Analisi Matematica I

Bioinformatica a.a. 2007/08
Prof. M. Spera

Lezione VII

Integrali impropri

Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$

Supponiamo che $f\big|_{[a,b]}$ sia integrabile

$\forall\ b \geq a$.

Poniamo $I(b) = \int_a^b f(x)\,dx$

Se $\exists\ l = \lim_{b \to +\infty} I(b)$ finito, si dice che

f è integrabile in senso improprio, o che esiste l'integrale improprio $\int_a^\infty f(x)\,dx \equiv l$
(di prima specie)

L'integrale improprio è detto divergente o indeterminato se $l = \infty$ $(\pm\infty)$, o l non esiste
(o... non esiste)
(rispettivamente)

Esempio fondamentale

$$\int_1^\infty x^{-s}\,dx \qquad \begin{array}{ll} s > 1 : & \text{converge} \\ s \leq 1 & \text{diverge} \end{array}$$

Infatti: $I(b) = \int_1^b x^{-s}\,dx = \left.\frac{x^{-s+1}}{-s+1}\right|_1^b$

$$= \begin{cases} \frac{b^{1-s}-1}{1-s} & s \neq 1 \\ \log b & s = 1 \end{cases}$$

Da cui l'asserto... se $s > 1$ è

$$\int_1^\infty x^{-s}\,ds = \frac{1}{s-1}$$

(Si noti l'analogia con $\zeta(s)$)

esempio: $\int_0^\infty \sin x\,dx$ non esiste (è indeterminato)

$I(b) = 1 - \cos b$ ...

Analogamente, si definiscono integrali del tipo $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx$

Se poi, fissato $c \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^c f(x)\,dx$ e $\int_c^{+\infty} f(x)\,dx$ convergono, si dice che converge l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

Il suo valore è, per definizione

$$\int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$$

Tale valore è, come si vede facilmente, indipendente da c

$$\left(\int_{-\infty}^{c'} + \int_{c'}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{c} + \cancel{\int_{c}^{c'}} + \cancel{\int_{c'}^{c}} + \int_{c}^{+\infty} = \int_{-\infty}^{c} + \int_{c}^{+\infty} \right)$$

Sia ora $f(x) \geq 0$ nel dominio $[a, +\infty)$

Abbiamo, per gli integrali impropri teoremi di confronto (e di confronto asintotico) analoghi ai corrispondenti risultati per le serie

Teorema. (nelle ipotesi precedenti) $f \geq 0$

$$\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx \text{ converge} \iff \exists\, M > 0$$

tale che $\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq M \quad \forall\, b \geq a$

(Cf: una serie a termini non negativi converge
$\iff$ è limitata superiormente ...)

<u>Teorema</u> <u>Criterio di confronto</u>

i) $0 \le f(x) \le g(x) \qquad x \geq a$

$$\Rightarrow 0 \le \int_a^{\infty} f(x)\,dx \le \int_a^{\infty} g(x)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^{+\infty} g \text{ convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ convergente}$$

$$\int_a^{+\infty} f \text{ divergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g \text{ divergente}$$

<u>confronto</u>
<u>asintotico</u>

ii) $f(x) \geq 0 \qquad g(x) > 0$

se $\exists \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \ell > 0$

allora $\int_a^{+\infty} f$ <u>converge</u> $\iff \int_a^{+\infty} g$ <u>converge</u>

(<u>diverge</u>) $\iff$ (<u>diverge</u>)

iii) $\ell = 0$

$$\int_a^{+\infty} g \text{ converge} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ converge}$$

$$\int_a^{+\infty} f \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^{+} g \text{ diverge}$$

iv) $\ell = +\infty$

$$\int_a^{+\infty} f \text{ converge} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g \text{ converge}$$

$$\int_a^{+\infty} g \text{ diverge} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f \text{ diverge}$$

Dim: Analoga al corrispondente risultato per le serie!
(si rimpiazzano somme finite con integrali $\int_a^b$ ..)

Integrali impropri di seconda specie

$$f : (a, b] \to \mathbb{R}$$

notare

Se $\int_x^b f(t)\,dt$ esiste $\forall\ x \in (a, b]$

si considera $I(x) = \int_x^b f(t)\,dt$

e si esamina $\lim_{x \to a^+} I(x)$ ... terminologia analoga...

