 4\pi$



(Fary-Milnor)

Commento:

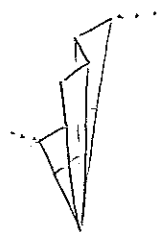
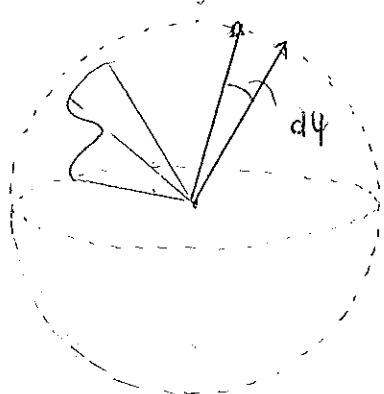


$$\int_{\gamma} \kappa ds = \int_{\gamma} \frac{1}{\rho} ds = \int_{\gamma} \frac{R}{\rho} d\psi$$

$$\geq \int d\psi = 2\pi$$

$R > \rho$ se γ non è piana

Indicatrice delle tangenti



Si forma un "ventaglio"
 "l'integrale" dei $d\psi$
 è certamente $\geq 2\pi$

e vale 2π se e solo se la
 curva è piana (non ci sono "pieghe")
 e convessa (è mantiene "la stessa
 direzione") $\Rightarrow$ Fenchel.

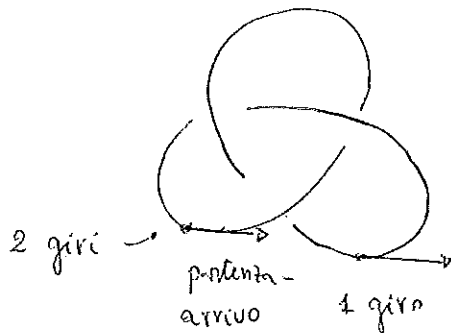


$$\sum_{i=1}^n \nu_i = 2\pi$$

Ora, se $\mathcal{C}$ è annodata, ℓ (o meglio, φ) compie
almeno due giri, e non può essere piana

$\Rightarrow$ Farby - Milnor

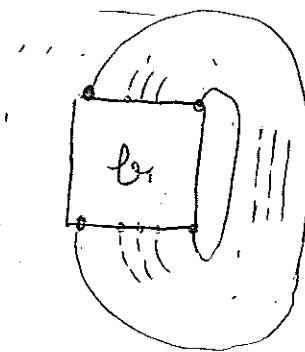
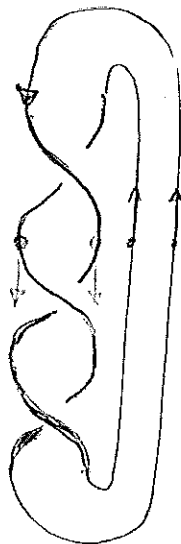
ex:



per dimostrazioni
 rigorose v. per ex.
 di Corrado

Ciò si vede benissimo
 in generale se il nodo è
 rappresentato come "chiusura di
una treccia" (ciò è sempre
possibile, teorema di Alexander...)

figura "quasi piana"
 per evitare "pieghe"



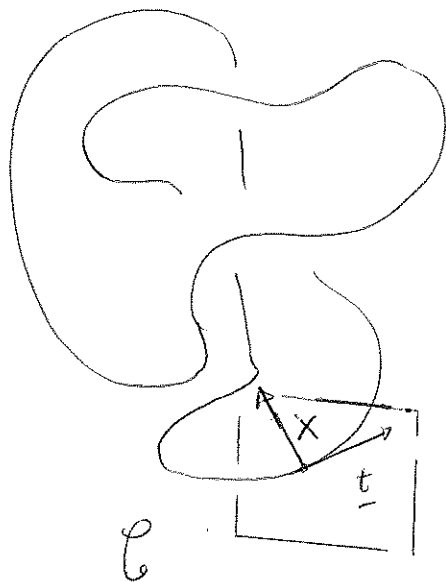
qui $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \omega ds > \#$ fili della
 treccia $\mathcal{B}$
 con la quale
 si costruisce $\mathcal{C}$

Si possono anche "smussare"
 gli incroci



◇ Complementi

Sia $\mathcal{C}$ una curva spaziale, liscia, bi-regolare ($R > 0$) chiusa



Sia $X = X(s)$ un campo vettoriale normale (i.e. $X \perp \underline{t} \equiv 0$) con $\|X'\| = 1$.

