GEOMETRIA Prova scritta del 2/2/2010

(Prof. M. Spera)

① Nello spazio euclideo reale, in cui sia fissato un riferimento cartesiano, sia data la superficie

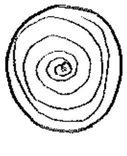
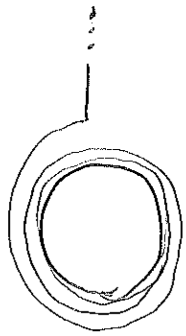
$$\mathcal{E}: \quad 2x^2 + y^2 + 4z^2 = 1$$

(di' che cosa si tratta?). Se ne determini la $\underline{I}^a$ e la $\underline{II}^a$ forma fondamentale in $P_0: (0, 0, \frac{1}{2})$, le curvature principali, la curvatura gaussiana, l'indicatrice di Dupin (si può utilizzare il calcolo implicito). Determinare la curvatura normale delle curve su $\mathcal{E}$ uscenti da P_0, con direzione individuata da $\underline{u} = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$

② Con rif. all'es. 1, si consideri la curva $\mathcal{C} = \mathcal{E} \cap \pi$

$\pi: \sqrt{3}x - y = 0$. Se ne calcoli la curvatura geodetica in $P_0: (0, 0, \frac{1}{2})$. $\mathcal{C}$ è una geodetica? [Sugg. calcolare k_g in $\underset{\mathcal{E} \cap \pi}{\mathcal{C}} \cap \{z = 0\}$]

③ Siano dati gli spazi topologici

$X =$  $Z =$ 

Dire se sono o meno compatti, connessi, connessi p. archi, localmente connessi p. archi. Sono omeomorfi?

Tempo a disposizione 2h. Le risposte vanno adeguatamente giustificate

Geometria 2/2/10

(1)

$\mathcal{E} : \quad 4z^2+2x^2+y^2=1$ ellissoide triassiale

I^a e II^a forma fondamentale in $P_0: (0,0,\frac{1}{2}) \in \mathcal{E}$

Utilizziamo il calcolo implicito : loc. $\mathcal{E}: \ z=\varphi(x,y)$ (Dini...)

Calcoli preliminari $\quad \boxed{4\varphi^2+2x^2+y^2-1=0} \qquad \varphi_0 \equiv \varphi(P_0)=\frac{1}{2}$

$\frac{\partial}{\partial x} \qquad 8\varphi\varphi_x+4x=0$

$\boxed{2\varphi\varphi_x+x=0} \qquad \Rightarrow \boxed{\varphi_x^0=0}$

$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \qquad 2\varphi_x^2+2\varphi\varphi_{xx}+1=0$

$2\underbrace{\varphi^0}_{=\frac{1}{2}}\varphi_{xx}^0+1=0 \qquad \varphi_{xx}^0+1=0 \qquad \boxed{\varphi_{xx}^0=-1}$

$\frac{\partial}{\partial y} \qquad 8\varphi\varphi_y+2y=0 \qquad \boxed{\varphi_y^0=0}$

$\boxed{4\varphi\varphi_y+y=0}$

$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad 4\varphi_y^2+4\varphi\varphi_{yy}+1=0$

$4\underbrace{\varphi^0}_{=\frac{1}{2}}\varphi_{yy}^0+1=0 \qquad 2\varphi_{yy}^0+1=0 \qquad \boxed{\varphi_{yy}^0=-\frac{1}{2}}$

$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial y\partial x} \qquad \cancel{2}\varphi_x\varphi_y+\cancel{2}\varphi\varphi_{yx}=0$

$\underbrace{\varphi_x^0}_{=0}\underbrace{\varphi_y^0}_{=0}+\underbrace{\varphi^0}_{=\frac{1}{2}}\varphi_{yx}^0=0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\varphi_{xy}^0=\varphi_{yx}^0=0}$

$\underline{r} = (x, y, \varphi(x,y))$

$\underline{r}_x = (1, 0, \varphi_x)$

$\underline{r}_y = (0, 1, \varphi_y)$

$\underline{r}_{xx} = (0, 0, \varphi_{xx})$

$\underline{r}_{xy} = (0, 0, \varphi_{xy})$

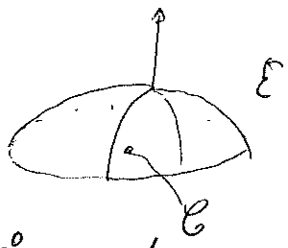
$\overset{\shortparallel}{\underline{r}_{yx}}$

$\underline{r}_{yy} = (0, 0, \varphi_{yy})$

$\varphi_0 = \frac{1}{2} \quad \varphi_x^0 = \varphi_y^0 = 0$

$\varphi_{xx}^0 = -1, \ \varphi_{xy}^0 = 0, \ \varphi_{yy}^0 = -\frac{1}{2}$

$\underline{N}^0 = (0, 0, 1)$



$E_0 = \langle \underline{r}_x^0, \underline{r}_y^0 \rangle = 1$

$F_0 = \langle \underline{r}_x^0, r_y^0 \rangle = 0$

$G_0 = \langle r_y^0, r_y^0 \rangle = 1$

(ciò è chiaro già dalla teoria generale)

$e = \langle r_{xx}, \underline{N} \rangle$ etc..

