GEOMETRIA Prof. M. Spera a.a. 2010/11

Prova scritta del 6 febbraio 2012

(1) Determinare la superficie rigata Σ che ha come curva direttrice la circonferenza

$$\mathscr{C}: \quad r_{\mathscr{C}}(\varphi) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

e le cui generatrici hanno direzione

$$\underline{w} = \underline{w}(\varphi) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\varphi, -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi, \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Dimostrare che Σ è sviluppabile (i.e. il piano tangente non varia lungo una generatrice fissata). Di che tipo di superficie si tratta?

(2) Determinare la superficie ottenuta ruotando la retta $x + z = \sqrt{2}$ attorno all'asse z.
Calcolarne le curvature principali e la curvatura gaussiana. Che relazione ha con la sup. dell'es. (1)?

(3) Dimostrare che, dato un qualsiasi triangolo geodetico $\mathcal{T}$ nel piano iperbolico, è
$A(\mathcal{T}) < \pi$. Trovare un esempio di area
"triangolo geodetico con vertici all'infinito" con angoli nulli e area $= \pi$.

Tempo a disposizione 2h. Le risposte vanno adeguatamente giustificate.

① ② Determinare la superficie rigata Σ che ha come curva direttrice la circonferenza $\mathcal{C}$:

$$\mathcal{C}: \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\varphi \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi \\ z = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

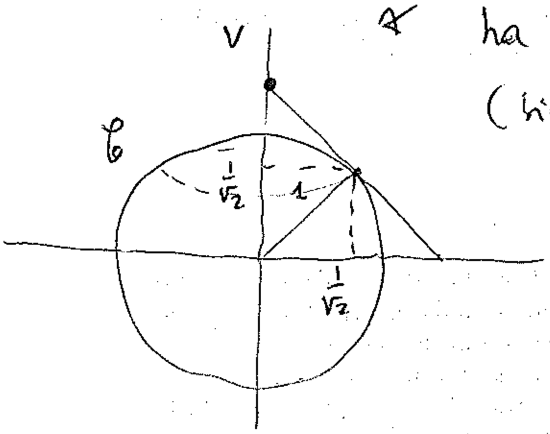
[usare come parametri φ e t]

e le cui generatrici hanno direzione

$$\underline{w} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\varphi , -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi , \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Di che tipo di superficie si tratta? Dimostrare che Σ è sviluppabile

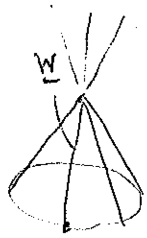
$V: (0,0,\sqrt{2})$ È un cono che si appoggia su $\mathcal{C}$ e ha vertice V. È ovviamente sviluppabile (v. anche oltre) (quindi $K = 0$)



infatti

$$\underline{r}(\varphi, t) = \underline{r}_{\mathcal{C}}(\varphi) + t\,\underline{w}$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos\varphi + t\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi\right) , \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi + t\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\varphi\right), t\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)$$



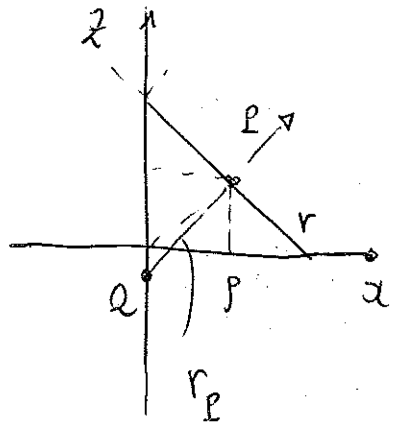
$t \neq 1$ ($t=1$ dà il vertice del cono)

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1-t) \cos\varphi , \frac{1}{\sqrt{2}}(1-t) \sin\varphi , t\left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right)$$

$$\parallel$$

$$t\,\frac{1}{\sqrt{2}}$$

il piano tangente è generato da $r'_{\varphi}(\varphi)$ $\left(' = \frac{d}{d\varphi} \right)$ e $\underline{w}$, e non muta per φ fisso (cioè lungo una generatrice). La superficie Σ è pertanto sviluppabile $(e\ K = 0)$



$x + z = \sqrt{2}$

sup. di rotazione generata (è il cono di prima)

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \\ z = \sqrt{2} - \rho \end{cases} \qquad 0 < \rho < \sqrt{2}$$

$K = 0$ (curvatura del meridiano $= 0$)

curvature principali $\qquad k_1 = k_{me} = 0$

$$k_2(P) = -\frac{1}{\overline{PQ}}$$

retta per $P \perp r$ $\qquad (x - \rho) - (z - (\sqrt{2} - \rho)) = 0$

$$x - \rho - z + \sqrt{2} - \rho = 0$$

$$x - z + \sqrt{2} - 2\rho = 0$$

$x = 0 \implies z = \sqrt{2} - 2\rho \qquad Q = (0, \sqrt{2} - 2\rho)$

$P : (\rho, \sqrt{2}-\rho) \qquad Q : (0, \sqrt{2}-2\rho)$

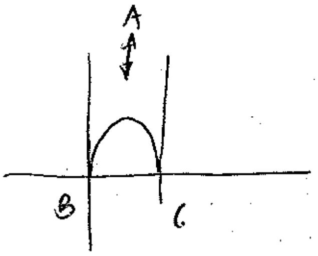
$$\overline{PQ} = \sqrt{\rho^2 + (\cancel{\sqrt{2}}-2\rho-\cancel{\sqrt{2}}+\rho)^2}$$

$$= \sqrt{\rho^2 + \rho^2} \qquad = \rho \cdot \sqrt{2}$$

$$\kappa_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}\,\rho}$$

(3) Dimostrare che nel piano iperbolico esistono "triangoli geodetici" con lati infinitamente lunghi e di area finita.

Sol:



A, B, C sono "all'infinito"

$| \quad |$ e $\cap$ sono geodetiche infinitamente lunghe (rispetto a $ds^2 = \frac{dx^2+dy^2}{y^2}$)

gli angoli sono tutti nulli
(= angoli euclidei)

$$A(ABC) = -\int_{ABC} (-1)\, d\sigma = -\int_{ABC} K\, d\sigma =$$

$$= \pi - (\alpha+\beta+\gamma) = \pi \qquad (\alpha = \beta = \gamma = 0)$$

(π è il max valore per l'area di un triangolo geodetico iperbolico)

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi = \int_T K\, d\sigma = -A(T) \qquad \text{(teor. elegantissimum)}$$

$$A(T) = \pi - (\alpha+\beta+\gamma) \leq \pi$$