

NOTE DI GEOMETRIA AFFINE ED EUCLIDEA

NICOLA SANSONETTO

1. INTRODUZIONE

Questi appunti delle Lezioni di una parte del modulo di *Elementi di Geometria* per il corso di *Algebra Lineare con Elementi di Geometria*¹ sono basati sulle note [Spera-1, Spera-2] del prof. Spera che ha tenuto il corso dal 2006 al 2012.

Queste Note sono in continuo divenire e sono adattate ad una parte del modulo di Elementi di Geometria del corso Algebra Lineare ed Elementi di Geometria del corso di Laurea in Matematica Applicata dell'Università degli Studi di Verona e possono contenere molte lacune ed errori di cui mi assumo tutta la responsabilità.

2. DEFINIZIONI E COSTRUZIONI INIZIALI

Definizione. *Uno spazio affine modellato su un \mathbb{K} -spazio vettoriale V è una terna $(\mathbb{A}, V, +)$, in cui*

- \mathbb{A} è un insieme non vuoto i cui elementi sono detti **punti**;
- V è un \mathbb{K} -spazio vettoriale;
- $+$ è un'operazione

$$\begin{aligned} + : \mathbb{A} \times V &\longrightarrow \mathbb{A} \\ (P, \vec{v}) &\longrightarrow P + \vec{v} \end{aligned}$$

tale che

1. $(P + \vec{v}) + \vec{w} = P + (\vec{v} + \vec{w})$, per ogni $P \in \mathbb{A}$ e per ogni $\vec{v}, \vec{w} \in V$;
2. per ogni coppia di punti $P, Q \in \mathbb{A}$ esiste un'unico vettore $\vec{v} \in V$ tale che

$$Q = P + \vec{v}.$$

In particolare

$$P + \vec{v} = P \Leftrightarrow \vec{v} = \vec{0}.$$

Notazione. *Spesso denoteremo uno spazio affine semplicemente con \mathbb{A} . Inoltre dalla proprietà 2. della definizione precedente un vettore \vec{v} è formalmente dato dalla “differenza di punti”:*

$$\vec{v} = Q - P \quad \text{oppure da} \quad \vec{v} = PQ.$$

Si definisce dimensione di uno spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$, la dimensione dello spazio vettoriale modellante V .

Introducendo il concetto di sistema di riferimento è possibile utilizzare il formalismo delle coordinate già noto dalla teoria degli spazi vettoriali.

Definizione. *Fornire un sistema di riferimento in uno spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ significa fissare un punto $O \in \mathbb{A}$ detto **origine** ed una base $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ di V . Fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R} = \{O, \vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$, le **coordinate affini** di un punto P di \mathbb{A} sono la n -upla $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che $P - O (= OP) = x_1 \vec{b}_1 + \dots + x_n \vec{b}_n$, ossia le coordinate del vettore $P - O$ rispetto alla base \mathcal{B} .*

Esempio 1 (Spazio affine associato ad uno spazio vettoriale). Ogni spazio vettoriale ...

Esempio 2 (Spazio affine standard). Dato un campo \mathbb{K} , ...

Tali esempi inducono a tenere bene a mente l'esempio chiave, fondamentale nella nozione di spazio affine: lo spazio della geometria euclideo classica, cioè, **lo spazio vettoriale geometrico \mathbb{S}** .

crossref

Definizione. Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine e $W \leq V$ un sottospazio vettoriale di V . Una **sottovarietà lineare o sottospazio affine**, passante per $P \in \mathbb{A}$ e di spazio direttore W è il sottoinsieme di \mathbb{A}

$$\mathbb{L} = P + W = \{P + \vec{w} \mid \vec{w} \in W\},$$

la cui dimensione coincide con quella di W . Si pone per definizione che \emptyset sia sottovarietà lineare di \mathbb{A} e $\dim \emptyset = -1$.

Se $(\mathbb{A}, V, +)$ è uno spazio affine di dimensione n :

- $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{A}$ è l'unico sottospazio affine di dimensione n ;
- i *punti* di \mathbb{A} sono le sottovarietà lineari di dimensione 0;
- le *rette* sono le sottovarietà lineari di dimensione 1 e lo spazio direttore W è anche detto *direzione della sottovarietà*;
- le sottovarietà lineari di dimensione 2 sono dette *piani*, (lo spazio direttore W è detto *giacitura* nel caso vettoriale geometrico);
- le sottovarietà lineari di dimensione $n - 1$ sono dette *iper-piani*.

Si noti che date due sottovarietà lineari $\mathbb{L}_1 = P_1 + U_1$ e $\mathbb{L}_2 = P_2 + U_2$, la loro unione insiemistica, analogamente a quanto avviene per i sottospazi vettoriali,² non è in generale una sottovarietà lineare, mentre la loro intersezione è ancora una sottovarietà. Indichiamo con $\mathbb{L}_1 \vee \mathbb{L}_2$ la più piccola sottovarietà lineare di \mathbb{A} contenente sia \mathbb{L}_1 che \mathbb{L}_2 , detta anche *sottovarietà generata* da \mathbb{L}_1 e \mathbb{L}_2 :

$$\mathbb{L}_1 \vee \mathbb{L}_2 = P_1 + W = P_2 + W \text{ con } W = U_1 + U_2 + \langle P_2 - P_1 \rangle.$$

Esempio 3. Consideriamo lo spazio affine due dimensionale reale $\mathbb{A}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{A}^2$, detto anche piano affine reale. Siano $\mathbb{L} = P + \langle \vec{w} \rangle = (0, 2) + \langle [1 \ 1]^T \rangle$ e $\mathbb{M} = Q + \langle \vec{u} \rangle = (-1, -1) + \langle [1 \ -2]^T \rangle$ due sottovarietà di \mathbb{A}^2 . Osserviamo che \mathbb{L} e \mathbb{M} si intersecano nel punto R , cioè in un sottospazio di dimensione 0, mentre $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$ è tutto

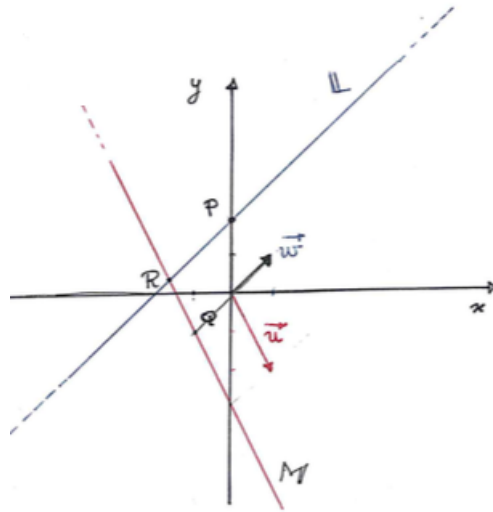


FIGURA 1.

