Esercizi assegnati il 24 ottobre

1 Primo Esercizio

Date le definizioni che introducono la rappresentazione dei naturali alla Church e le funzioni **suc**, **plus** e **times**:

a) Scrivere le prove corrispondenti ai termini **3**, **plus**, **times**, **suc**.

b) Scrivere le prove corrispondenti ai termini (**suc** 1), (**plus** 2 1), (**times** 2 3).

c) Normalizzare le prove trovate in (b).

Il tipo di un numero naturale è $\mathrm{N} \stackrel{\text{def}}{=} (A \to A) \to (A \to A)$.

1.1 Esercizio (a)

Per abbreviare le prove, applico più implica–introduzioni contemporaneamente. Inoltre marco le assunzioni nella parte del lambda–termine invece che nella parte implicativa della prova.

Tipaggio del termine $\mathbf{3} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda f^{A\to A}.\lambda x^A.f(f(fx))$:

$$\dfrac{\dfrac{[f : A \to A]_{\mathbf{1}} \quad \dfrac{[f : A \to A]_{\mathbf{1}} \quad \dfrac{[f : A \to A]_{\mathbf{1}} \quad [x : A]_{\mathbf{2}}}{fx : A}\ {\to}\text{-E}}{f(fx) : A}\ {\to}\text{-E}}{f(f(fx)) : A}\ {\to}\text{-E}}{\lambda[f^{A\to A}]_{1}.\lambda[x^A]_{2}.f(f(fx)) : (A \to A) \to (A \to A)}\ 2\cdot{\to}\text{-I}$$

Tipaggio del termine $\mathbf{suc} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda n^{\mathrm{N}}.\lambda f^{A\to A}.\lambda x^A.(nf)(fx)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[n : \mathrm{N}]_{\mathbf{1}} \quad [f : A \to A]_{\mathbf{2}}}{nf : A \to A}\ {\to}\text{-E} \qquad \dfrac{[f : A \to A]_{\mathbf{2}} \quad [x : A]_{\mathbf{3}}}{fx : A}\ {\to}\text{-E}}{(nf)(fx) : A}\ {\to}\text{-E}}{\lambda[n^{\mathrm{N}}]_{1}.\lambda[f^{A\to A}]_{2}.\lambda[x^A]_{3}.(nf)(fx) : \mathrm{N} \to (A \to A) \to (A \to A)}\ 3\cdot{\to}\text{-I}$$

Tipaggio del termine $\mathbf{plus} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda m^{\mathrm{N}}.\lambda n^{\mathrm{N}}.\lambda f^{A\to A}.\lambda x^A.(mf)((nf)x)$:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[m : \mathrm{N}]_{\mathbf{1}} \quad [f : A \to A]_{\mathbf{3}}}{mf : A \to A}\ {\to}\text{-E} \qquad \dfrac{\dfrac{[n : \mathrm{N}]_{\mathbf{2}} \quad [f : A \to A]_{\mathbf{3}}}{nf : A \to A}\ {\to}\text{-E} \quad [x : A]_{\mathbf{4}}}{(nf)x : A}\ {\to}\text{-E}}{(mf)((nf)x) : A}\ {\to}\text{-E}}{\lambda[m^{\mathrm{N}}]_{1}.\lambda[n^{\mathrm{N}}]_{2}.\lambda[f^{A\to A}]_{3}.\lambda[x^A]_{4}.(mf)((nf)x) : \mathrm{N} \to \mathrm{N} \to (A \to A) \to (A \to A)}\ 4\cdot{\to}\text{-I}$$

Tipaggio del termine **times** $\stackrel{\text{def}}{=} \lambda m^{\mathrm{N}}.\lambda n^{\mathrm{N}}.\lambda f^{A\to A}.(m(nf))$:

$$\dfrac{\dfrac{[m:\mathrm{N}]_{\mathbf{1}} \qquad \dfrac{[n:\mathrm{N}]_{\mathbf{2}} \quad [f:A\to A]_{\mathbf{3}}}{nf : A\to A}\ \to\text{-E}}{m(nf):A\to A}\ \to\text{-E}}{\lambda[m^{\mathrm{N}}]_{1}.\lambda[n^{\mathrm{N}}]_{2}.\lambda[f^{A\to A}]_{3}.(m(nf)) : \mathrm{N}\to\mathrm{N}\to(A\to A)\to(A\to A)}\ 3\cdot\to\text{-I}$$

1.2 Esercizio (b)

Nello svolgimento dell'esercizio, date le prove al punto (a), assumo che:

$$\textbf{suc} : \mathrm{N}\to\mathrm{N} \qquad\qquad \textbf{plus}, \textbf{times} : \mathrm{N}\to\mathrm{N}\to\mathrm{N}$$

Siccome le prove andranno poi espanse nell'esercizio successivo, in fase di normalizzazione, per brevità ometto di ricopiare gli alberi di prova per dedurre i tipi delle funzioni precedentemente elencate.

