ALGEBRA LINEARE con ELEMENTI DI GEOMETRIA

Modulo avanzato Prof. M. Spera

Prova scritta del 7/4/2009

(1) Nel piano euclideo reale si determini la matrice della simmetria (obliqua) rispetto alla retta $r: x+2y-2=0$ lungo la direzione individuata dall'asse y [si sottintende la scelta di un riferimento cartesiano]. Successivamente si determini il cerchio $\mathscr{C}$ circoscritto al triangolo ABC, $A:\binom{0}{1}$, $B:\binom{2}{0}$, $C:\binom{1}{2}$ e l'area racchiusa dalla curva $\mathscr{C}'$ (di che tipo di curva si tratta?) trasformata di $\mathscr{C}$.

(2) Nel piano proiettivo reale (coordinate omogenee x_0, x_1, x_2) determinare l'equazione della conica $\mathscr{C}$ di centro $C:(1,2)$, avente $r: y=x+1$ come asintoto, passante per $B:[0,1,-1]$ e tangente all'asse y. Si determinino l'altro asintoto, gli assi, e la forma canonica metrica. Si abbozzi il grafico della curva.

(3) Nello spazio euclideo reale, in cui sia dato un sistema di riferimento cartesiano $Oxyz$, dopo aver verificato che i piani $\pi_1: x+7y+z-1=0$, $\pi': x-z=0$, $\pi'': x-y+z=0$ sono mutuamente perpendicolari, si verifichi che le rette $r=\pi_1\cap\pi'$, $s=\pi_2\cap\pi''$ (dove $\pi_2: x+2y+z=0$) risultano sghembe, e se ne determini la distanza e la perpendicolare comune.

Tempo a disposizione 1h 45m

Le risposte vanno adeguatamente giustificate

→

Algebra lineare

1' Sia data la famiglia di matrici

$$A_{a,b,c} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ b & 0 & c \end{pmatrix}$$

Individuare A, all'interno della f. data, tale che
1) uno degli autovalori valga 2
2) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sia un autovettore di A

Dire se A risulta diagonalizzabile e, in caso affermativo, determinarne una base di autovettori.

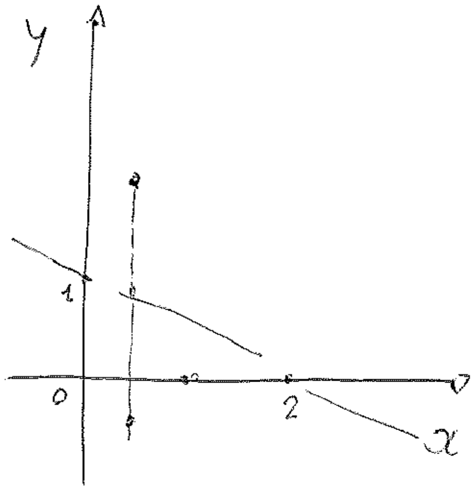
2' Risolvere, al variare di $\mu \in \mathbb{R}$, il sistema

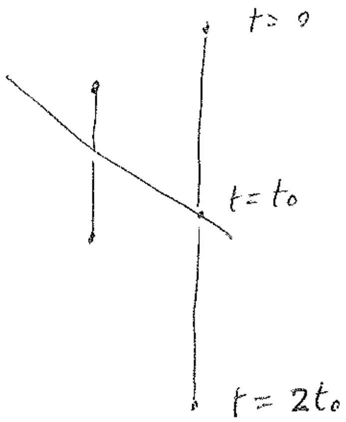
$$\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

interpretando geometricamente le soluzioni ottenute

Tempo totale a disposizione (AL + EG) 2h 30m

E1





$$y-1 = -\frac{1}{2}x$$

simmetria obliqua rispetto a r

$$2(y-1)+x=0$$

$$r: \boxed{x+2y-2=0}$$

$$P: \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$r_P: \begin{cases} x = a \\ y = b+t \end{cases}$$

intersechiamo con r:

$$a+2(b+t)-2=0$$

$$a+2b+2t-2=0$$

$$t = \frac{2-a-2b}{2}$$

$$P' = \begin{pmatrix} a \\ b + \cancel{2}\,\frac{2-a-2b}{\cancel{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b+2-a-2b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ 2-a-b \end{pmatrix}$$