\mathbb{A}^2 :

$$\mathbb{L} \vee \mathbb{M} = P + \langle \vec{w} + \vec{u} \rangle + \langle Q - P \rangle = (0, 2) + \langle [1 \ 1]^T + [1 \ -2]^T \rangle + \langle [-1 \ -3]^T \rangle = \mathbb{A}^2.$$

Date: 15 aprile 2016.

¹Corso di Studi in Matematica Applicata, Università degli Studi di Verona, A.A. 2012/2013.

²Si ricordi che, da un punto di vista affine, i sottospazi vettoriali sono sottovarietà lineari passanti per l'origine.

3. EQUAZIONI PARAMETRICHE E CARTESIANE

Analogamente a quanto accade per gli spazi vettoriali, il fissare un sistema di riferimento permette di caratterizzare le sottovarietà lineari mediante equazioni parametriche e cartesiane.

Si fissino un sistema di riferimento $\mathcal{R} = \{O, \vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ di uno spazio affine \mathbb{A}^n , e una sottovarietà lineare $\mathbb{L} = P + W$ di \mathbb{A}^n . Siano $\{\vec{w}_1, \dots, \vec{w}_k\}$ un insieme di generatori per lo spazio direttore W e (x_1, \dots, x_n) le coordinate affini di P rispetto alla base \mathcal{B} e $(w_{j,1}, \dots, w_{j,n})$ le coordinate di \vec{w}_j rispetto alla base \mathcal{B} . Le coordinate affini (X_1, \dots, X_n) di un generico punto X di \mathbb{L} soddisfano

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^k \alpha_j \begin{bmatrix} w_{j,1} \\ \vdots \\ w_{j,n} \end{bmatrix} \quad \text{o in forma compatta} \quad X = P + \sum_{j=1}^k \alpha_j \vec{w}_j,$$

da cui si ricavano le *equazioni parametriche* di \mathbb{L} rispetto a \mathcal{R} :

$$\begin{cases} X_1 = x_1 + \sum_{j=1}^k \alpha_j w_{j,1} \\ \vdots \\ X_n = x_n + \sum_{j=1}^k \alpha_j w_{j,n} \end{cases}$$

con α_j parametri.³ Per *equazioni cartesiane* di \mathbb{L} si intende un sistema lineare nelle incognite X_1, \dots, X_n , le cui soluzioni siano tutte e sole le n -ple delle coordinate dei vettori $P - O$ al variare di P in \mathbb{L} . Le equazioni cartesiane si ottengono dalle equazioni parametriche eliminando i parametri. Viceversa, le equazioni parametriche si ottengono dalle equazioni cartesiane risolvendo il sistema dato dalle equazioni cartesiane.

Esempio 4. Si considerino il piano affine reale \mathbb{A}^2 in cui è scelto un punto origine e come base di \mathbb{R}^2 si prenda la base canonica $\mathcal{E} = \{e_1, e_2\}$. Si considerino poi la retta r per $P = (1, -1)$ e di direzione definita da $\vec{w} = [2 \ 3]^T$, e la retta s per $Q = (0, 2)$ e direzione definita da $\vec{u} = [-1 \ 2]^T$. Equazioni parametriche per r .

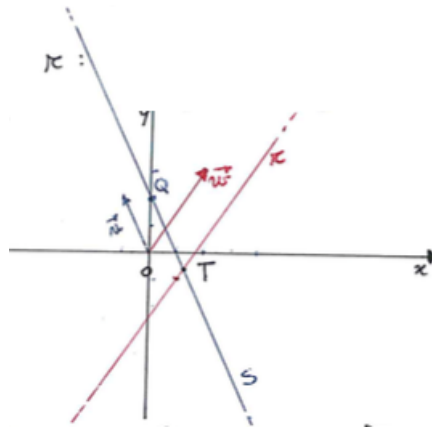


FIGURA 2.

$$r : \begin{cases} X_1 = 1 + 2\alpha \\ X_2 = -1 + 3\alpha \end{cases} \iff X = P + \alpha \vec{w} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

³Sottolineiamo che tali equazioni dipendono dalla scelta del sistema di riferimento e del punto P su \mathbb{L} .

Otteniamo l'equazione cartesiana di r eliminando il parametro α . Dalla prima equazione $\alpha = \frac{X_1}{2} - \frac{1}{2}$, sostituendo nella seconda si ricava $X_2 = -1 + 3\left(\frac{X_1}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}X_1 - \frac{5}{2}$, cioè

$$r : 3X_1 - 2X_2 - 5 = 0.$$

Analogamente le equazioni parametriche per s :

$$s : \begin{cases} X_1 = -\beta \\ X_2 = 2 + 2\beta \end{cases} \quad \beta \in \mathbb{R}$$

e l'equazione cartesiana

$$s : 2X_1 + X_2 - 2 = 0.$$

L'intersezione $R = r \cap s$ è un punto (sottospazio di dimensioni 0), che si ottiene determinando le soluzioni del sistema lineare⁴ tra le equazioni di r e di s . (Poniamo come costume $X_1 = x$ e $X_2 = y$.)

- Usando le *equazioni cartesiane*

$$r \cap s : \begin{cases} 3x - 3y - 5 = 0 \\ 2x + y - 2 = 0 \end{cases}$$

ritroviamo un noto e semplice sistema lineare.

- Usando le *equazioni parametriche*

$$r \cap s : \begin{cases} x = 1 + 2\alpha \\ y = -1 + 3\alpha \\ x = -\beta \\ y = 2 + 2\beta \end{cases}$$

Sostituendo si ha

$$r \cap s : \begin{cases} 1 + 2\alpha = -\beta \\ -1 + 3\alpha = 2 + 2\beta \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \beta = \dots \\ \alpha = \frac{1}{7} \end{cases}$$

per cui, sostituendo il valore di α appena trovato nell'espressione parametrica di r si ottiene il punto intersezione $R = \left(\frac{9}{7}, -\frac{4}{7}\right)$.