Tipaggio di (**suc** 1):

$$\dfrac{\textbf{suc} : \mathrm{N}\to\mathrm{N} \quad 1 : \mathrm{N}}{(\textbf{suc}^{\mathrm{N}\to\mathrm{N}}\ 1^{\mathrm{N}}) : \mathrm{N}}\ \to\text{-E}$$

Tipaggio di (**plus** 2 1) e (**times** 2 3):

$$\dfrac{\dfrac{\textbf{plus} : \mathrm{N}\to\mathrm{N}\to\mathrm{N} \quad 2 : \mathrm{N}}{(\textbf{plus}^{\mathrm{N}\to\mathrm{N}}\ 2^{\mathrm{N}}) : \mathrm{N}\to\mathrm{N}}\ \to\text{-E} \qquad 1 : \mathrm{N}}{(\textbf{plus}^{\mathrm{N}\to\mathrm{N}}\ 2^{\mathrm{N}}\ 1^{\mathrm{N}}) : \mathrm{N}}\ \to\text{-E} \qquad \dfrac{\dfrac{\textbf{times} : \mathrm{N}\to\mathrm{N}\to\mathrm{N} \quad 2 : \mathrm{N}}{(\textbf{times}^{\mathrm{N}\to\mathrm{N}}\ 2^{\mathrm{N}}) : \mathrm{N}\to\mathrm{N}}\ \to\text{-E} \qquad 1 : \mathrm{N}}{(\textbf{times}^{\mathrm{N}\to\mathrm{N}}\ 2^{\mathrm{N}}\ 1^{\mathrm{N}}) : \mathrm{N}}\ \to\text{-E}$$

1.3 Esercizio (c)

Nel corso dell'esercizio, marco con α la premessa minore del massimo e con β la formula dedotta per modus ponens.

Parte implicativa della prova per (**suc** 1):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{{\color{blue}[\mathrm{N}]_{\mathbf{1}}} \quad [A\to A]_{\mathbf{2}}}{A\to A}\ \to\text{-E} \qquad \dfrac{[A\to A]_{\mathbf{2}} \quad [A]_{\mathbf{3}}}{A}\ \to\text{-E}}{A}\ \to\text{-E}}{[A]_{3}\to A}\ \to\text{-I}}{{\color{red}([A\to A]_{2})\to(A\to A)}}\ \to\text{-I}}{{\color{blue}[N]_{1}} \to {\color{red}\mathrm{N}}}\ \to\text{-I} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\to A]_{\mathbf{4}} \quad [A]_{\mathbf{5}}}{A}\ \to\text{-E}}{[A]_{5}\to A}\ \to\text{-I}}{{\color{blue}[(A\to A)]_{4}\to(A\to A)}}\ \to\text{-I}}{{\color{red}\mathrm{N}}}\ \to\text{-E}$$

1° passo di normalizzazione:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to A]_{\mathbf{4}} \quad [A]_{\mathbf{5}}}{A}\,{\to}\text{-E}}{[A]_5 \to A}\,{\to}\text{-I}}{[(A \to A)]_4 \to (A \to A)}\,{\to}\text{-I} \qquad [A \to A]_{\mathbf{2}}}{A \to A}\,{\to}\text{-E} \qquad \dfrac{[A \to A]_{\mathbf{2}} \quad [A]_{\mathbf{3}}}{A}\,{\to}\text{-E}}{A}\,{\to}\text{-E}}{[A]_3 \to A}\,{\to}\text{-I}}{([A \to A]_2) \to (A \to A)}\,{\to}\text{-I}
$$