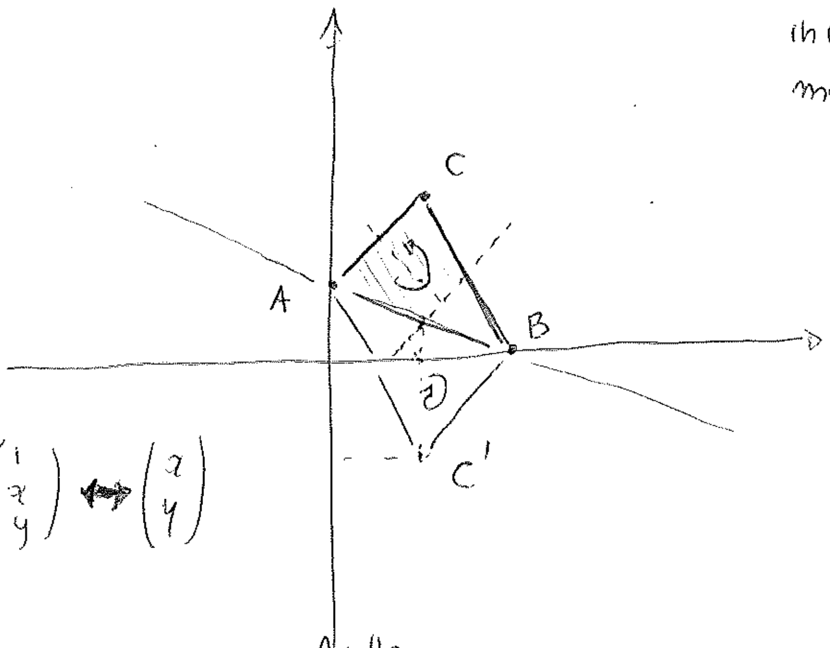
Pertanto l'affinità è descritta da

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

costante di affinità

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$\hat{A}$ conserva le aree in valore assoluto, ma non l'orientamento



$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

controllo

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto A' : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto B' : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$C : \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \longmapsto C' : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \underbrace{-1}_{2-1-2} \end{pmatrix}$$

(ok, chiaro geometricamente)

Circonferenza per A, B, C.

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$A: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $B: \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ $C: \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 1 + b + c = 0 \\ 4 + 2a + c = 0 \\ \underbrace{1 + 4}_{5} + a + 2b + c = 0 \end{cases}$$

$$-3 + b - 2a = 0 \qquad b = 2a + 3$$

$$c = -2a - 4$$

$$5 + a + 2\overbrace{(2a+3)}^{b} \overbrace{- 2a - 4}^{c} = 0$$

$$5 + a + 4a + 6 - 2a - 4 = 0$$

$$3a + 7 = 0 \qquad a = -\frac{7}{3}$$

$$b = 2\left(-\frac{7}{3}\right) + 3 = -\frac{14}{3} + 3 = -\frac{5}{3} \qquad b = -\frac{5}{3}$$

$$c = -2\left(-\frac{7}{3}\right) - 4 = \frac{14}{3} - 4 = \frac{2}{3} \qquad c = \frac{2}{3}$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

$$x^2 + y^2 - 2x_0 - 2y_0 + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0$$

$$c = x_0^2 + y_0^2 - R^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - R^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4R^2}{4}$$

Calcoliamo il raggio di $\mathcal{C}$

$$c = \frac{2}{3} \qquad a = -\frac{7}{3} \qquad b = -\frac{5}{3}$$

$$c = \frac{a^2+b^2-4R^2}{4}$$

$$4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{49}{9} + \frac{25}{9} - 4R^2$$

$$\frac{8}{3} = \frac{74}{9} - 4R^2$$

$$R^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{74}{9} - \frac{8}{3}\right) = \frac{74-24}{4 \cdot 9} = \frac{50}{4 \cdot 9} = \frac{25}{18}$$

$$\left(R = \frac{5}{\sqrt{\underset{3^2 \cdot 2}{18}}} = \frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{6} \right)$$