Osservazione. Osserviamo che, se come sistema di riferimento scegliamo $\mathcal{R}' = \{P, \vec{w}, \vec{u}\}$, allora le equazioni parametriche e cartesiane di r sono, rispettivamente

$$r : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad r : y = 0.$$

3.1. Spazio affine 3-dimensionale. Consideriamo lo spazio affine standard 3-dimensionale reale \mathbb{A}^3 e descriviamone i sottospazi di dimensione 1 (le rette) e quelli di dimensione 2 (i piani), determinandone le equazioni cartesiane e parametriche. Ricordiamo che una sottovarietà lineare è univocamente determinata assegnandone un punto e lo spazio direttore, ossia

- per le rette

$$r : R = R_0 + \langle \vec{w} \rangle;$$

- per i piani

$$\pi : P = P_0 + \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle.$$

Da tali espressioni è immediato ricavare le equazioni parametriche in forma vettoriale:

- per le rette

$$r : R = R_0 + \lambda \vec{w}, \quad \lambda \in \mathbb{R};$$

- per i piani

$$\pi : P = P_0 + \lambda \vec{w} + \mu \vec{u}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

⁴Rimandiamo a ... per un'interpretazione geometrica dei sistemi lineari.

Per componenti le equazioni parametriche di rette e piani diventano, rispettivamente

- per le rette

$$r : \begin{cases} x = x_0 + \lambda w_1 \\ y = y_0 + \lambda w_2 \\ z = z_0 + \lambda w_3 \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

in cui $R_0 = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{w} = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T$;

- per i piani

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + \lambda w_1 + \mu u_1 \\ y = y_0 + \lambda w_2 + \mu u_2 \\ z = z_0 + \lambda w_3 + \mu u_3 \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R},$$

in cui $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $\vec{w} = [w_1 \ w_2 \ w_3]^T$ e $\vec{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$.

Ricaviamo ora le equazioni cartesiane in un esempio. **Sottolineiamo** in anticipo, che, per ragioni di dimensione, un piano sarà individuato da un'equazione lineare, mentre una retta da un sistema di due equazioni lineari.

Esempio 5. Determinare le equazioni cartesiane del piano π passante per il punto $P_0 = (0, 0, 1)$ e di spazio direttore $W = \langle \vec{w}_1 = [1 \ 0 \ -1]^T, \vec{w}_2 = [0 \ 1 \ -1]^T \rangle$ e della retta r per P_0 e di direzione $\vec{v} = [1 \ 1 \ 1]^T$.

Sol

Scriviamo le equazioni parametriche delle due sottovarietà:

$$\pi : P = P_0 + \langle \vec{w}_1, \vec{w}_2 \rangle = \begin{cases} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 1 - \mu - \lambda \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad r : R = P_0 + \langle \vec{v} \rangle = \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

Per scrivere le equazioni parametriche dobbiamo esplicitare i parametri e quindi sostituire. Nel caso della retta r è semplice: sostituendo la seconda relazione nella prima si ottiene l'equazione $x = y$ indipendente da α , sostituendo poi la seconda nella terza si ottiene un'altra equazione $y - z + 1 = 0$ indipendente da α , da cui le equazioni cartesiane di r :

$$r : \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Per ottenere delle equazioni cartesiane di π è sufficiente sostituire la prima e la seconda equazione nella terza:

$$\pi : x + y + z = 1.$$

Osservazioni.

- Le equazioni cartesiane, così come quelle parametriche non sono univocamente determinate.
- Osserviamo che nello spazio l'equazione di una retta in forma cartesiane si scrive come intersezione di due piani.

Perché?

fine sol

Quesito. Si consideri l'esempio precedente. La retta r giace sul piano π ?

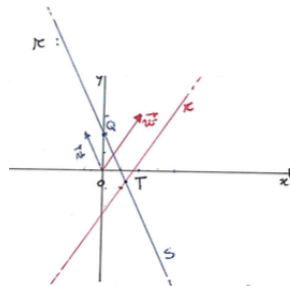


FIGURA 3.

4. MUTUA POSIZIONE DI SOTTOVARIETÀ LINEARI

Definizione. Due sottovarietà lineari non vuote $\mathbb{L} = P + W$ e $\mathbb{M} = Q + U$ di uno spazio affine \mathbb{A} si dicono

- **incidenti** se $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$;
- **parallele** se $W \subseteq U$ oppure $U \subseteq W$;
- **sghembe** se $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \emptyset$ e $U \cap W = \langle \vec{0} \rangle$;
- **complementari** se \mathbb{L} e \mathbb{M} sono sghembe e $\mathbb{L} \vee \mathbb{M} = \mathbb{A}$.

N.B. Si noti che nel piano due rette non possono essere mai sghembe, mentre nello spazio due piani, e una retta e un piano, non possono mai essere sghembi.

Proposizione 1. Siano $\mathbb{L} = P + W$ e $\mathbb{M} = Q + U$ due sottovarietà lineari di uno spazio affine \mathbb{A} di dimensione finita. Allora vale la formula di Grassmann nel caso affine:

$$(1) \quad \dim(\mathbb{L} \vee \mathbb{M}) \leq \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} - \dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M})$$

e l'uguaglianza vale se e solo se \mathbb{L} e \mathbb{M} sono incidenti o sghembe.

Dimostrazione. La dimostrazione della formula di Grassmann affine (1) discende dalla definizione dell'operatore \vee . Ora

$$\dim(\mathbb{L} \vee \mathbb{M}) = \dim(U + W + \langle Q - P \rangle).$$

Se $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$ allora $Q - P \in U + W$, quindi dall'usuale formula di Grassmann

$$\begin{aligned} \dim(U + W + \langle Q - P \rangle) &= \dim(U + W) + 1 \\ &= \dim(U + W) - \underbrace{\dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M})}_{-1} \\ &= \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) - \dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M}) \\ &\leq \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} - \dim \mathbb{L} \cap \mathbb{M}. \end{aligned}$$

In particolare se \mathbb{L} e \mathbb{M} sono sghembe vale l'uguaglianza, essendo $U \cap W = \langle \vec{0} \rangle$.