Definiamo il twist (distorsione) di X lungo $\mathcal{C}$ tramite:

$$Tw_{\mathcal{C}}(X) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \langle X', \underline{t} \times X \rangle ds$$

Se pensiamo, in particolare, $X = \underline{b}$, $\hat{r}$ $\left(\begin{array}{l} \triangle \mathcal{C} \\ \hat{r} \text{ irregolare...} \\ \text{v. oltre...} \end{array} \right)$

$$Tw_{\mathcal{C}}(\underline{b}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \underbrace{\langle \underbrace{\underline{b}'}_{\parallel \underline{n}} \rangle}_{-\underline{n}} \cdot \underbrace{\underline{t} \times \underline{b}}_{\tau \underline{n}} ds = - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \tau ds$$

torsione totale

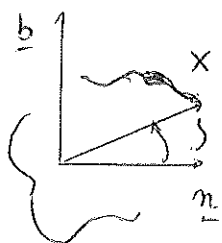
posto

$$X = \cos \varphi \underline{n} + \sin \varphi \underline{b} \quad , \quad \text{da}$$

$$\begin{aligned} X' &= -\sin \varphi \cdot \varphi' \underline{n} + \cos \varphi \underline{n}' + \cos \varphi \cdot \varphi' \underline{b} + \sin \varphi \underline{b}' = \\ &= -\sin \varphi \cdot \varphi' \underline{n} + \cos \varphi (-R \underline{t} - \tau \underline{b}) + \cos \varphi \cdot \varphi' \underline{b} + \\ &\quad + \sin \varphi \cdot \tau \underline{n} \end{aligned}$$

$$= -R \cos \varphi \underline{t} + \sin \varphi (\tau - \varphi') \underline{n} + \cos \varphi (\varphi' - \tau) \underline{b}$$

$$\text{e } \underline{t} \times X = \cos \varphi \underbrace{(\underline{t} \times \underline{n})}_{\underline{b}} + \sin \varphi \underbrace{(\underline{t} \times \underline{b})}_{-\underline{n}} =$$



$$\underline{t} \times \underline{x} = -\sin \varphi \cdot \underline{n} + \cos \varphi \cdot \underline{b} \quad \text{segue}$$

$$\langle \underline{x}', \underline{t} \times \underline{x} \rangle = \sin^2 \varphi (\varphi' - \tau) + \cos^2 \varphi \cdot (\varphi' - \tau)$$

$$= \varphi' - \tau$$

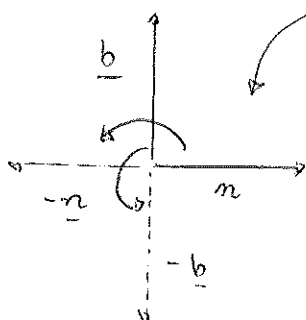
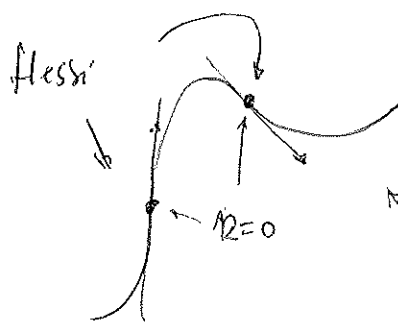
$$\Rightarrow Tw_{\mathcal{C}}(X) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^e \underbrace{\varphi'}_{\substack{\uparrow \\ \text{Z}}} ds}_{\substack{\uparrow \\ \text{Z}}} - \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{C}} \tau ds}_{\substack{\uparrow \\ \text{Z}}} \quad (\star)$$

numero di avvolgimento della curva descritta da X attorno all'origine ..
nel r.f. $(0, \underline{n}, \underline{b})$ solidale con la curva

torsione totale

total twist di $X \equiv [Tw_{\mathcal{C}}(X)] \pmod{1}$

Distorsione totale

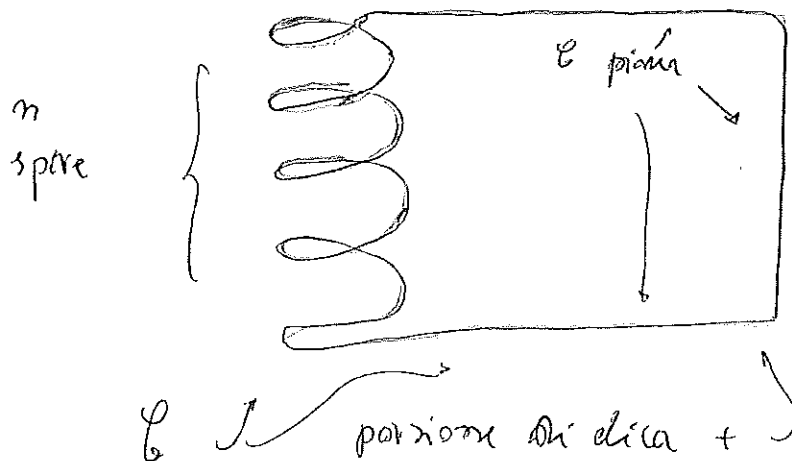


* notiamo che in un punto di flesso ($R=0$) il triedro di Frenet non è definito, e varia, in ogni caso, in modo discontinuo, ruotando di un angolo pari a π

