

Addendum II

Elementi di geometria
Prof. M. Spura

Rappresentazione matriciale (unificata) di
una "affinità" in A^n

$$f_{(A,b)} : x \mapsto Ax + b$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A} \boxed{x} + \boxed{b}$$

$$A \in GL(n, \mathbb{R})$$

$$(det A \neq 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & -e & - \\ \hline b & A \\ \hline 1 \end{pmatrix}$$

x	e
b	A

una "affinità" dipende da

$$n^2 + n = n(n+1)$$

parametri

||
* una "affinità" è univocamente determinata
||
prescrivendo le immagini di $n+1$
punti in "posizione generale" $P_1, \dots, P_{n+1}$
Cioè, ad es. i vettori $\vec{P_1 P_i}$ costituiscono
una base di $\mathbb{R}^n$ (sp. vettoriale modellante)

In fatti, $\forall P \in \mathbb{A}^n$ si

$$P = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i P_i$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i = 1$$

(coordinate baricentriche)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1^{(1)} & & \alpha_1^{(n+1)} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_n^{(1)} & & \alpha_n^{(n+1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_{n+1} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ P $\uparrow$ P_1 $\uparrow$ P_{n+1}

$$\det(\) \neq 0$$

Se f è un'afinità

$$f(P) = f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \mu_i P_i\right) = \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i f(P_i)$$

(i.e. è determinata l'immagine di ogni punto, date quelle dei P_i)

viceversa, fissate le immagini dei P_i ,

$P_i \mapsto P'_i$ (i P'_i vanno assegnati in posizione generale)

$\exists!$ l'afinità f tale che

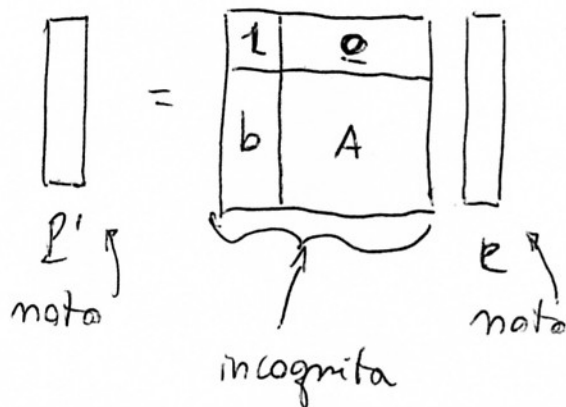
$f(P_i) = P'_i$: essa è necessariamente

$$f(P) := \sum_{i=1}^{n+1} \mu_i P'_i$$

Possiamo finire alla risposta "quanti phi? $n+1$ "

anche osservando che analiticamente ogni

richiesta $E \mapsto E'$ in



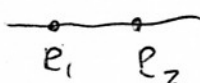
condurre a n condizioni su f . Pertanto

occorre e basta

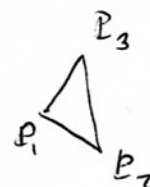
fixare le immagini di $\frac{n(n+1)}{n} = n+1$

punti (in pos. generale)

A^1 : 2 phi dist.



A^2 : 3 phi non allineati ($\Rightarrow$ distinti)



A^3 : 4 phi non complanari

($\Rightarrow$ a tre a tre non allineati)