Se invece, $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = \emptyset$, allora $Q - P \in U + W$ e $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} = R + (U \cap W)$, con R un generico punto di $\mathbb{L} \cap \mathbb{M}$. Allora

$$\dim(\mathbb{L} \vee \mathbb{M}) = \dim(U + W + \langle Q - P \rangle) = \dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = \dim \mathbb{L} + \dim \mathbb{M} - \dim(\mathbb{L} \cap \mathbb{M}).$$

□

Esercizio 1. Si verifichi che $\mathbb{L} \cap \mathbb{M} \neq \emptyset$ se e solo se $Q - P \in U + W$.

Sol. Se $R \in \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$, allora $R = P + \vec{u} = Q + \vec{w}$, un $\vec{u} \in U$ e un $\vec{w} \in W$. Quindi $Q - P$ in $\vec{w} - \vec{u} \in U + W$. Analogamente, se $Q - P \in U + W$, allora $Q - P = \vec{u} + \vec{w}$, con $\vec{u} \in U$ e $\vec{w} \in W$; il punto $Q + \vec{w} = P + \vec{u}$ starà in $\mathbb{L} \cap \mathbb{M}$.

Esercizio 2. Siano $\mathbb{L} = P + W$ e $\mathbb{M} = Q + U$ sottovarietà lineari di \mathbb{A} . Allora $\mathbb{L} \vee \mathbb{M} = P + \underbrace{U + W + \langle Q - P \rangle}_{\text{spazio direttore } Z}$.

Sol. $\mathbb{L} \vee \mathbb{M}$ passa per P , poiché $P \in \mathbb{L}$ e $\mathbb{L} \subset \mathbb{L} \cap \mathbb{M}$. Inoltre lo spazio direttore Z contiene necessariamente W ; analogamente per Q e U . Poiché $\mathbb{L} \cap \mathbb{M}$ è sottovarietà e contiene Q e P , allora contiene anche $P - Q$ e quindi $\langle Q - P \rangle \subset Z$. Da cui la conclusione.

Teorema 2. Si considerino uno spazio affine \mathbb{A} di spazio direttore il \mathbb{K} -spazio vettoriale V e due suoi sottospazi vettoriali U_1 e U_2 di V . Siano $\mathbb{L}_1 = P_1 + U_1$ e $\mathbb{L}_2 = P_2 + U_2$ sottovarietà lineari di \mathbb{A} , con $P_1, P_2 \in \mathbb{A}$. Allora $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$ se e solo se $U_1 = U_2$ e $P_1 - P_2 \in U$.

Dimostrazione. “ \Rightarrow ”

Se $\mathbb{L}_1 = \mathbb{L}_2$, allora esiste $Z \in \mathbb{L}_1$ e $Z \in \mathbb{L}_2$, cioè

$$\begin{array}{ccc} Z = P_2 + \vec{u}_2 & \text{e} & Z = P_2 + \vec{u}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ Z - P_2 = \vec{u}_2 & \text{e} & z - P_2 = \vec{u}_2 \end{array}$$

Ora da $P_1 = Z - \vec{u}_1 = Z + \vec{u}'_1$; $P_2 = Z - \vec{u}_2 = Z + \vec{u}'_2$, segue che

$$\mathbb{L}_1 = Z + U_1 \quad \text{e} \quad \mathbb{L}_2 = Z + U_2,$$

e cioè che $U_1 = U_2 = U$. Di conseguenza $P_1 - P_2 = \vec{u}'_1 - \vec{u}'_2 \in U$.

“ \Leftarrow ”

Viceversa

$$\mathbb{L}_1 = P_1 + U = P_2 + \underbrace{(P_1 - P_2)}_{\in U} + U = P_2 + U = \mathbb{L}_2.$$

□

Commento. Questo teorema afferma che due sottospazi affini di uno spazio affine coincidono se e solo se hanno in comune un punto e gli spazi direttori.

N.B. Se $(\mathbb{A}, V, +)$ è uno spazio affine, l'applicazione $+$, fissato $P \in \mathbb{A}$, induce una mappa

$$\alpha_P : V \longrightarrow \mathbb{A}$$

definita da

$$\alpha_P(\vec{v}) := P + \vec{v}.$$

Tale applicazione è biettiva, di inversa

$$\beta_P : \mathbb{A} \longrightarrow V$$

$$Q \longmapsto \beta_P(Q) := Q - P.$$

Inoltre per ogni vettore $\vec{v} \in V$ è definita la traslazione di \vec{v}

$$\tau_{\vec{v}} : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$$

$$P \longmapsto \tau_{\vec{v}}(P) := P + \vec{v}.$$

Ciò permette di pensare ad \mathbb{A} come ad uno spazio vettoriale su cui è operata una traslazione.

perché?

5. TRASFORMAZIONI AFFINI

Introduciamo e studiamo ora delle particolari applicazioni tra spazi affini che rispettano la struttura affine (ovvero quella lineare e le traslazioni).

Definizione. Siano $(\mathbb{A}, V, +)$ e $(\mathbb{A}', V', +)$ due spazi affini. Un'applicazione affine è un'applicazione insiemistica $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}'$, tale per cui esiste un'applicazione lineare $\phi : V \longrightarrow V'$ tale che

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = \phi(\overrightarrow{PQ})$$

o equivalentemente

$$f(P + \vec{v}) = f(P) + \phi(\vec{v})$$

per ogni $P, Q \in \mathbb{A}$ e $\vec{v} \in V$. Se $\phi : V \longrightarrow V'$ è un isomorfismo, allora f è detto un **isomorfismo di spazi affini**. Se poi $\mathbb{A}' = \mathbb{A}$, cioè $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}$ ed è isomorfismo, f è detta **affinità**.

N.B. Tra le applicazioni affini le traslazioni, ossia quelle applicazioni che, fissato un vettore $\vec{v} \in V$, mandano P in $P + \vec{v}$ sono affinità. In tal caso $\phi = \text{id}_V$.

Introduciamo un importante teorema che permette di caratterizzare gli spazi affini di dimensione finita.