2° e 3° passo di normalizzazione:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to A]_{\mathbf{2}} \quad [A]_{\mathbf{5}}}{A}\,{\to}\text{-E}}{[A]_5 \to A}\,{\to}\text{-I} \qquad \dfrac{[A \to A]_{\mathbf{2}} \quad [A]_{\mathbf{3}}}{A}\,{\to}\text{-E}}{A}\,{\to}\text{-E}}{[A]_3 \to A}\,{\to}\text{-I}}{([A \to A]_2) \to (A \to A)}\,{\to}\text{-I}
\quad \Rightarrow \quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to A]_{\mathbf{2}} \qquad \dfrac{[A \to A]_{\mathbf{2}} \quad [A]_{\mathbf{3}}}{A}\,{\to}\text{-E}}{A}\,{\to}\text{-E}}{[A]_3 \to A}\,{\to}\text{-I}}{([A \to A]_2) \to (A \to A)}\,{\to}\text{-I}
$$

Parte implicativa della prova per (**plus** 2 1):

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathrm{N}]_{\mathbf{1}}\ [A \to A]_{\mathbf{3}}}{A \to A}\,{\to}\text{-E} \qquad \dfrac{\dfrac{[\mathrm{N}]_{\mathbf{2}}\ [A \to A]_{\mathbf{3}}}{A \to A}\,{\to}\text{-E} \qquad [A]_{\mathbf{4}}}{A}\,{\to}\text{-E}}{A}\,{\to}\text{-E}}{[A]_4 \to A}\,{\to}\text{-I}}{[A \to A]_3 \to (A \to A)}\,{\to}\text{-I}}{[\mathrm{N}]_2 \to \mathrm{N}}\,{\to}\text{-I}}{[\mathrm{N}]_1 \to \mathrm{N} \to \mathrm{N}}\,{\to}\text{-I} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to A]_{\mathbf{5}} \qquad \dfrac{[A \to A]_{\mathbf{5}}\ [A]_{\mathbf{6}}}{A}\,{\to}\text{-E}}{A}\,{\to}\text{-E}}{[A]_6 \to A}\,{\to}\text{-I}}{[(A \to A)]_5 \to (A \to A)}\,{\to}\text{-I}}{\mathrm{N} \to \mathrm{N}}\,{\to}\text{-E} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \to A]_{\mathbf{7}}\ [A]_{\mathbf{8}}}{A}\,{\to}\text{-E}}{[A]_8 \to A}\,{\to}\text{-I}}{[(A \to A)]_7 \to (A \to A)}\,{\to}\text{-I}}{\mathrm{N}}\,{\to}\text{-E}
$$

1° passo di normalizzazione:

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A \to A]_{\mathbf{5}}$}
\AxiomC{$[A \to A]_{\mathbf{5}}$}
\AxiomC{$[A]_{\mathbf{6}}$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[A]_6 \to A$}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[(A \to A)]_5 \to (A \to A)$}
\AxiomC{$[A \to A]_{\mathbf{3}}$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{$A \to A$}
\AxiomC{$[\mathrm{N}]_{\mathbf{2}}$}
\AxiomC{$[A \to A]_{\mathbf{3}}$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{$A \to A$}
\AxiomC{$[A]_{\mathbf{4}}$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[A]_4 \to A$}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[A \to A]_3 \to (A \to A)$}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[\mathrm{N}]_2 \to \mathrm{N}$}
\AxiomC{$[A \to A]_{\mathbf{7}}$}
\AxiomC{$[A]_{\mathbf{8}}$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[A]_8 \to A$}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[(A \to A)]_7 \to (A \to A)$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{N}
\end{prooftree}$$

2° passo di normalizzazione:

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A \to A]_{\mathbf{5}}$}
\AxiomC{$[A \to A]_{\mathbf{5}}$}
\AxiomC{$[A]_{\mathbf{6}}$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[A]_6 \to A$}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[(A \to A)]_5 \to (A \to A)$}
\AxiomC{$[A \to A]_{\mathbf{3}}$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{$A \to A$}
\AxiomC{$[A \to A]_{\mathbf{7}}$}
\AxiomC{$[A]_{\mathbf{8}}$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[A]_8 \to A$}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[(A \to A)]_7 \to (A \to A)$}
\AxiomC{$[A \to A]_{\mathbf{3}}$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{$A \to A$}
\AxiomC{$[A]_{\mathbf{4}}$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[A]_4 \to A$}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[A \to A]_3 \to (A \to A)$}
\end{prooftree}$$