Notazione $\int_{a^+}^b f$ o $\int_a^b$

Esempio: $f(t) = t^{-s}$ $0 < t \le b$

Sia $x > 0$

$$I(x) = \int_x^b t^{-s}\,dt = \begin{cases} \dfrac{b^{1-s} - x^{1-s}}{1-s} & s \neq 1 \\ \log b - \log x & s = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad s < 1$ converge

$\qquad s \geq 1$ diverge

Ci si può anche ricondurre ad un integrale improprio di prima specie (ciò significa fare in generale ..)

$$t = \frac{1}{x} \qquad dt = -x^{-2}\,dx$$

$$\int_x^b t^{-s}\,dt = \int_{\frac{1}{b}}^{\frac{1}{x}} x^{s-2}\,dx$$

$2 - s > 1$

$1 > s$

se $x \to 0^+ \quad \frac{1}{x} \to +\infty$

e si ritrova il risultato precedente.

Analoga definizione, in (a, b) di

$$\int_{a^+}^{b^-} f(x)\,dx \quad \left(\text{o} \int_a^b f(x)\,dx \,..\right)$$

$$= \int_{a^+}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{b^-} f(x)\,dx$$

a   c   b

indipendente da c!

* $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ è detto assolutamente convergente

se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ è convergente

anche in questo caso conv. assoluta $\Rightarrow$ convergenza

$\not\Leftarrow$

Esempio importante

La funzione Γ di Eulero (generalizza il fattoriale)

Sia $s>0$ si consideri

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{s-1}\, dt$$ integrale improprio

Studiamone la convergenza (convergerà per $s>0$.)

$$\Gamma(s) = \int_0^1 e^{-t}\, t^{s-1}\, dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}\, t^{s-1}\, dt$$

Studiamo $\int_1^{+\infty} e^{-t}\, t^{s-1}\, dt$

ora $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\, dt$ converge

e

$$\frac{e^{-t}\, t^{s-1}}{\frac{1}{t^2}} = e^{-t}\, t^{s+1} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$$

$s-1+2 = s+1$

$\Rightarrow$ (confronto asintotico...) $\int_1^{+\infty}$ converge.

Esaminiamo il primo integrale

$$\int_0^1 e^{-t}\, t^{s-1}\, dt$$

Si ha $\quad e^{-t}\, t^{s-1} \sim t^{s-1} \quad$ per $t \to 0$

e $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{1-s}}\, dt$ converge se $s>0$

$1-s < 1 \ldots$

(oppure, si pone $t = \frac{1}{u} \ldots$)

Si trova (integrazione per parti ...)

$$\boxed{\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)}$$

$$\Rightarrow \Gamma(n+1) = n!$$

4. Teorema (criterio di confronto con un integrale improprio)

(o criterio dell'integrale)

(dovuto a Cauchy)

Sia data $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$

non negativa, decrescente

Supponiamo che esiste (finito o no) $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$

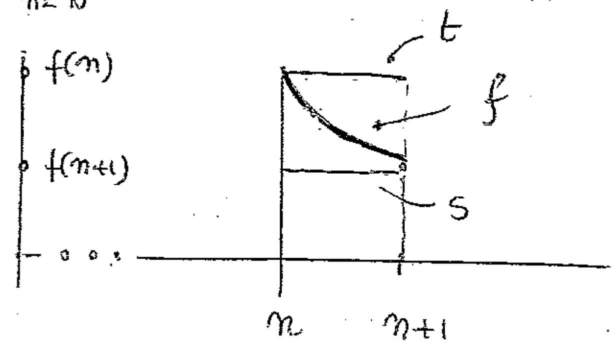
Si consideri la serie $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$

Allora i) la serie converge $\iff$ l'integrale converge

ii) in tal caso si ha la stima

☆ $$\sum_{n=N}^{\infty} f(n) \leq f(N) + \int_N^{\infty} f(x)\,dx$$

Dim.