Teorema 3. Ogni spazio affine di dimensione finita è isomorfo allo spazio affine standard.

Dimostrazione. Costruiamo l'isomorfismo. Nello spazio affine \mathbb{A} si consideri un sistema di riferimento affine $\{O, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\}$. Sia $P \in \mathbb{A}$ tale che

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^n x_i \vec{v}_i$$

con (x_1, \dots, x_n) coordinate affini di P , cioè $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n$, in cui \mathbb{A}^n è \mathbb{K}^n pensato come spazio affine su se stesso. Analogamente per un altro punto $Q \in \mathbb{A}$:

$$\overrightarrow{OQ} = \sum_{i=1}^n y_i \vec{v}_i, \quad (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{A}^n.$$

Definiamo ora la mappa

$$\begin{aligned}\Phi : V &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ \vec{v} &\longmapsto (\alpha_1, \dots, \alpha_n)\end{aligned}$$

che fornisce le coordinate di un vettore \vec{v} rispetto alla base canonica di \mathbb{K}^n . (Si ricordi che ogni \mathbb{K} -spazio vettoriale di dimensione finita n è isomorfo allo spazio delle coordinate \mathbb{K}^n). Allora possiamo definire $f : \mathbb{A} \longrightarrow \mathbb{A}^n$ come $f(P) = (x_1, \dots, x_n)$. A questo punto è immediato che

$$\overrightarrow{f(P)f(Q)} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, \dots, y_n - x_n) = \Phi(\overrightarrow{PQ}).$$

□

Commento. Si osservi che un **affinità** è completamente determinata da come si comporta nell'origine $f(O)$, $O \in \mathbb{A}$ e dall'isomorfismo $\Phi \in \text{GL}_n(V)$.

5.1. Il gruppo affine. Da quanto visto si ha che l'insieme delle affinità di uno spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ in sè costituisce un gruppo, $\text{Aff}(\mathbb{A})$, i cui elementi sono individuati da un elemento del gruppo generale lineare $\text{GL}_n(V)$ e da una traslazione:

$$\text{Aff}(\mathbb{A}) = \left\{ f_{(A, \vec{b})} \mid A \in \text{GL}_n(V) \text{ e } \vec{b} \in V \right\}$$

cioè

$$f_{(A, \vec{b})}(P) = AP + \vec{b}, \quad P \in \mathbb{A}.$$

Si noti che la composizione di due affinità $f_{(B, \vec{c})}$ e $g_{(A, \vec{b})}$ è ancora un'affinità, infatti:

$$\begin{aligned}(f_{(B, \vec{c})} \circ g_{(A, \vec{b})})(P) &= f_{(B, \vec{c})}(g_{(A, \vec{b})}(P)) \\ &= f_{(B, \vec{c})}(AP + \vec{b}) \\ &= B(AP + \vec{b}) + \vec{c} \\ &= BAP + B\vec{b} + \vec{c} \\ &= f_{(BA, B\vec{b} + \vec{c})}(P).\end{aligned}$$

L'elemento neutro è individuato da $f_{(\text{id}, \vec{0})}$, infatti $f_{(\text{id}, \vec{0})}(P) = P$. L'inverso di $f_{(A, \vec{b})}$ è $f_{(A^{-1}, -A^{-1}\vec{b})}$, infatti

$$(f_{(A, \vec{b})} \circ f_{(A^{-1}, -A^{-1}\vec{b})})(P) = f_{(AA^{-1}, A(A^{-1}\vec{b}) + \vec{b})}(P) = f_{(\text{id}, \vec{0})}(P).$$

Si dimostri per esercizio la proprietà associativa.

In tale contesto è conveniente introdurre il cosiddetto **formalismo unificato**, in cui i vettori di uno spazio vettoriale n -dimensionale sono individuati vettori colonna di $(n+1)$ -componenti: la prima componente è sempre nulla mentre le rimanenti n sono le coordinate del vettore rispetto alla base scelta. I punti dell'associato spazio affine n -dimensionale sono individuati da $n+1$ -uple, la cui prima entrata è un 1, mentre le rimanenti n sono le coordinate affini del punto. Così facendo un'affinità $f_{(A, \vec{b})}$ di \mathbb{A} in sè, che $x \longmapsto Ax + \vec{b}$ si può descrivere per mezzo di un'unica matrice invertibile di ordine $n+1$:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} 1 & \vec{0}^T \\ \vec{b} & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ Ax + \vec{b} \end{bmatrix}$$

in cui $x = (x_1, \dots, x_n)$ denota le coordinate affini di $P \in \mathbb{A}$.

Osserviamo che le nozioni affini di incidenza, parallelismo e l'essere sghembi sono **nozioni affini**, ossia **invarianti per affinità**, così come l'essere sottospazi affini.

Proposizione 4. *Sia \mathbb{A} uno spazio affine, \mathbb{L} una sua sottovarietà lineare e f una affinità di \mathbb{A} in sè. Allora $f(\mathbb{L})$ è ancora sottovarietà lineare di \mathbb{A} .*

Dimostrazione. Sia $\mathbb{L} = P + W$ sottovarietà lineare passante per P e di giacitura W . Sia f un'affinità di \mathbb{A} con isomorfismo associato $\phi \in \text{GL}_n(V)$. Allora $\phi(W)$ è sottospazio vettoriale di V e $\dim W = \dim \phi(W)$. Inoltre per ogni $X \in \mathbb{L}$, $\overrightarrow{f(P)f(X)} = \phi(\overrightarrow{PX}) \in \phi(W)$, quindi $f(X)$ appartiene alla sottovarietà lineare \mathbb{S} per $\phi(P)$ e di

spazio direttore $\phi(W)$. Viceversa, per ogni $R \in \mathbb{S}$ si ha che $\overrightarrow{Pf^{-1}(R)} = \phi^{-1}(\overrightarrow{f(P)R}) \in W$, cioè $f^{-1}(R) \in \mathbb{L}$ e quindi $R \in \mathbb{L}$. Dacui $f(\mathbb{L}) = \mathbb{S}$. \square

L'invarianza per affinità di parallelismo, incidenza ed essere sghembi seguono immediatamente dal fatto che f è obiettiva. Vi sono molte altre proprietà invarianti per affinità (rapporto semplice, rapporto tra volumi, ...) il cui studio è rinviato ad altra sede.