Area del cerchio: $\pi R^2 = \pi \frac{25}{18}$

La trasf. muta il cerchio in un'ellisse che, in valore assoluto, avrà la stessa area

(cost. affinità $= -1$)

---

controllo calcoli: circ. per A B C in altro modo:

asse di AB: retta per $M: (1, \frac{1}{2}) \perp AB$

$$\boxed{y - \frac{1}{2} = 2(x-1)}$$

retta AC: coeff. ang $= +1$

pto medio di AC: $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ asse: $y - \frac{3}{2} = -1\left(x - \frac{1}{2}\right)$

K: centro della circ:

$$\begin{cases} y - \frac{1}{2} = 2(x-1) \\ y - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - x \end{cases}$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} = 2x - 2 - \frac{1}{2} + x$$

$$1 = 3x - \frac{5}{2}$$

$$3x = 1 + \frac{5}{2} = \frac{7}{2} \qquad x_0 = \frac{7}{6} \qquad a = -2x_0 = -\frac{7}{3} \quad \checkmark$$

$$y_0 = 2 - x_0 = 2 - \frac{7}{6} = \frac{5}{6} \qquad b = -2y_0 = -\frac{5}{3} \quad \checkmark$$

$$R^2 = d^2(K, A) = \left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6} - 1\right)^2$$

$$= \frac{49}{36} + \frac{1}{36} = \frac{50}{36} = \frac{25}{18} \quad \checkmark$$

$$R = \frac{5}{3\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{6}$$

Possiamo accertare che $\mathscr{C}'$ ·· non è una circonferenza anche così: se lo fosse, dovrebbe passare per i pti ciclici, ma T <u>non</u> <u>muta</u> i pti ciclici in se stessi (ev. scambiati):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{C_\infty^{\pm}}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \pm i \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \mp i \end{pmatrix}$$

NB: ↑ sono di nuovo pti impropri (complessi) poiché T è affine

[Nota: le affinità che trasformano le circonferenze in se stesse sono le <u>similitudini</u>; esse hanno la forma

$$x \longmapsto \underset{\mathbb{R}\setminus\{0\}}{\underset{\cap}{\lambda}} \underset{\text{isometria}}{\underset{\uparrow}{M}} x + b$$

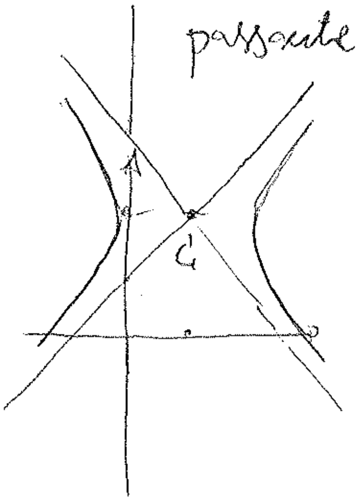
]

(E2) Iperbole di centro $C: (1,2)$

un asintoto: $y = x+1$

tangente , a $x=0$ (asse y)

passante per $B: [0, 1, -1]$



Sol. notiamo che B è la direzione dell'altro asintoto, che pertanto ha equazione $y-2 = -(x-1) = -x+1$

ovvero $x+y-2-1=0$

$x+y-3=0$

L'eq. è allora del tipo (in forma affine)

$$(x-y+1)(x+y-3) - \lambda = 0$$

intersechiamo con $x=0$ e imponiamo ... una radice doppia (in y)

$$(-y+1)(y-3) - \lambda = 0$$

$$-y^2 + \underbrace{y + 3y}_{4y} - 3 - \lambda = 0$$

$$y^2 - 4y + 3 + \lambda = 0$$

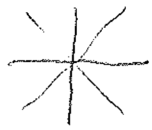
$$\frac{\Delta}{4} = 4 - (3+\lambda) = 0 \qquad 1-\lambda = 0 \qquad \lambda = 1$$