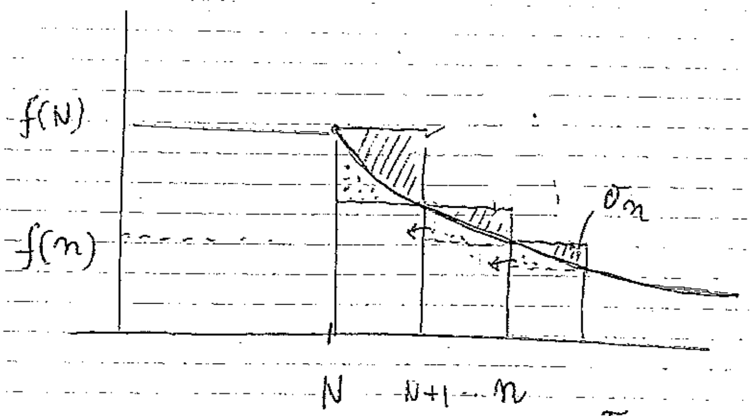


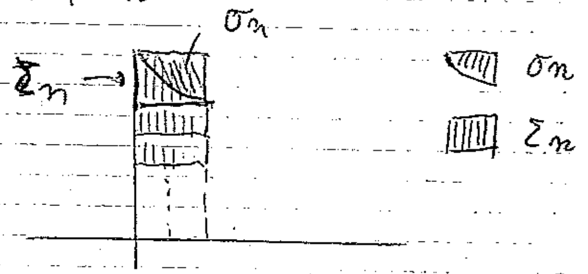
È chiaro che $\sum_{k=0}^{\infty} f(k)$ converge $\iff$ $\sum_{k=0}^{\infty} f(k+1)$ converge

s, t a scala	costruite in modo ovvio:	$\int_0^{\infty} s$	$\int_0^{\infty} t$

Da $0 \leq s \leq f \leq t$ e dal criterio di confronto si ha l'asserto.

II)





$$f(n) = f(n)\cdot 1 = \int_n^{n+1} f(t)\,dt + \sigma_n \le$$

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt + \Sigma_n$$

$$\Rightarrow \sum_{n=N}^{\infty} f(n) \le \int_N^{\infty} f(t)\,dt + \underbrace{\sum_{n=N}^{\infty} \Sigma_n}_{= f(N)}$$

□

Applicazione:

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{n^2} \le \int_N^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dt + \frac{1}{N^2} =$$

$$= \underset{(*)}{-\frac{1}{x}\Big|_N^{\infty}} + \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N} + \frac{1}{N^2} = \frac{N+1}{N^2}$$

(*) $f(x)\Big|_a^{\infty} = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - f(a))$

Elaboriamo ancora il calcolo precedente

Si ha pure: $\forall\, M \geq N$ ✱

◇ $$\boxed{0 \leq \sum_{n=N}^{M} f(n) - \int_N^M f(x)\,dx} = \sum_N^M \sigma_n$$

$$\leq \sum_N^M \tau_n$$

$$\boxed{\leq f(N)}$$

Tale formula può essere usata per provare il criterio dell'integrale direttamente: è la condizione di Cauchy!

✱ indipendentemente dalla convergenza o meno!

Ciò è utile in pratica

Calcoliamo per es.

$$\boxed{L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k\log k}}$$

(era un tema d'esame)

Dato che $\frac{1}{x\log x} \to 0$ $x \to +\infty$ applicando

◇ si ha $L = \lim_{n\to\infty} \int_n^{2n} \frac{1}{x\log x}\,dx$

$$\int_n^{2n} = \int_n^{2n} \frac{d\log x}{\log x} = \log(\log x)\Big|_n^{2n}$$

$$= \log\left(\frac{\log 2n}{\log n}\right)$$ ma $\frac{\log 2n}{\log n} \to 1$

(l'Hôpital o direttamente

$\Rightarrow$ .. $L = 0$

Si osservi che $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$ è divergente

(... criterio dell'integrale o per condensazione)
o direttamente;

vediamo: è il calcolo di prima

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x}\,dx = \int_2^{+\infty} \frac{d(\log x)}{(\log x)} =$$

