TOPOLOGIA E GEOMETRIA DIFFERENZIALE
Prof. M. Spera a.a. 2009/10

Lezione XXV

in $\mathbb{R}^3$ | Sia

$$\omega = \underset{\text{forma di volume}}{dx \wedge dy \wedge dz}$$

$$X = \underbrace{\alpha}_{X_1} \frac{\partial}{\partial x} + \underbrace{\beta}_{X_2} \frac{\partial}{\partial y} + \underbrace{\gamma}_{X_3} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\mathcal{L}_X \omega = d\, i_X \omega + \underbrace{i_X d\overset{0}{\overset{\parallel}{\omega}}}_{\overset{\parallel}{0}}$$

$$i_{X_1} \omega = \alpha\, dy \wedge dz$$

$$i_{X_2} \omega = -\beta\, dx \wedge dz$$

$$i_{X_3} \omega = \gamma\, dx \wedge dy$$

$$= d\left[\alpha\, dy \wedge dz - \beta\, dx \wedge dz + \gamma\, dx \wedge dy\right]$$

$$= \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz - \frac{\partial \beta}{\partial y} dy \wedge dx \wedge dz + \frac{\partial \gamma}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy$$

[ricordare che in generale $\mathcal{L}_{\alpha X} \neq \alpha \mathcal{L}_X$, α funzione]

$$= \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz$$

div X

[⚠ è sottintesa la metrica euclidea]

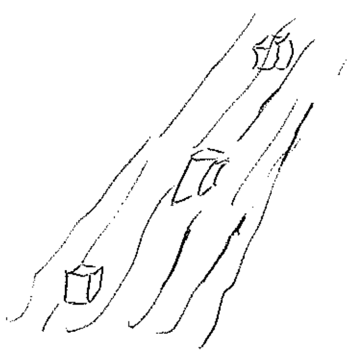
Per una varietà riemanniana

$$\mathcal{L}_X \mathrm{vol}_g = \mathrm{div}\, X\, \mathrm{vol}_g$$

X conserva $\mathrm{vol}_g \iff \mathrm{div}\, X = 0$

cruciale in fluidodinamica

div=0 : incomprimibilità del fluido



X = velocità

* Calcoliamo, per completezza, la derivata di Lie direttamente.

$$\mathcal{L}_X (dx \wedge dy \wedge dz) = \sum_{i=1}^{3} \mathcal{L}_{X_i} (dx \wedge dy \wedge dz)$$

Consideriamo, per fissare le idee, X_1

$$\mathcal{L}_{X_1} (dx \wedge dy \wedge dz) =$$

$$= \mathcal{L}_{X_1} dx \wedge dy \wedge dz + dx \wedge \mathcal{L}_{X_1} dy \wedge dz + dx \wedge dy \wedge \mathcal{L}_{X_1} dz$$

Ma $\mathcal{L}_{X_1} dx = d \mathcal{L}_{X_1} x = d\alpha$

$\mathcal{L}_{X_1} dy = d \underbrace{\mathcal{L}_{X_1} y}_{=0} = 0$

$\mathcal{L}_{X_1} dz = 0$

$\mathcal{L}_{X_1} x = dx \left(\alpha \frac{\partial}{\partial x}\right) = \alpha$

Dunque $\mathcal{L}_{X_1} (dx \wedge dy \wedge dz) = d\alpha \wedge dy \wedge dz$

$$= \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz$$

Proseguendo, si arriva facilmente a

$$\mathcal{L}_X (dx \wedge dy \wedge dz) = (\operatorname{div} X) \cdot dx \wedge dy \wedge dz$$

✓

4 Esempio fondamentale

Calcoliamo $\mathcal{L}_X g$ $\qquad$ g metrica riemanniana

in coordinate

[nota: non possiamo applicare la formula di Cartan: g non è una 2-forma]

$$\mathcal{L}_X g = \mathcal{L}_X (g_{ij}\, dx^i dx^j) =$$

$$= (\mathcal{L}_X g_{ij})\, dx^i dx^j + g_{ij} (\mathcal{L}_X dx^i) dx^j + g_{ij}\, dx^i (\mathcal{L}_X dx^j)$$

$X = \xi^i \dfrac{\partial}{\partial x^i}$

$\mathcal{L}_X dx^i$ (variante)

$\| $

$(d i_X + i_X d)\, dx^i$

$= d(i_X dx^i)$

$= d\xi^i$

$$= X(g_{ij})\, dx^i dx^j + g_{ij}\, d\xi^i\, dx^j + g_{ij}\, dx^i\, d\xi^j$$

$$= \xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} dx^i dx^j + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} dx^i dx^j + g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} dx^i dx^j$$

$g_{ij}\, d\xi^i = g_{kj}\, d\xi^k = g_{kj} \dfrac{\partial \xi^k}{\partial x^i} dx^i$

$g_{ij}\, d\xi^j = g_{ik}\, d\xi^k = g_{ik} \dfrac{\partial \xi^k}{\partial x^j} dx^j$

$$= \left[\xi^k \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} + g_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + g_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} \right] dx_i dx_j$$

X è detto di Killing se $\mathcal{L}_X g = 0$

[i.e. se lascia invariata g]