se $\lambda=1$ è $y=2$ doppia

Dunque l'eq. dell'iperbole è

$$(x-y+1)(x+y-3)-1=0$$

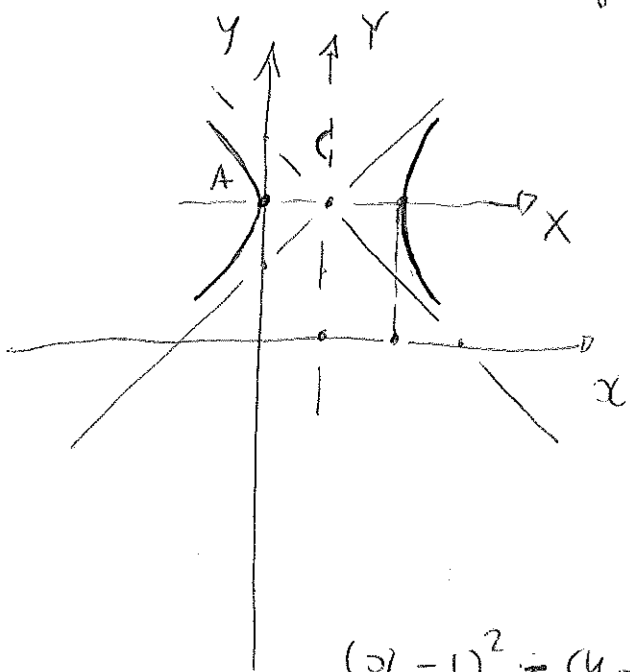
È subito visto che gli assi sono $y=2$ (asse focale) e $x=1$



calcoliamo a e b [si può fare <u>immediatamente</u>]

intanto $a=b$ (l'ip. è equilatera)

e $a=1$ ($a=\overline{AC}$, v. figura) $\boxed{a=b=1}$



Esplicitamente:

$$(x-y)(x+y)+(x+y)-3(x-y)\overbrace{-3-1}^{-4}=0$$

$$\boxed{x^2-y^2-2x+4y-4=0}$$

$$(x-2x+1)^2-(y^2-4y+4)-1+4-4=0$$

$$(x-1)^2-(y-2)^2-1=0$$

$$\boxed{(x-1)^2-(y-2)^2=1} \leftarrow \text{eq. canonica metrica}$$

$X=x-1$
$Y=y-2$ $\quad X^2-Y^2=1$

per completezza, vediamolo anche col metodo degli invarianti

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$\mathfrak{a} = \det A =$

$4 - 4 + 1 = 1$

$\mathfrak{a}_{00} = -1$

$\mathcal{Y} = 0$ (ip. equilatera)

Risolviamo

$$t^2 + \frac{\mathfrak{a}_{00}\mathcal{Y}}{\mathfrak{a}} t + \frac{\mathfrak{a}_{00}^3}{\mathfrak{a}^2} = 0$$. Si ha subito

$$t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = \pm 1$$

$\alpha = a^2 = 1$

$\beta = -b^2 = -1$

$\frac{1}{\alpha} = 1 \Rightarrow a = 1$

$\frac{1}{\beta} = -1 \Rightarrow b = 1$

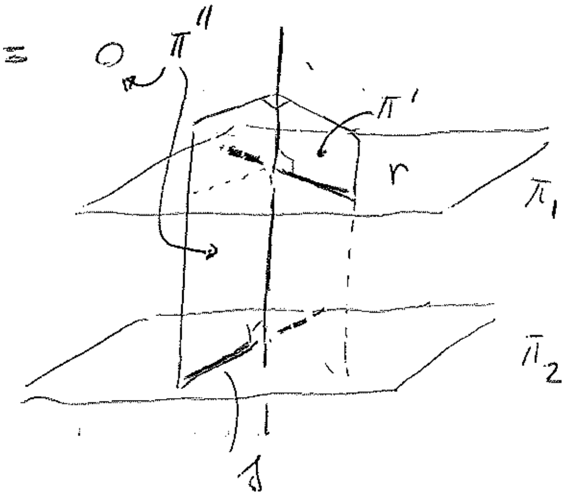
V

E3

$$r: \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 & \pi_1 \\ x - z = 0 & \pi' \end{cases}$$

$$s: \begin{cases} x + 2y + z = 0 & \pi_2 \\ x - y + z = 0 & \pi'' \end{cases}$$

[sono eff. rette ...]