$Tw_{\mathcal{C}}(X)$ invece non varia, se $X = X(s)$ è liscio $\Rightarrow$ i due contributi a $Tw_{\mathcal{C}}$

in $(\star)$ sono entrambi discontinui ma le loro variazioni si compensano.

Consideriamo il seguente esempio,
di valenza generale



angolo di pendenza α

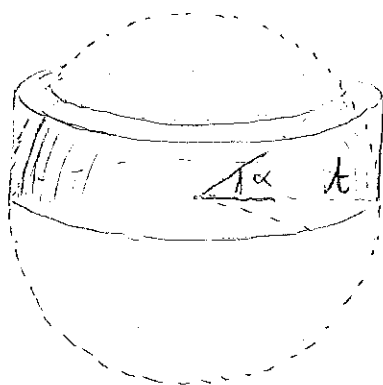
Calcoliamo $TW_{\theta}(x)$

$x = b \dots$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\theta} z ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi n} \sin \alpha \cdot dt = n \cdot \sin \alpha$$

* Cf. teorema di Archimede



$$\underline{r} = a \cos t \underline{i} + a \sin t \underline{j} + b t \underline{k}$$

$$\underline{\dot{r}} = -a \sin t \underline{i} + a \cos t \underline{j} + b \underline{k}$$

$$\|\underline{\dot{r}}\| dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt = ds$$

$$\gamma = -\frac{b}{a^2 + b^2} = -b \quad \text{se } a^2 + b^2 = 1$$

$$\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{se } a^2 + b^2 = 1$$

$$\sin \alpha = |\gamma|$$

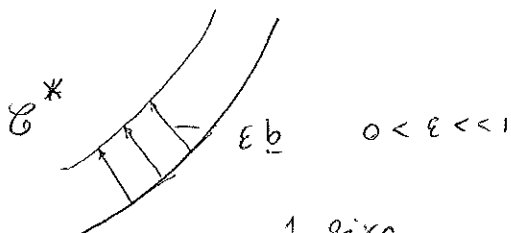
$$ds = dt$$

$$= n \cdot \frac{1}{2\pi} \quad \text{area forma sferica}$$

$$= n \cdot \frac{1}{4\pi} 2A$$



Si ha $LR(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$

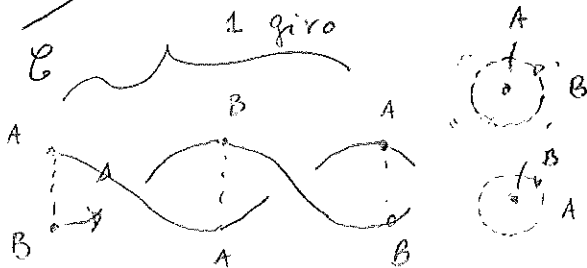


numero di
allacciamento, o
di legame

II

n

(determinabile in vari modi)

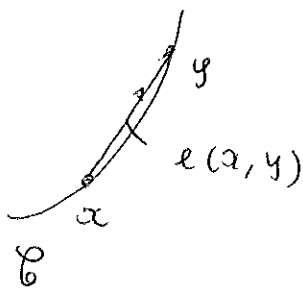


consideriamo

$w_2(\mathcal{C})$

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{\mathcal{C} \times \mathcal{C}} e^* dz \quad \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

writhe



numero di
avvitamento

$$e: \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow S^2$$

$$(x, y) \mapsto \frac{y-x}{|y-x|} \equiv e(x, y)$$

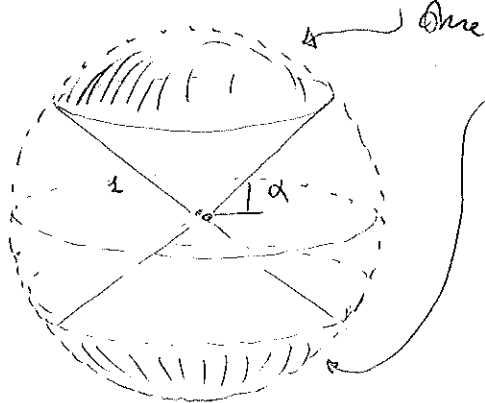
★ In modo diretto e intuitivo: $\frac{1}{4\pi} \cdot \text{area}$