$e_0 = \varphi_{xx}^0 = -1 \qquad f_0 = 0, \quad g_0 = \varphi_{yy}^0 = -\frac{1}{2}$

entrambe negative, ok se si orienta con la normale esterna

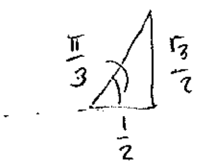
Da ciò è chiaro che $k_1 = -1, \quad k_2 = -\frac{1}{2}$

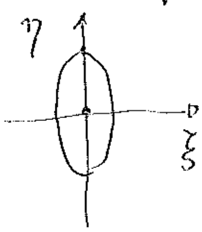
matrice di Weingarten

$K = k_1 k_2 = \frac{1}{2}$ in P_0 (= det $\mathcal{H}$; P è critico per φ)

$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

★ indicatrice di Dupin: ellisse



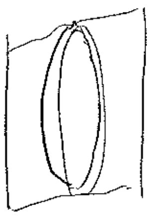


$\xi^2 + \frac{1}{2}\eta^2 = 1$

$\xi^2 + \frac{\eta^2}{(\sqrt{2})^2} = 1$

Sia $\underline{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$.

$\quad\ \ \overset{\shortparallel}{\cos\frac{\pi}{3}} \quad \sin\frac{\pi}{3}$



curvatura normale in P_0: $(0,0,1)$ delle curve aventi direzione $\underline{n}$:

$$k_n = k_1 \underbrace{\cos^2\frac{\pi}{3}}_{\frac{1}{4}} + k_2 \underbrace{\sin^2\frac{\pi}{3}}_{\frac{3}{4}} = (-1)\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\,\frac{3}{4}$$

Eulero

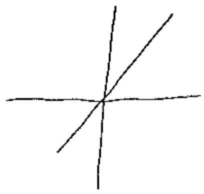
$$= -\frac{1}{4} - \frac{3}{8} = \frac{-2-3}{8}$$

$$= -\frac{5}{8}$$

② Sia data $\mathcal{C} = \mathcal{E} \cap \pi$ $\qquad \pi: \sqrt{3}x - y = 0$

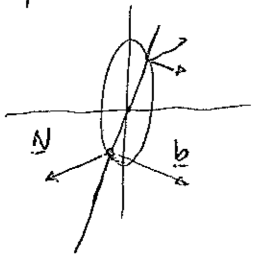
curvatura geodetica in $P_0 = 0$

non è una geodetica



nei punti $\cdot\ \mathcal{C} \cap \{z=0\}$ piano (xy)

$\mathcal{C}$ è un'ellisse in π (sezione piana di un ellissoide)



* $\underline{N}$ non è $\perp$ $\underline{b}$

vediamo: $\qquad \underline{b}: \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ ad es...

$$\begin{cases} 4z^2 + 2x^2 + y^2 = 1 \\ \sqrt{3}x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \leadsto \quad 2x^2 + y^2 = 1, \quad y = \sqrt{3}x$$

$$2x^2 + 3x^2 = 1$$

$$5x^2 = 1$$

$$x = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$$

$$P_\pm : \left(\pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

calcoliamo il versore normale a $\mathcal{E}$ in $P_+ : \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 0\right)$

Piano tangente a $f(x,y,z) = 0$

$$f^0_x(x - x_0) + f^0_y(y - y_0) + f^0_z(z - z_0) = 0$$

$$\nabla f|_{P_0} \propto \underline{N}_0$$

nel nostro caso, per $\mathcal{E}$

$$f^0_x = 4x_0 \qquad \Rightarrow \quad \underline{N}^0 \propto \left(\frac{4}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

$$f^0_y = 2y_0$$

$$f^0_z = 8z_0 \qquad \langle \underline{N}^0, \underline{b}^0 \rangle = \underset{\neq 0}{\beta} \cdot \left(\frac{\cancel{4}^{\,2}}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}} - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\right)$$

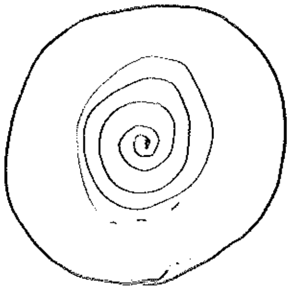
$$\underline{b}^0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right) \qquad = \underset{\neq 0}{\beta}\left(\sqrt{\frac{3}{5}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \neq 0$$

ora $k^0 > 0$ poiché $\mathcal{C} = \mathcal{E} \cap \pi$ è un'ellisse

$\Rightarrow \quad k^0_g \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{C}$ non è una geodetica. □

③

X



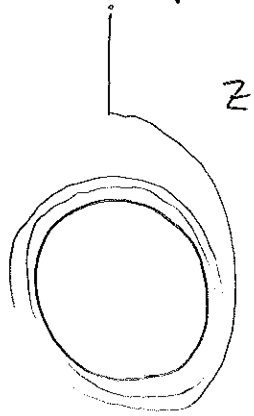
X è compatto

(è chiuso e limitato)

X è connesso: è chiusura di Y =  che è connesso per archi e pertanto connesso.

X non è connesso per archi né loc. connesso per archi

Z



Z è connesso, non connesso per archi, non loc. conn. per archi

non è compatto (non è limitato)

$X \not\approx Z$