(basta $a > 1$) $= \log(\log x)\Big|_2^{+\infty} = +\infty$

Osservazione Nel teorema precedente, abbiamo visto una serie come un integrale improprio. Si poteva vedere anche l'integrale improprio $\int_0^\infty f(x)\,dx$ come serie:

$$\int_0^\infty f(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x)\,dx$$

e osservare che

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n)$$

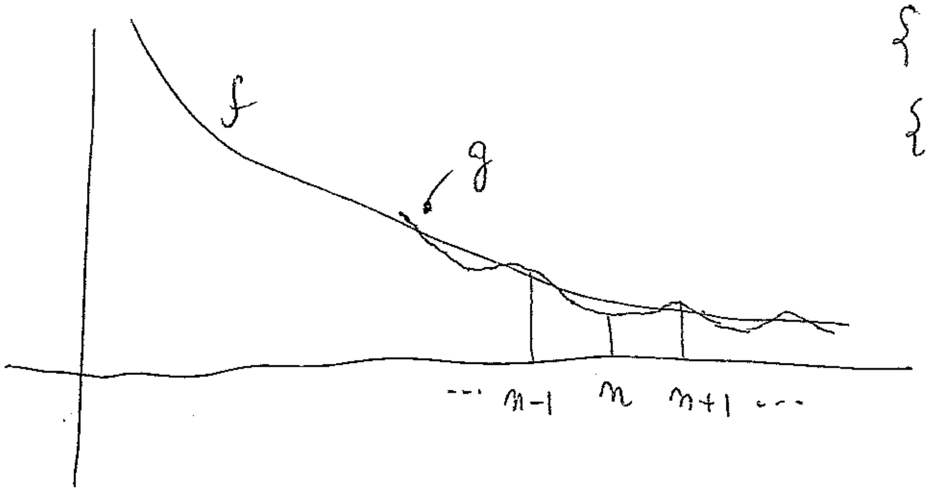
Tale procedimento è utile, per esempio, nella trattazione degli integrali impropri dipendenti da un parametro

Problema. Consideriamo

$\sum a_n$, $\sum b_n$ con $a_n \sim b_n$
≥ 0 ≥ 0

e $b_n \searrow 0$. Si può concludere che (definitivamente) $a_n \searrow 0$?

Risposta: in generale no:



$\{b_n\} \to f$
$\{a_n\} \to g$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Esercizi sulle serie e sugli integrali impropri

1° metodo $\quad n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ Stirling

$$\Rightarrow \quad \frac{n!}{n^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}$$

ora, se $S_0 > 1$, è certamente

$$\frac{\sqrt{2\pi n}}{e^n} \Big/ \frac{1}{n^{S_0}} = \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^{S_0}}{e^n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ la serie converge $\quad$ ($\sum \frac{1}{n^{S_0}}$ converge...)

2° metodo $\quad$ criterio del rapporto

$$\frac{(n+1)!\ n^n}{n!\ (n+1)^{n+1}} = (n+1)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1} =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n =$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)} \to \frac{1}{e} < 1 \quad \text{converge}$$

Sappiamo allora che $\exists \lim a_n^{\frac{1}{n}}$ ed è $= \frac{1}{e}$

Calcoliamolo però direttamente (3° metodo)

$$\frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} \sim (\text{Stirling}) \quad \frac{n\, e^{-1} (2\pi n)^{\frac{1}{n}}}{n}$$

$$= e^{-1} (2\pi n)^{\frac{1}{n}} \to \frac{1}{e}$$

(Se non si utilizzasse la formula di Stirling risulterebbe più difficile ...)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a^n}{n^2+a^n} \qquad a>0$$

Esaminiamo

$$\frac{a^n}{n^2+a^n} = \frac{1}{\frac{n^2}{a^n}+1}$$

- $a=1$ $\quad \frac{1}{n^2+1} \Rightarrow$ conv assoluta ($\Rightarrow$ semplice)
- $a>1$ $\quad \lim(\ \ ) = 1$ non c'è conv.
- $0<a<1$

$$\frac{a^n}{n^2+a^n} < \frac{1}{n^2}$$

conv assoluta $\Rightarrow$ semplice

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n^2+a^n} \qquad a > 0$$

$a=0$: $\sum (-1)^n \frac{2}{n^2}$ conv. ass $\Rightarrow$ conv. sempl.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ non conv. ass, ma converge per Leibniz