3° e 4° passo di normalizzazione eseguiti contemporaneamente:

$$\begin{prooftree}
\AxiomC{$[A \to A]_{\mathbf{3}}$}
\AxiomC{$[A \to A]_{\mathbf{3}}$}
\AxiomC{$[A]_{\mathbf{6}}$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[A]_6 \to A$}
\AxiomC{$[A \to A]_{\mathbf{3}}$}
\AxiomC{$[A]_{\mathbf{8}}$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[A]_8 \to A$}
\AxiomC{$[A]_{\mathbf{4}}$}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-E}
\BinaryInfC{A}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[A]_4 \to A$}
\RightLabel{$\to$-I}
\UnaryInfC{$[A \to A]_3 \to (A \to A)$}
\end{prooftree}$$

5° e 6° passo di normalizzazione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\to A]_{\mathbf{3}} \quad \dfrac{[A\to A]_{\mathbf{3}}\;[A]_{\mathbf{6}}}{A}\,{\to}\text{-E}}{A}\,{\to}\text{-E}}{[A]_{6}\to A}\,{\to}\text{-I} \quad \dfrac{[A\to A]_{\mathbf{3}}\;[A]_{\mathbf{4}}}{A}\,{\to}\text{-E}}{\dfrac{A}{[A]_{4}\to A}\,{\to}\text{-I}}\,{\to}\text{-E}}{[A\to A]_{3}\to(A\to A)}\,{\to}\text{-I} \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\to A]_{\mathbf{3}} \quad \dfrac{[A\to A]_{\mathbf{3}} \quad \dfrac{[A\to A]_{\mathbf{3}}\;[A]_{\mathbf{4}}}{A}\,{\to}\text{-E}}{A}\,{\to}\text{-E}}{A}\,{\to}\text{-E}}{[A]_{4}\to A}\,{\to}\text{-I}}{[A\to A]_{3}\to(A\to A)}\,{\to}\text{-I}$$

Per semplificare la scrittura, invece del termine (**times** 2 3) *considero il termine* (**times** 2 1). Parte implicativa della prova per (**times** 2 1):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\mathrm{N}]_{\mathbf{1}} \quad \dfrac{[\mathrm{N}]_{\mathbf{2}} \quad [A\to A]_{\mathbf{3}}}{A\to A}\,{\to}\text{-E}}{A\to A}\,{\to}\text{-E}}{[(A\to A)]_{3}\to(A\to A)}\,{\to}\text{-I}}{[\mathrm{N}]_{2}\to\mathrm{N}}\,{\to}\text{-I}}{[\mathrm{N}]_{1}\to\mathrm{N}\to\mathrm{N}}\,{\to}\text{-I} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\to A]_{\mathbf{4}} \quad \dfrac{[A\to A]_{\mathbf{4}}\;[A]_{\mathbf{5}}}{A}\,{\to}\text{-E}}{A}\,{\to}\text{-E}}{[A]_{5}\to A}\,{\to}\text{-I}}{[(A\to A)]_{4}\to(A\to A)}\,{\to}\text{-I}}{\mathrm{N}\to\mathrm{N}}\,{\to}\text{-E} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\to A]_{\mathbf{6}}\;[A]_{\mathbf{7}}}{A}\,{\to}\text{-E}}{[A]_{7}\to A}\,{\to}\text{-I}}{[(A\to A)]_{6}\to(A\to A)}\,{\to}\text{-I}}{\mathrm{N}}\,{\to}\text{-E}$$

1° passo di normalizzazione:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\to A]_{\mathbf{4}} \quad \dfrac{[A\to A]_{\mathbf{4}}\;[A]_{\mathbf{5}}}{A}\,{\to}\text{-E}}{A}\,{\to}\text{-E}}{[A]_{5}\to A}\,{\to}\text{-I}}{[(A\to A)]_{4}\to(A\to A)}\,{\to}\text{-I} \quad \dfrac{[\mathrm{N}]_{\mathbf{2}} \quad [A\to A]_{\mathbf{3}}}{A\to A}\,{\to}\text{-E}}{A\to A}\,{\to}\text{-E}}{[(A\to A)]_{3}\to(A\to A)}\,{\to}\text{-I}}{[\mathrm{N}]_{2}\to\mathrm{N}}\,{\to}\text{-I} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A\to A]_{\mathbf{6}}\;[A]_{\mathbf{7}}}{A}\,{\to}\text{-E}}{[A]_{7}\to A}\,{\to}\text{-I}}{[(A\to A)]_{6}\to(A\to A)}\,{\to}\text{-I}}{\mathrm{N}}\,{\to}\text{-E}$$