N.B. I sottoinsiemi di uno spazio affine \mathbb{A} vengono dette *figure geometriche affini* di \mathbb{A} . Due figure geometriche \mathbb{F} e $\mathbb{F}' \in \mathbb{A}$ si dicono **affinemente equivalenti** se esiste un'affinità f di \mathbb{A} in sè che manda l'una nell'altra: $f(\mathbb{F}) = \mathbb{F}'$. Di conseguenza una proprietà *affine* di una figura sarà comune a tutte le figure affinemente equivalenti ad essa.

Ad esempio se \mathbb{F} è un insieme finito di punti (o una figura che possiede un numero finito di vertici), il numero di punti (o di vertici) è una proprietà affine. Si noti che il trasformato di un triangolo è ancora un triangolo e quello di un parallelogramma è ancora un parallelogramma. Prima di indagare alcuni esempi, enunciamo la seguente

Perché?

Proposizione 5. *Sia $(\mathbb{A}, V, +)$ uno spazio affine di dimensione n e siano $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ e $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$ due $(n+1)$ -uple di punti **indipendenti**⁵ Allora esiste un'unica affinità f di \mathbb{A} in sè tale che*

$$f(P_i) = Q_i, \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Tale proposizione è estremamente utile, in particolare modo nelle applicazioni, dal momento che esse permette di caratterizzare un'affinità dal suo agire su un determinato numero di punti (indipendenti). Inoltre permette di riportare un problema geometrico all'ambito della teoria dei sistemi lineari.

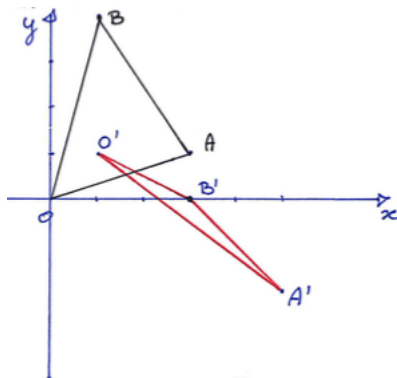
5.2. Trasformazioni affini piane. In questa sezione particolarizziamo le trasformazioni affini al piano affine reale $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})$, che spesso denoteremo semplicemente con \mathbb{A}^2 .

Esempio 6. *Si consideri nel piano affine standard reale \mathbb{A}^2 il triangolo T di vertici $O = (0, 0)$, $A = (3, 1)$ e $B = (1, 4)$. Si consideri l'applicazione affine \mathcal{A} di \mathbb{A}^2 in sè tale che*

$$\begin{aligned} O &\longmapsto O' = (1, 1) \\ A &\longmapsto A' = (5, -2) \\ B &\longmapsto B' = (3, 0) \end{aligned}$$

Dire se \mathcal{A} è un'affinità e in caso affermativo scrivere esplicitamente la trasformazione. (Sugg. Servirsi di un esempio.)

Sol. Dal disegno si evince che \mathcal{A} è un'affinità, dal momento che manda tre punti indipendenti in tre punti indipendenti (o tre punti distinti e non allineati in tre punti distinti e non allineati).



⁵I punti di una $(n+1)$ -upla $\{P_0, P_1, \dots, P_n\}$ di punti si dicono indipendenti se i vettori $\overrightarrow{P_0P_1}, \dots, \overrightarrow{P_0P_n}$ sono linearmente indipendenti.

Vedifichiamo ciò analiticamente. Nel formalismo unificato la matrice associata alla trasformazione affine \mathcal{A} è

$$\Xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a & b \\ b_2 & c & d \end{bmatrix}$$

in cui $\Sigma := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\Sigma \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$. Determiniamo i coefficienti della trasformazione usando il fatto che $\mathcal{A}(O) = O'$, $\mathcal{A}(A) = A'$ e $\mathcal{A}(B) = B'$, ottenendo così un sistema lineare di 6 equazioni in 6 incognite, che ammette un'unica soluzione.

$$\begin{cases} \begin{cases} b_1 = 1 \\ b_2 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} b_1 + 3a + b = 5 \\ b_2 + 3c + d = -2 \end{cases} \\ \begin{cases} b_1 + a + 4b = 3 \\ b_2 + c + 4d = 0 \end{cases} \end{cases}$$

Si osservi che la prima trasformazione è applicata all'origine e quindi determina la componente di traslazione \vec{b} , che sarà pari a $[1 \ 1]^T$. Risolvendo il sistema si ricava

$$\Xi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{14}{11} & \frac{2}{11} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

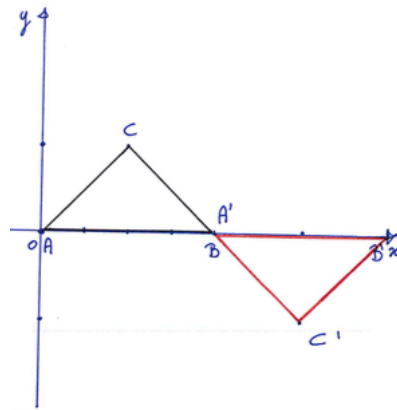
Quesito. Cosa accade all'area del triangolo T ?

Esempio 7. Nel piano affine standard reale \mathbb{A}^2 si determini se l'applicazione affine \mathcal{A} di \mathbb{A}^2 in sé tale che

$$(2) \quad \begin{aligned} A = (0, 0) &\mapsto A' = (5, -2) \\ B = (2, 0) &\mapsto B' = (4, 0) \\ C = (1, 1) &\mapsto C' = (3, -1) \end{aligned}$$

sia un'affinità, possibilmente in due modi diversi. (Sugg. Servirsi di un esempio.)

Sol. Metodo 1.



La matrice associate all'applicazione \mathcal{A} è del tipo

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_1 & a & b \\ b_2 & c & d \end{bmatrix}$$

in cui $\Xi := \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\Xi \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$. Imponendo la prima delle (??) si ottiene il termine di traslazione $\vec{b} = [2 \ 0]^T$. Imponendo le rimanenti si ha:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} 2 + 2a = 4 \\ 2c = 0 \end{array} \right. \quad \text{da } \Sigma B = B' \\ \left\{ \begin{array}{l} a + b + 2 = 3 = 5 \\ c + d = -1 \end{array} \right. \quad \text{da } \Sigma C = C' \end{array} \right.$$

Da cui

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Metodo 2. (Metodo geometrico.)