(orientata) Spazzatura su S^2 dai vettori $e(x, y)$.
e con molteplicità

Ci si convince facilmente, nel caso di esame, che

(si possono nascondere i tratti pieni di $\mathcal{C}$) tale area vale quella delle

due calotte, vale a dire (ancora Archimede)



$$\frac{1}{4\pi} \cdot 4\pi (1 - \sin \alpha) \cdot n =$$

$$= n(1 - \sin \alpha)$$

tale area è
spazzatura n
volte

(n = numero delle
spitze)

Si ha allora

$$\begin{array}{ccc} \text{linking number} & \text{twisting} & \text{writhe} \\ LR(C, C^*) & = & TW + W_2 \end{array}$$

$$n = n_{\text{bind}} + n(1 - \sin \alpha)$$

invariante topologico, intero

dependono dalla geometria della curva, e non sono interi

tale relazione è generale:

$$LR = TW + W_2$$

nota



è la formula di



Calugareanu (- white)

utilissima anche nelle applicazioni (ex. biologia, struttura del DNA)

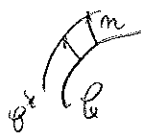
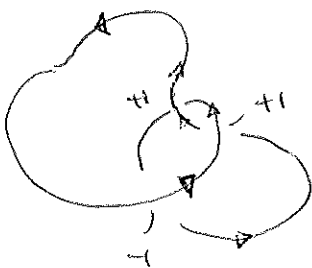
proiezione di un nodo closed in 3-d

Nota:

Per una curva "quasi piana", W_2 e Z

e si calcola tramite un "blackboard framing"

$$W = L(C, C^*) \quad \text{algebraicamente}$$

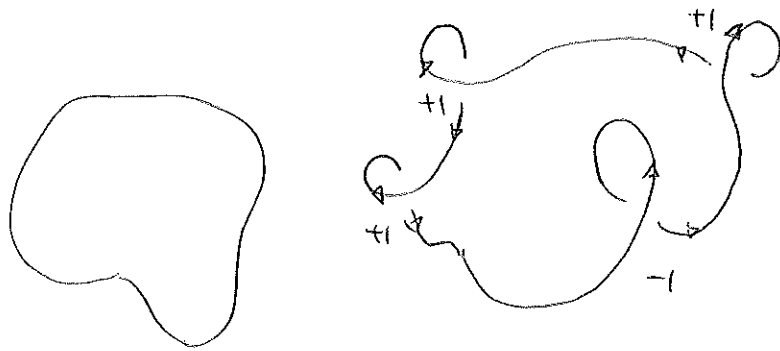


Nell'esempio

direttamente:



$$-1 + 1 + 1 = +1$$



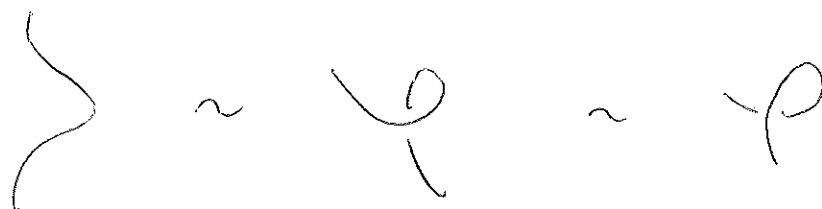
$$WZ = 0$$

$$WZ = 3 - 1 = 2$$

In caso nell' caso

Movimenti di Reidemeister

I :



II :



III :



WZ è
invariante
rispetto a
II e III

ma
non rispetto
a I

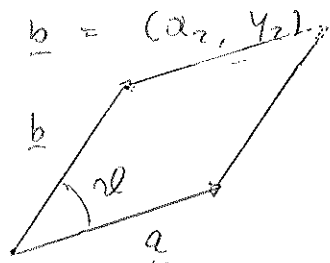
✧ Richiamo: interpretazione geometrica del determinante
in dimensione 1, 2 e 3 utile per il seguito

✧ dim 1 lunghezza (orientata) $\det A = a$ $A = (a)$

✧ dim 2 area (orientata) di un parallelogramma

$$\underline{a} = (x_1, y_1)$$

$$\underline{b} = (x_2, y_2)$$



$$A = \|\underline{a}\| \|\underline{b}\| |\sin \alpha|$$

$$A = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}$$

[anche nello spazio; si ricordi che

$$A^2 = \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 \sin^2 \alpha = \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 (1 - \cos^2 \alpha)$$

$$= \|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^2$$

$$\Rightarrow A = \sqrt{\|\underline{a}\|^2 \|\underline{b}\|^2 - \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle^2}$$