2° passo di normalizzazione:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \rightarrow A]_{4} \quad \dfrac{[A \rightarrow A]_{4} \quad [A]_{5}}{A}\,\rightarrow\text{-E}}{A}\,\rightarrow\text{-E}}{[A]_{5} \rightarrow A}\,\rightarrow\text{-I}}{[(A \rightarrow A)]_{4} \rightarrow (A \rightarrow A)}\,\rightarrow\text{-I}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \rightarrow A]_{6} \quad [A]_{7}}{A}\,\rightarrow\text{-E}}{[A]_{7} \rightarrow A}\,\rightarrow\text{-I}}{[(A \rightarrow A)]_{6} \rightarrow (A \rightarrow A)}\,\rightarrow\text{-I} \quad [A \rightarrow A]_{3}}{A \rightarrow A}\,\rightarrow\text{-E}
$$

$$
\dfrac{\dfrac{[(A \rightarrow A)]_{4} \rightarrow (A \rightarrow A) \qquad A \rightarrow A}{A \rightarrow A}\,\rightarrow\text{-E}}{[(A \rightarrow A)]_{3} \rightarrow (A \rightarrow A)}\,\rightarrow\text{-I}
$$

3° passo di normalizzazione:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \rightarrow A]_{4} \quad \dfrac{[A \rightarrow A]_{4} \quad [A]_{5}}{A}\,\rightarrow\text{-E}}{A}\,\rightarrow\text{-E}}{[A]_{5} \rightarrow A}\,\rightarrow\text{-I}}{[(A \rightarrow A)]_{4} \rightarrow (A \rightarrow A)}\,\rightarrow\text{-I} \qquad \dfrac{\dfrac{[A \rightarrow A]_{3} \quad [A]_{7}}{A}\,\rightarrow\text{-E}}{[A]_{7} \rightarrow A}\,\rightarrow\text{-I}}{A \rightarrow A}\,\rightarrow\text{-E}}{[(A \rightarrow A)]_{3} \rightarrow (A \rightarrow A)}\,\rightarrow\text{-I}
$$

4° passo di normalizzazione:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \rightarrow A]_{3} \quad [A]_{7}}{A}\,\rightarrow\text{-E}}{[A]_{7} \rightarrow A}\,\rightarrow\text{-I} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \rightarrow A]_{3} \quad [A]_{8}}{A}\,\rightarrow\text{-E}}{[A]_{8} \rightarrow A}\,\rightarrow\text{-I} \quad [A]_{5}}{A}\,\rightarrow\text{-E}}{A}\,\rightarrow\text{-E}}{[A]_{5} \rightarrow A}\,\rightarrow\text{-I}}{[(A \rightarrow A)]_{3} \rightarrow (A \rightarrow A)}\,\rightarrow\text{-I}
$$

5° e 6° passo di normalizzazione:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \rightarrow A]_{3} \quad [A]_{7}}{A}\,\rightarrow\text{-E}}{[A]_{7} \rightarrow A}\,\rightarrow\text{-I} \qquad \dfrac{[A \rightarrow A]_{3} \quad [A]_{5}}{A}\,\rightarrow\text{-E}}{A}\,\rightarrow\text{-E}}{[A]_{5} \rightarrow A}\,\rightarrow\text{-I}}{[(A \rightarrow A)]_{3} \rightarrow (A \rightarrow A)}\,\rightarrow\text{-I}
\quad \Rightarrow \quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{[A \rightarrow A]_{3} \quad \dfrac{[A \rightarrow A]_{3} \quad [A]_{5}}{A}\,\rightarrow\text{-E}}{A}\,\rightarrow\text{-E}}{[A]_{5} \rightarrow A}\,\rightarrow\text{-I}}{[(A \rightarrow A)]_{3} \rightarrow (A \rightarrow A)}\,\rightarrow\text{-I}
$$

2 Secondo Esercizio

Osservazione. In logica applicativa affine vale il teorema di normalizzazione forte, ovvero ogni sequenza di riduzioni termina.

L'eliminazione di un massimo conduce alla rimozione di una implica–introduzione e alla sostituzione dell'assunzione corrispondente con la prova già dedotta in ogni punto in cui è scaricata. Siccome in logica implicativa affine il numero di assunzioni scaricate è limitato superiormente dal numero di applicazioni della regola $\to$-I, intuitivamente è ovvio che a ogni passo di normalizzazione si "elimina una introduzione" spostando una parte della prova, senza introdurre duplicazioni.