$0 < a \gtreqless 1$

$\boxed{a=1}$ Non è ass. convergente (crit. confronto)

È convergente (Leibniz):

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+1} \quad \text{è def. monotona (decr.)}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

$$f'(x) = \frac{x^2+1-2x(x+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}$$

$\boxed{a>1}$ È ass. convergente e dunque convergente:

per n suff. grande è $a^n > n^3$

$$\Rightarrow \frac{n+2}{n^2+a^n} < \frac{n+2}{n^2+n^3} = \frac{n+2}{n^2(n+1)} \quad \dots$$

$\boxed{a<1}$ Non è ass. convergente ($\sim a \sum \frac{1}{n}$)

Ma è convergente (Leibniz)

$$f(x) = \frac{x+2}{x^2+e^{\log a \, x}}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+a^x)-(x+2)(2x+\log a \, a^x)}{(\quad)^2} = \frac{-x^2-4x+a^x-x\cdot\log a\cdot a^x-2\log a \, a^x}{(\quad)^2}$$

f è definitivamente decrescente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + e}{n^\alpha}}_{a_n}$$

Studiamo la convergenza al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e - e^{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

$$= e^1 - e^{n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)} = e^{\xi}\left(1 - n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$\sim e \cdot \left(1 - \frac{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\right)$$

$\frac{1}{n} \to 0$

ora $$1 - \frac{\log(1+x)}{x} = \frac{x - \left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)}{x}$$

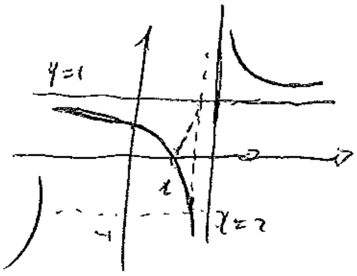
$$= \frac{x}{2} + o(x) \qquad (x \to 0)$$

$$\Rightarrow \quad e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{e}{2}\frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \quad a_n \sim \frac{e}{2}\frac{1}{n^{\alpha+1}}$$ $\Rightarrow$ deve essere $\alpha + 1 > 1$ $\Rightarrow \alpha > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)^n$$

poniamo $y = \frac{x-1}{x-2}$



$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{n+1}{n^2+1}}_{a_n} y^n$$

(serie di potenze in y)

criterio del rapporto:
(eq.. della radice..)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n+1} \cdot y\right|$$

$\to |y| \quad \Rightarrow \quad |y| < 1$ convergenza assoluta

$\Rightarrow \quad x < \frac{3}{2}$

se $|y| > 1$ diverge (sempl e ass) [il termine gen non tende a zero]

se $y = +1$ (ma in tal caso $\nexists\, x \ldots$) !!

diverge ($\sim$ serie armonica)

se $y = -1$

$-1 = \frac{x-1}{x-2}$ $\qquad 2-x = x-1$

$3 = 2x \qquad x = \frac{3}{2}$

ho una serie di Leibniz, e pertanto converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$$

(1°) direttamente

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x}\, dx = \int_2^{\infty} \frac{d \log x}{\log x} = \log(\log x)\Big|_2^{+\infty} = +\infty$$

2° metodo criterio dell'integrale

Si considera

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \log x}\, dx \qquad \text{da} \quad x = e^t \quad dx = e^t dt \quad \log x = t$$

è

$$\int_{\log 2}^{+\infty} \frac{e^t\, dt}{e^t\, t} = \int_{\log 2}^{+\infty} \frac{1}{t}\, dt = +\infty$$

$\Rightarrow$ la serie diverge

3° metodo criterio di condensazione di Cauchy

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^k \log 2^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\log 2 \cdot k} = \frac{1}{\log 2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}$$

$\Rightarrow$ diverge

4° metodo diretto, variante di 3°

Si osservi che

$$\sum_{k=2^{n-1}+1}^{2^n} \frac{1}{k \log k} > 2^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n \log 2^n} = \frac{1}{2 \log 2} \cdot \frac{1}{n},$$

da cui l'asserto.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{1+n} \frac{1}{n}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots$$

la serie è <u>convergente</u> $\overset{(+)}{,}$ ma <u>non</u> è <u>assolutamente convergente</u>. ☆ (+) (Leibniz)