Osserviamo dal disegno che \mathcal{A} si pu' scrivere come combinazione di una riflessione rispetto all'asse x e di una traslazione lungo l'asse x . Le riflessioni rispetto agli assi hanno una forma speciale: quelle rispetto all'asse x mantengono fissa la coordinata x e cambiano segno alla coordinata y ; cioè la matrice associata ad una (simmetria) riflessione rispetto all'asse x è

$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

mentre quelle associate ad una riflessione rispetto all'asse y è

$$R_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La traslazione nel nostro caso è

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e quindi la trasformazione \mathcal{A} è rappresentata dalla matrice

$$\Sigma = T R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Si noti che in **questo particolare caso** non conta l'ordine con cui vengono composte le due trasformazioni. Perché?

6. TIPI DI TRASFORMAZIONI AFFINI

Il precedente esempio ci suggerisce che vi sono delle affinità o più in generale delle trasformazioni affini "speciali". In questa sezione ci dedicheremo allo studio di tali trasformazioni. Tratteremo brevemente il caso generale per poi considerare applicazioni al caso in dimensione 2 e 3. Dai due precedenti esempi si può osservare che l'area di una figura geometrica affine non è una proprietà affine, ossia invariata per affinità. Tra le affinità, però, vi sono delle trasformazioni (in realtà un sottogruppo del gruppo delle affinità) che conservano l'area. Come si può facilmente intuire l'area è una proprietà connessa al concetto di distanza, anche se il gruppo di trasformazioni che conservano la distanza è "più piccolo" di quello delle affinità che conservano l'area.

Definizione. Un punto P_0 di \mathbb{A} si dice **punto fisso** o **unito** per la trasformazione affine $\mathcal{A} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ se $\mathcal{A}(P_0) = P_0$. Una sottovarietà lineare \mathbb{L} di \mathbb{A} è uno **spazio fisso** o **unito** se per ogni $P \in \mathbb{L}$, $\mathcal{A}(P) \in \mathbb{L}$.

Fissiamo ora uno spazio affine $(\mathbb{A}, V, +)$ e indichiamo le principali trasformazioni affini. Siano $\mathbb{L} = P + U$ una sottovarietà affine non vuota di \mathbb{A} e W un sottospazio vettoriale di V tale che $U \oplus W = V$.

Traslazioni. Sia $\vec{v} \in V$, allora resta definita l'affinità $T_{\vec{v}} : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ definita da $T_{\vec{v}}(P) = P + \vec{v}$ detta traslazione. Si noti che se \vec{v} è non nullo, allora $T_{\vec{v}}$ non ammette punti fissi, mentre se $\vec{v} = \vec{0}$, allora $T_{\vec{v}}$ è l'identità e ogni punto di \mathbb{A} è fisso. Usando la notazione matriciale $T_{(\text{id}, \vec{v})}$.

Omotetie di centro P_0 e rapporto k . Siano $P_0 \in \mathbb{A}$ e $k \in \mathbb{K}$, l'omotetia di centro P_0 e rapporto k è l'applicazione affine $\mathcal{O}_k : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ che manda il punto P nel punto P' tale che

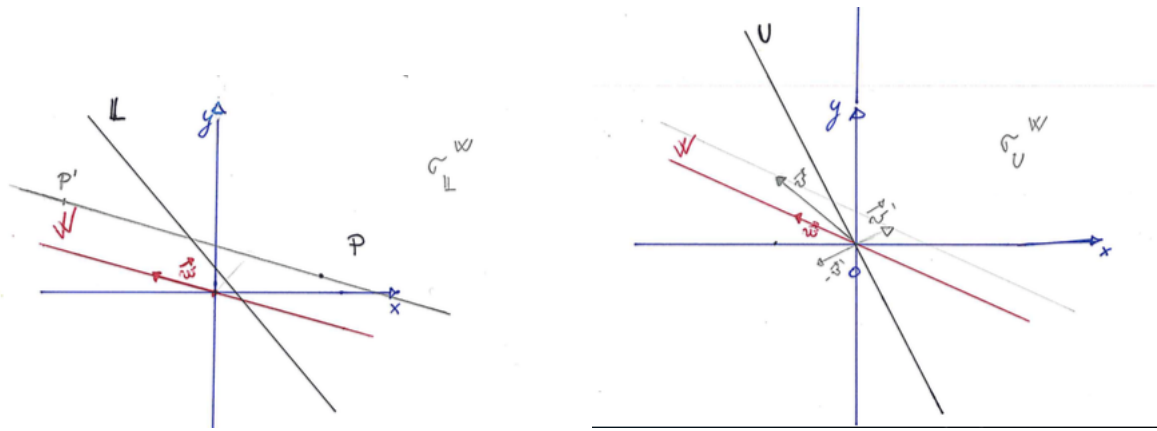
$$(3) \quad P' - P_0 = k(P - P_0)$$

Se $k \neq 1$, allora P_0 è l'unico punto fisso della trasformazione. Nel formalismo matriciale $\mathcal{O}_{(k\text{id}, -k(P_0-O))}$.
 Se $k \neq 0, 1$ un'omotetia è un'affinità la cui inversa ha ancora centro P_0 , ma rapporto k^{-1} .

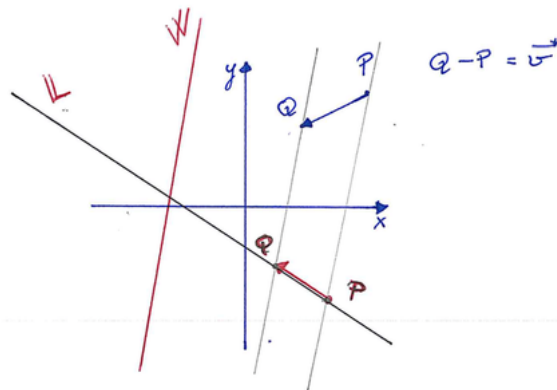
Simmetrie di asse \mathbb{L} e direzione W . Una simmetria di asse \mathbb{L} e direzione W è l'applicazione affine

$$\sigma_{\mathbb{L}}^W(P) = P, \text{ per ogni } P \in \mathbb{L},$$

e l'applicazione lineare associata sia la simmetria $\sigma_U^W : V \rightarrow V$ di asse U e di direzione W , cioè la applicazione lineare che manda \vec{v} su \vec{v}' in modo che $\vec{v} + \vec{v}' \in U$ e $\vec{v} - \vec{v}' \in W$, (in cui U e W sono sottospazi di V tali che $V = U \oplus W$).