L'idea è quindi quella di dimostrare che a ogni massimo eliminato, indipendentemente da quale sia, il numero di occorrenze della regola di implica–introduzione diminuisce strettamente, da cui la terminazione.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{T}$ una prova in logica implicativa affine. Sia $d(\mathcal{T})$ la funzione che conta il numero di applicazioni della regola $\to$-I nell'albero di prova, definita induttivamente come segue:

$$d(\mathcal{T}) = \begin{cases} 0 & \text{se } \mathcal{T} = \alpha \qquad (\mathcal{T} \text{ è una foglia}) \\[2ex] 1 + d(\mathcal{T}_1) & \text{se } \mathcal{T} = \dfrac{\mathcal{T}_1}{\alpha}\ \to\text{-I} \\[2ex] d(\mathcal{T}_1) + d(\mathcal{T}_2) & \text{se } \mathcal{T} = \dfrac{\mathcal{T}_1 \quad \mathcal{T}_2}{\alpha}\ \to\text{-E} \end{cases}$$

dove α è una generica formula. Sia $\alpha \to \beta$ un massimo che occorra in $\mathcal{T}$:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\Gamma, [\alpha] \\ \vdots \\ \mathcal{D}_\beta \\ \vdots \\ \beta\end{matrix}}{\alpha \to \beta}\ \to\text{-I} \qquad \begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ \mathcal{D}_\alpha \\ \vdots \\ \alpha\end{matrix}}{\beta}\ \to\text{-E}$$

Indichiamo con $\mathcal{T}_0$ l'intero sotto–albero radicato in β, con $\mathcal{T}_1$ il sotto–albero radicato nella implica–introduzione e con $\mathcal{T}_2$ il sotto–albero radicato nella premessa minore:

$$\mathcal{T}_0 : \dfrac{\dfrac{\mathcal{T}_1}{\alpha \to \beta}\ \to\text{-I} \qquad \mathcal{T}_2}{\beta}\ \to\text{-E} \qquad\qquad \mathcal{T}_1 : \begin{matrix}\Gamma, [\alpha] \\ \vdots \\ \mathcal{D}_\beta \\ \vdots \\ \beta\end{matrix} \qquad\qquad \mathcal{T}_2 : \begin{matrix}\Gamma \\ \vdots \\ \mathcal{D}_\alpha \\ \vdots \\ \alpha\end{matrix}$$

Per definizione, $d(\mathcal{T}_0) = (1 + d(\mathcal{T}_1)) + d(\mathcal{T}_2)$. Indichiamo con $\mathcal{T}_0'$ il sott–albero risultante dall'eliminazione del massimo.

La classe di assunzioni α scaricata da una occorrenza di $\to$-I contiene al massimo una assunzione [o una foglia]; si hanno perciò due casi:

- Nel caso in cui la classe è vuota, la normalizzazione consiste semplicemente nello scartare il sotto–albero $\mathcal{T}_2$, un'occorrenza di implica–introduzione e un'occorrenza di implica–eliminazione. L'albero normalizzato risulta dunque $\mathcal{T}_0' = \mathcal{T}_1$ e perciò:

  $$d(\mathcal{T}_0') = d(\mathcal{T}_1) < d(\mathcal{T}_0)$$

- Se invece la classe contiene esattamente una assunzione, l'albero normalizzato, ove $\mathcal{T}_1$ è copiato un'unica volta nel punto in cui occorreva α, risulta:

  $$\mathcal{T}_0' : \begin{array}{c} \Gamma \\ \vdots \\ \Gamma, \alpha \\ \vdots \\ \mathcal{D}_\beta \\ \vdots \\ \beta \end{array} \qquad \text{cioè, con una notazione un po' approssimata:} \qquad \begin{array}{c} \mathcal{T}_1 \\ \vdots \\ \mathcal{T}_2 \end{array}$$

  In tal caso dunque:

  $$d(\mathcal{T}_0') = d(\mathcal{T}_1) + d(\mathcal{T}_2) < d(\mathcal{T}_0)$$

Perciò si è dimostrato che ogni passo di normalizzazione rimuove almeno un'occorrenza di implica–introduzione. Siccome l'albero di prova è per definizione finito, anche $d(\mathcal{T})$ è finito e perciò la procedura termina.

$\square$

cvs rcsfile: Couldn't open default trigger library: No such file or directory