i piani π_1 (π_2), π', π'' sono mutuamente ortogonali: calcolo diretto oppure, per es.

$$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \underline{i} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \underline{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \underline{k} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -2\underline{i} - \underline{j}(-2) + \underline{k}(-2)$$

$$= -2\underline{i} + 2\underline{j} - 2\underline{k}$$

Le rette r e s hanno direzioni diverse (ortogonali) e si trovano su piani paralleli => sono sghembe.

• distanza = distanza tra π_1 e π_2

calcoliamola: sia $P \in \pi_2$, es. $O:(0,0,0)$

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(O, \pi_1) = \frac{|\ -1\ |}{\sqrt{1+4+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \quad \left(= \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

• perpendicolare comune: per evidenti ragioni geometriche sarà la retta $\pi' \cap \pi''$

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = z \equiv t \\ y = x + z = t + t = 2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = t \end{cases}$$

Algebra lineare

(1')

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ b & 0 & c \end{pmatrix}$$

(triang. inf.) Se uno degli autovalori è 2,

visto che $P_C^A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ a & 3-\lambda & 0 \\ b & 0 & c-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)(c-\lambda)$

è subito $c = 2$. Se $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ è un autovettore,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ b & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ $1 = \rho$

$a + 3 = \rho = 1 \Rightarrow a = -2$

$b + c = \rho = 1$

$b + 2 = 1 \Rightarrow b = -1$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; A è diagonalizzabile (tre autovalori distinti) base di autovettori: intanto $\bar{V}_2^A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(diretto!)

$$\bar{V}_1^A = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ dalla prima parte

rimane da determinare $\bar{V}_3^A$: si ha subito $\bar{V}_3^A = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

per ispezione diretta della matrice.

calcolo standard

$$\begin{pmatrix} \overbrace{1-3}^{-2} & 0 & 0 \\ -2 & \overbrace{3-3}^{0} & 0 \\ -1 & 0 & \underbrace{2-3}_{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

$$-x - z = 0 \qquad x + z = 0 \quad \Rightarrow z = 0$$

$$\Rightarrow \quad y = y$$

(2')

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A_\mu} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$\det A_\mu = 6\mu \neq 0 \iff \mu \neq 0$ Se $\mu \neq 0$ il rango è max $\Rightarrow$ il sistema è univocamente risolubile e viene individuato un punto.

Se invece $\mu = 0$, il rango di A_0 vale 2, ma è subito visto che $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$ ha rango 2, è pertanto il sistema è ancora risolubile. Da $\nu(A_0) = 3 - \rho(A_0) = 3-2=1$ si vede che il sistema ha ∞^1 sol, e geometricamente è una retta.

$$\begin{cases} \mu x = \mu \\ -2x + 3y = 1 \\ -x + 2z = 2 \end{cases}$$

Se $\mu \neq 0$ è

$x = 1$

$-2 + 3y = 1$

$3y = 3$ $\quad y = 1$

$-1 + 2z = 2$

$2z = 3$ $\quad z = \frac{3}{2}$

$\Rightarrow P:(1, 1, \frac{3}{2})$

Se $\mu = 0$

$$\begin{cases} -2x + 3y = 1 \\ -x + 2z = 2 \end{cases}$$

$3y = 1 + 2x \qquad y = \frac{1}{3}(1+2x) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}x$

$2z = x + 2 \qquad z = \frac{1}{2}(x+2) = 1 + \frac{x}{2}$

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t \\ z = 1 + \frac{t}{2} \end{cases}$$

In definitiva

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}t \\ z = 1 + \frac{t}{2} \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}}_{P_0} + t \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

individuano lo stesso sottospazio unidimensionale $\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

☆ retta per P_0 di direzione $\left\langle \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$