[Di fatto la sua somma uguaglia $\log 2$

Infatti da $1 + x + x^2 + x^n = \frac{x^n - 1}{x - 1}$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{x^n}{1-x}$$

si ha, se ponendo $-x$ al posto di x:

$$1 - x + x^2 + \dots (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (\quad) = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx}_{\log 2} + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^n}{1+x} dx$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \dots$$

ma $\left| \int_0^1 \frac{(-1)^n x^n}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}$

che $\to 0$ se $n \to \infty$]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^{2^n} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\left(\frac{1}{n}|x|^{2^n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} |x|^{\frac{2^n}{n}} \nearrow \begin{array}{ll} +\infty & |x|>1 \\ 0 & |x|<1 \\ 1 & |x|=1 \end{array}$$

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}} \Downarrow e^{\frac{1}{n}\log n} \downarrow 1$$

se $|x|=1$ la serie è divergente

$|x|>1$ " "

$|x|<1$ " convergente

Studiare la convergenza di

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \frac{1}{\sqrt{1+x}} \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

$\Rightarrow$ per asintoticità .. è convergente

(esamino il comportamento per $x \to 1^-$)

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\operatorname{ch}x} - \sqrt{\cos x}}{\operatorname{sh}x - \sin x}\, dx$$

$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$

Cosa accade per $x \to 0^+$?

$$\frac{\sqrt{\operatorname{ch}x} - \sqrt{\cos x}}{\operatorname{sh}x - \sin x} = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{\xi}}}_{\downarrow \frac{1}{2}} \frac{(\operatorname{ch}x - \cos x)}{\operatorname{sh}x - \sin x}$$

(oppure razionalizzando)

$\cos x \quad \xi \quad \operatorname{ch}x$

Si ha: $\operatorname{ch}x \sim \cos x$

e $\xi \sim \cos x$

$\xi \sim \operatorname{ch}x$

$$\Rightarrow \sim \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{\frac{x^3}{3}} \sim \frac{3}{2}\frac{1}{x}$$

$\Rightarrow$ l'integrale diverge

Variante:

$$\int_0^1 \frac{\log(\operatorname{ch}x) - \log(\cos x)}{\operatorname{sh}x - \sin x}\, dx \qquad = \log\frac{\operatorname{ch}x}{\cos x}$$

diverge (per ex con Lagrange..)

$$\log(\operatorname{ch}x) - \log(\cos x) = \frac{1}{\xi}(\operatorname{ch}x - \cos x) \qquad \xi \to 1 \ \&\ x \to 0^+,$$

e si conclude come prima

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}\,\sqrt{1-x^4}}\,dx$$

Se $x \to 1^-$ è come prima...

Se $x \to 0^+$, l'integrando è

$$\sim \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}} \Rightarrow \ldots \quad \underline{\text{converge}}$$

$$\int_0^1 \frac{\operatorname{ch} x - \cos x}{(\operatorname{sh} x)^\alpha - (\sin x)^\alpha}\,dx \qquad \alpha > 0$$

Esaminiamo il comportamento dell'integrando f per $x \to 0^+$

$$(\operatorname{sh} x)^\alpha - (\sin x)^\alpha =$$

$$= \alpha \cdot \xi^{\alpha-1} \cdot (\operatorname{sh} x - \sin x)$$

$\sin x \quad \xi \quad \operatorname{sh} x$

e $\xi \sim \sin x$

$\xi \sim \operatorname{sh} x$

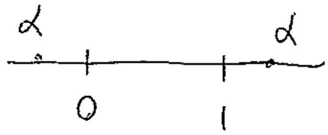
$$\sim \alpha \cdot x^{\alpha-1} \cdot \frac{x^3}{3} \qquad \operatorname{ch} x - \cos x \sim x^2$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \sim 3\,\frac{1}{\alpha}\,x^2\,x^{1-\alpha}\,x^{-3} = \frac{3}{\alpha}\,x^{-\alpha} = \frac{3}{\alpha\,x^\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad 0 < \alpha < 1$$ <u>per la convergenza</u>

✱ Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza di

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{|x^3-\alpha^3|^\alpha}$$



se $\alpha < 0$ o $\alpha > 1$

$\forall$ l'integrale è certamente finito

e così pure se $\alpha = 0$

Sia ora $0 < \alpha \leq 1$

Scriviamo

$$x^3-\alpha^3 = (x-\alpha)\,\underbrace{(x^2+\alpha x+\alpha^2)}_{\Delta<0}$$

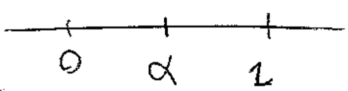
⚠ basta esaminare (asintoticità..)