(cf. Cauchy-Schwarz)

Proseguiamo:

$$A^2 = (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) - (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 =$$

$$= \underbrace{x_1^2 x_2^2 + y_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 y_2^2}_{\text{sum}} - \underbrace{x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 y_1 y_2 - y_1^2 y_2^2}_{\text{sum}} =$$

$$= x_2^2 y_1^2 + x_1^2 y_2^2 - 2(x_1 y_2)(x_2 y_1) =$$

$$= (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 \Rightarrow A = \left| \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right| = |\det A|$$

Una dim. alternativa istruttiva si trova dei numeri complessi...

✧ dim 3 : volume (orientato) di un parallelepipedo

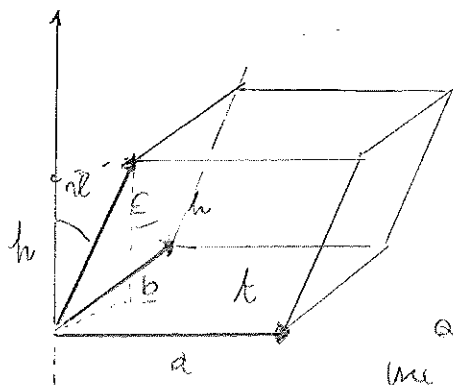
$$V = A \cdot h = \|\underline{a} \times \underline{b}\| \|\underline{c}\| |\cos \alpha|$$

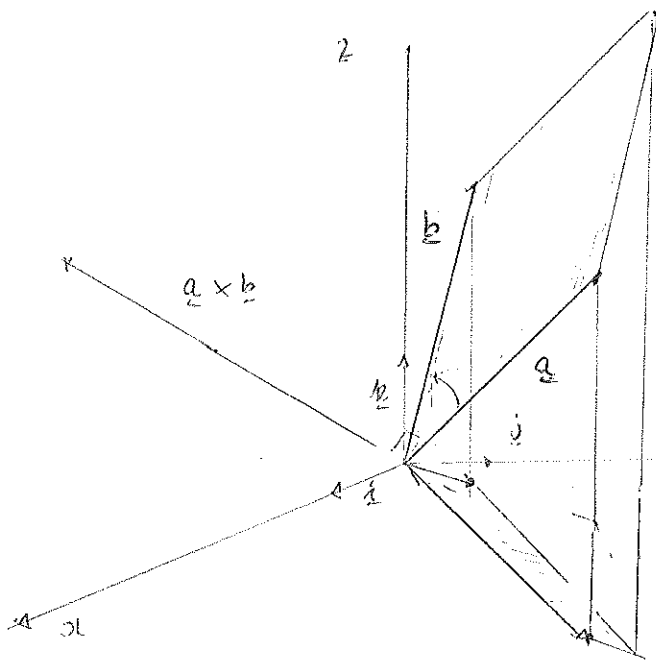
$$= |\langle \underline{c}, \underline{a} \times \underline{b} \rangle| = \text{prodotto misto}$$

$$= \left| \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \right| = |\det(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b})|$$

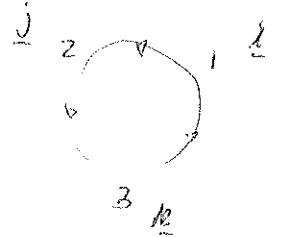
$$(\underline{c}, \underline{a}, \underline{b}) = \begin{pmatrix} -\underline{c} \\ -\underline{a} \\ -\underline{b} \end{pmatrix}$$

$\underline{a}$ due volte $\underline{a} \times \underline{b}$ è
un vettore area (orientata)





interpretazione geometrica
delle componenti del
prodotto vettoriale:
aree orientate delle
proiezioni del parallelogramma
nello spazio individuato
da $\underline{a}$ e $\underline{b}$ sui
piani coordinati



$$\underline{a} \times \underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \underline{i} \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \underline{j} \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

Tale interpretazione è cruciale

per comprendere appieno l'analisi e la geometria delle
superficie

$$d\vec{\sigma} = \overbrace{(\underline{r}_u \times \underline{r}_v)}^{\neq 0} du dv = \underline{n} \cdot d\sigma$$

elemento
d'area orientata

$$d\sigma = \|\underline{d\vec{\sigma}}\|$$

$$= \|\underline{r}_u \times \underline{r}_v\| du dv$$

"area di un parallelogramma
infinitesimo"