Nel caso euclideo $(\mathbb{R}^n, g = \sum_i (dx^i)^2)$

$g_{ij} = \delta_{ij}$ si ha X Killing $\Leftrightarrow$ $\forall i,j$

$$\delta_{kj} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^i} + \delta_{ik} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^j} = 0$$

i.e.
$$\boxed{\frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} = 0}$$

I campi vettoriali costanti e i generatori delle rotazioni del piano (i,j) :

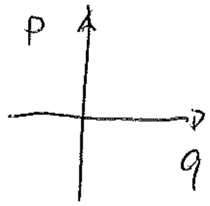
$$x^i \frac{\partial}{\partial x^j} - x^j \frac{\partial}{\partial x^i}$$

sono di Killing (verifica immediata)

$\ast$ Breve incursione nella meccanica

Interpretazione geometrico-differenziale della meccanica

Lavoriamo in $(\mathbb{R}^2, \omega = dq \wedge dp)$
spazio delle fasi



ω : forma simplettica (chiusa, non degenere)
(in $\mathbb{R}^{2n}$ $\omega = \sum dq_i \wedge dp_i$)

$X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$ è detto simplettico (o localmente hamiltoniano) se $\boxed{\mathcal{L}_X \omega = 0}$, i.e. X conserva la forma simplettica

Dalla formula di Cartan si trova

$$0 = \mathcal{L}_X \omega = d\, i_X \omega + i_X \underbrace{d\omega}_{=0} = d\, i_X \omega$$

i.e. X è simplettico $\Leftrightarrow$ $i_X \omega$ è chiusa $\Leftrightarrow$ è localmente esatta (in generale). In $\mathbb{R}^2$, è esatta (Poincaré):

$$i_X \omega = d\lambda_X$$

per una qualche λ_X
($\lambda_X \to \lambda_X + c$)
Hamiltoniana corr. a X

Viceversa, data λ, $\exists\,(!)\ X_\lambda$ tale che $i_{X_\lambda}\omega = d\lambda$

$\boxed{X_\lambda : \text{ gradiente simplettico di } \lambda \text{, o campo hamiltoniano associato a } \lambda}$

$$\lambda = H \qquad dH = \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp$$

$$X_H = + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial}{\partial p} \qquad \text{infatti:} \qquad i_{X_H}\omega =$$

$$(dq \wedge dp)\left(+\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}, \cdot\right) = \frac{\partial H}{\partial p} dp + \frac{\partial H}{\partial q} dq$$

4 Calcolo del gradiente simplettico in generale

$$w = w_{ij}\, dx^i \wedge dx^j \qquad (i<j)$$

$\omega \sim (w_{ij}) =: \Omega$
$$= \frac{1}{2}\, \omega_{ij}\, dx^i \wedge dx^j \qquad i \neq j \qquad w_{ij} = -w_{ji}$$

$$dH = \frac{\partial H}{\partial x^j} dx^j \qquad i_X \omega = dH$$

$$X = \xi^k \frac{\partial}{\partial x^k}$$

$$\left(\frac{1}{2} w_{ij}\, dx^i \wedge dx^j\right)(X, Y) = dH(Y)$$

$$= \frac{1}{2}\omega_{ij}\left[dx^i(X)\, dx^j(Y) - dx^i(Y)\, dx^j(X)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\omega_{ij}\left[dx^i\left(\xi^k \frac{\partial}{\partial x^k}\right) dx^j(Y) - dx^i(Y)\, dx^j\left(\xi^k\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\omega_{ij}\left(\xi^i\, dx^j(Y) - \xi^j\, dx^i(Y)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\omega_{ij}\,\xi^i - \omega_{ji}\,\xi^i\right] dx^j(Y)$$

$$= \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\ \omega_{ij}\,\xi^i dx^j\ (Y) \qquad \text{i.e}$$

$$\omega_{ij}\,\xi^i\, dx^j = \frac{\partial H}{\partial x^j} dx^j$$

$$\boxed{\omega_{ij}\,\xi^i = \frac{\partial H}{\partial x^j}} \qquad (\Omega^T)_{ji}\, \xi^i = \frac{\partial H}{\partial x^j}$$

$$\Omega^T \xi = \nabla H \qquad \xi = \Omega^{-T}\nabla H$$

è non singolare

Nel nostro caso

$$\omega = dq \wedge dp \qquad (\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \equiv \Omega$$

$$\underset{}{\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\omega_{12}}}}\, \xi^1 = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \xi^1 = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \Omega^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

con gli indici, direttamente ↗

$$\underset{-1}{\underset{\shortparallel}{\omega_{21}}}\, \xi^2 = + \frac{\partial H}{\partial q} \qquad \xi^2 = - \frac{\partial H}{\partial q}$$

e in termini matriciali

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial}{\partial q} - \frac{\partial H}{\partial q}\frac{\partial}{\partial p}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\Omega^T} \underbrace{\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}}_{\xi} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{pmatrix}}_{\nabla H}$$

Importante: una forma simplettica esiste solo in dim pari, questo perché se $\Omega = (\omega_{ij})$ è antisimmetrica $(\Omega = -\Omega^T)$, è

$$\det \Omega = \det(-\Omega^T) = (-1)^n \det \Omega^T$$
$$= (-1)^n \det \Omega$$

sicché, se n è pari, si ha un'identità, se è dispari $\det \Omega = 0$