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{|x-\alpha|^\alpha}$$

se $\alpha = 1$ $\quad \int_0^1 \frac{x^2}{|x-1|}\,dx$ è divergente:

$$\frac{x^2}{|x-1|} \sim \frac{1}{|x-1|} \quad \text{se } x \to 1^-$$

se $\alpha \in (0,1)$



l'integrale risulta convergente ...

Studiare la convergenza di

$$\boxed{\int_0^1 x^\alpha \, \mathrm{sh}\, x \, dx} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

$\mathrm{sh}\, x \sim x$ per $x \to 0$

$x^\alpha \, \mathrm{sh}\, x \sim x^{\alpha+1}$

$\Rightarrow \alpha+1 > -1$

cioè $\alpha > -2$ (convergente)

Calcolare, per $\alpha > 0$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} n^\alpha \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k^2}}$$

Sol. È equivalente calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} x^\alpha \int_x^\infty \frac{1}{t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \frac{1}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^{\alpha-1} = \begin{cases} +\infty & \alpha > 1 \\ 1 & \alpha = 1 \\ 0 & \alpha < 1 \end{cases}$$

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \left.\frac{e^{-pt}}{-p}\right|_0^\infty = \frac{1}{p}$$ $p>0$

Sugli integrali dipendenti da un parametro

Sono casi particolari della trasformata di Laplace

Calcoliamo $I = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot t \cdot dt$

Si può calcolare p.p. ma operiamo così (la procedura non è completamente giustificata ma corretta)

Deriviamo $F = F(p)$: formalmente si ha

$$\frac{dF}{dp} = \int_0^\infty -t\, e^{-pt}\,dt = -I$$

ma, d'altro canto, poichè $F(p) = \frac{1}{p}$, è

$$\frac{dF}{dp} = -\frac{1}{p^2} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{1}{p^2}.$$

Es: calcolare $\int_0^\infty t^k e^{-pt}\,dt \ldots$

★ lemma $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$ integrale di Gauss

Dim: posto $I = \int$, è $\displaystyle I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

⚠ … corso di Analisi II

$$= \ldots = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\rho \cdot d\rho \qquad \text{(Coord. polari)}$$

$$= \pi \int_0^{\infty} e^{-\rho^2}\,d\rho^2 = \pi \left. -e^{-\rho^2}\right|_0^{\infty} = \pi$$

$$\Rightarrow I = \sqrt{\pi} \qquad \square$$

Sia $\displaystyle I(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2}\,dx$ $(\alpha > 0)$. Si trova

$$I(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\sqrt{\alpha}x)^2}\,d(\sqrt{\alpha}x) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \pi^{\frac{1}{2}} \cdot \alpha^{-\frac{1}{2}}$$

★★★ È immediato constatare che $\displaystyle I_k(\alpha) := \int_{-\infty}^{+\infty} x^k e^{-\alpha x^2}\,dx$

$= 0$ se k è dispari.

importantissimi nel calcolo delle probabilità (momenti della misura di Gauss…)

★★ calcoliamo $\displaystyle I_2(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\,dx$

osserviamo che $\left(' = \frac{d}{d\alpha}\right)$ $\displaystyle I'(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-x^2)\, e^{-\alpha x^2}\,dx$ ⚠

$$= -\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\alpha x^2}\,dx = -I_2(\alpha) \quad . \quad \text{ma } I'(\alpha) = \pi^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{2}\right)\alpha^{-\frac{3}{2}}$$

$$\Rightarrow I_2(\alpha) = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} \cdot \alpha^{-\frac{3}{2}}$$

È facile procedere in generale…