Proiezione su \mathbb{L} nella direzione di W . Una proiezione su \mathbb{L} nella direzione di W è l'applicazione affine $\pi_{\mathbb{L}}^W : \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{A}$ tale che $\pi_{\mathbb{L}}^W(P) = P$, per ogni $P \in \mathbb{L}$ e l'applicazione lineare associata a $\pi_{\mathbb{L}}^W$, sia la proiezione $\pi_U^W : V \rightarrow V$ su U nella direzione di W . Si osservi che generalmente le proiezioni non sono affinità, infatti una proiezione è suriettiva se e solo se $W = \{\vec{0}\}$.





7. LO SPAZIO VETTORIALE GEOMETRICO

Definizione. Un **segmento orientato** è una coppia di punti distinti A e B , ossia un segmento su cui è scelto un ordine tra i due estremi: AB .

AB e BA contengono lo stesso insieme di punti ma sono diversi come segmenti orientati. Ogni punto individua un segmento banale in cui origine e fine coincidono. Un segmento orientato individua:

- **direzione:** retta per A e B ;
- **verso:** A precede B ;
- **lunghezza:** una volta fissata una unità di misura. Ovviamente $|AA| = 0$.

Definizione. Due segmenti orientati AB e $A'B'$ si dicono **equipollenti**⁶ se hanno la stessa lunghezza, direzione e verso e si pone $AB \sim A'B'$. Chiamiamo **vettori** le classi di equipollenza di segmenti orientati.

L'insieme di tali classi è detto **spazio vettoriale geometrico**

$$\mathbb{S} = \frac{\text{Segmenti orientati}}{\sim}$$

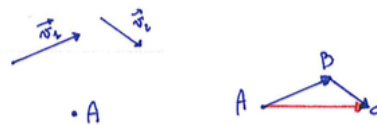
L'operazione di applicazione di un vettore ad un punto P consiste nello scegliere quel segmento orientato (detto *rappresentante*) della classe che l'origine in P , cioè un vettore applicato è una coppia (P, \vec{v}) in cui $\vec{v} \in \mathbb{S}$. Ha senso parlare di lunghezza, direzione e verso di un vettore, assumendo quelli di uno qualsiasi dei suoi rappresentanti. La classe del segmento orientato banale è detto *vettore nullo* $\vec{0}$. Infine due vettori geometrici si diranno paralleli se tali sono due qualsiasi rappresentanti. Si noti che un vettore applicato in A si può scrivere come:

$$B = A + \vec{v}, \quad \text{oppure} \quad \vec{v} = B - A.$$

Due vettori si dicono opposti se hanno uguale lunghezza e verso discorde: se \vec{w} è opposto a \vec{v} allora $\vec{w} = -\vec{v}$. Un vettore è detto parallelo ad un piano se la sua direzione è contenuta nella giacitura del piano.

Operazioni sui vettori geometrici.

- **Somma.** Siano $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{S}$
 - scegliamo un punto A ;
 - scegliere i punti B e C in modo che $\vec{AB} = \vec{v}_1$ e $\vec{BC} = \vec{v}_2$;
 - definiamo $\vec{AC} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$.



Si noti che questa è una buona definizione.

- **Prodotto per scalari.** Siano $\vec{v} \in \mathbb{S}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora $\vec{w} := \alpha \vec{v}$ è il vettore diretto come \vec{v} , di verso concorde a \vec{v} o meno con quello di \vec{v} a seconda del segno di α e lunghezza $|\alpha| \|\vec{v}\|$. Se $\alpha = 0$, $\|\vec{w}\| = 0$ cioè $\vec{w} = \vec{0}$.

Tali operazioni godono delle proprietà note sugli spazi vettoriali, inoltre è possibile fornire una semplice interpretazione grafica anche alla differenza di due vettori. Quindi

⁶Equipollenza è una relazione di equivalenza.

\mathbb{S}	\mathbb{S}^A	di fatto $\overset{\text{identificati}}{\longleftrightarrow}$	S_A
vettori geometrici	vettori applicazioni in A		segmenti orientati con la stessa origine A

hanno la stessa struttura di spazio vettoriale: sono in realtà **isomorfi**.

La costruzione dell'isomorfismo è banale basta considerare A come origine di un sistema di coordinate cartesiane (O, x, y, z) e quindi applicare i vettori all'origine. Così facendo si identificano i vettori $\vec{v} = \overrightarrow{OP}$ con le coordinate dei punti di estremo P

$$\vec{v}_0 \mapsto [x_0 \quad y_0 \quad z_0]$$

e le operazioni appena introdotte divengono operazioni tra le coordinate. Si noti, però, che l'isomorfismo introdotto non è canonico, dipende dalla scelta del sistema di riferimento, mentre le operazioni tra vettori, quindi, permette di scegliere in ogni occasione il sistema di riferimento più opportuno.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- [Candilera] M. Candilera, *Dispensa di Geometria*. Reperibile alla pagina web http://www.math.unipd.it/candiler/mat_tre.html
- [Cornalba] M. Cornalba *Piccola introduzione alla geometria proiettiva*. Reperibile alla pagina web <http://mate.unipv.it/cornalba/dispense/proj.pdf>
- [Sernesi] E. Sernesi, *Geometria 1*. Bollati Boringhieri.
- [Spera-1] M. Spera, *Note di Elementi di Geometria*. Non pubblicate.
- [Spera-2] M. Spera, *Note del Corso di Geometria*. Libreria Progetto.
- [Spera-3] M. Spera, *Note di Geometria Computazionale*. Non pubblicate.
- [Spera-4] M. Spera, *Comunicazioni private*.

E-mail address: nicola.sansonetto@gmail.com