ESERCIZI DI ALGEBRA LINEARE
E
COMPLEMENTI DI GEOMETRIA

Foglio 3*

Esercizio 1. Determinare la decomposizione LU della matrice reale simmetrica

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Esercizio 2. Determinare la decomposizione LU della matrice

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Esercizio 3. Determinare la decomposizione LU o $P^T LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 & 6 \\ 3 & 6 & 0 & 6 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Infine determinare le colonne dominanti edil rango della matrice A.

Esercizio 4. Determinare la decomposizione LU o $P^T LU$ della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & i & -i \\ 1 & 0 & 1-i & i & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & -i \\ 0 & i & 1-i & 2 & 1 \\ i & 0 & -i & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Infine determinare le colonne dominanti edil rango della matrice A.

Esercizio 5. Si consideri la matrice

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Determinare, quando possibile, la decomposizione LU di M o la decomposizione $P^T LU$.

Esempio 6. Sia α un parametro complesso e si consideri la matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & \alpha-2 & 2-\alpha & 1 & 0 \\ 2-\alpha & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & \alpha-2 & 0 & 1 & 0 \\ 2-\alpha & 1 & 0 & 2-\alpha & -1 \end{bmatrix}$$

Se ne trovi una decomposizione LU e, per i valori di α per cui ci non possibile, una decomposizione P^TLU. Per $\alpha = 0$ e $\alpha = 2$, determinare una base dello spazio nullo e una base dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}_\alpha$. Inoltre, pensando la matrice A_α, come alla matrice completa di un sistema lineare, determinare le soluzioni di tale sistema al variare di α.

*Sono a grato a quanti mi indicheranno i molti errori presenti in questi fogli, al fine di fornire uno strumento migliore a quanti lo riterranno utile, e-mail: sansonetto@sci.univr.it

Sol. Se $\alpha \neq \mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{3}$ possiamo considerare la decomposizione LU di A_α (senza effettuare scambi di righe):

$$A_\alpha \longrightarrow U_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 2-\alpha & \alpha-2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & (\alpha-1)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -(\alpha-3)^{-1} \end{bmatrix}$$

in cui $U_\alpha = L_\alpha^{-1} A_\alpha$ e

$$L_\alpha^{-1} = E_{44}((\alpha-3)^{-1})\, E_{43}(-1)\, E_{33}((\alpha-2)^{-1})\, E_{42}((\alpha-2)^2-1)$$
$$E_{22}((\alpha-1)^{-1}(3-\alpha)^{-1})\, E_{41}(\alpha-2)\, E_{31}(1)\, E_{21}(\alpha-2)\, E_{11}(-1)$$

Da cui

$$L_\alpha = E_{11}(1)\, E_{21}(2-\alpha)\, E_{31}(1)\, E_{41}(2-\alpha)\, E_{22}((\alpha-1)(3-\alpha))$$
$$E_{42}(1-(\alpha-2)^2)\, E_{33}(\alpha-2)\, E_{43}(1)\, E_{44}(\alpha-3)$$

Notiamo, inoltre che il rk$A_\alpha = 4$, quindi una base per $Col(A_\alpha)$ è dato dalle prime 4 colonne di U_α.
In questo caso pensando alla matrice A_α come ad una matrice completa associata ad un sistema lineare si ha che tale sistema ammette un'unica soluzione.

Per $\alpha = 1, 2, 3$ invece, si debbono effettuare degli scambi di riga, dobbiamo quindi determinare delle decomposizioni $P^T LU$ di A_α, $\alpha = 1, 2, 3$.

Caso $\alpha = 1$.

Per $\alpha = 1$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Scambiamo la seconda riga con la quarta:

$$A_1 \xrightarrow{E_{42}} P_1 A_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ora applichiamo la decomposizione LU a $P_3 A_3$

$$P_1 A_1 \longrightarrow U_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$A_1 = P_1^T\, L_1 U_1$$

in cui $L_1 = E_{11}(-1)\, E_{21}(1)\, E_{31}{-1}E_{41}(1)\, E_{32}(-1)\, E_{33}(2)\, E_{43}(2)\, E_{44}(-1)$ e $P_1^T = E_{42}^T$.
Notiamo che $rk\, A_3 = 4$, quindi una base per $Col(A_1)$ è data dalla prima e la terza, la quarta e la quinta colonna di U_1.
In questo caso pensando alla matrice A_1 come ad una matrice completa associata ad un sistema lineare, si ha che tale sistema non ammette soluzioni in quanto la colonna dei termini noti è dominante.

Caso $\alpha = 2$.

Per $\alpha = 2$

$$A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Scambiamo la terza con la quarta riga

$$A_2 \xrightarrow{E_{34}} P_2A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ora applichiamo la decomposizione LU a P_2A_2

$$P_2A_2 \longrightarrow U_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$A_2 = P_2^T\, L_2U_2$$

in cui $L_2 = E_{11}(-1)\, E_{41}(-1)\, E_{32}1$ e $P_2^T = E_{34}^T$.
Notiamo che $rk\, A_2 = 3$, quindi una base per $Col(A_2)$ è data dalle prime tre colonne di U_2.
In questo caso pensando alla matrice A_2 come ad una matrice completa associata ad un sistema lineare si ha che tale sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

Caso $\alpha = 3$.

Per $\alpha = 3$

$$A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Scambiamo la seconda riga con la quarta:

$$A_3 \xrightarrow{E_{42}} P_3A_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ora applichiamo la decomposizione LU a P_3A_3

$$P_3A_3 \longrightarrow U_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$A_3 = P_3^T\, L_3U_3$$

in cui $L_3 = E_{11}(-1)\, E_{21}(-1)\, E_{31}{-1}E_{41}(-1)\, E_{32}(1)\, E_{33}(2)$ e $P_3^T = E_{42}^T$.
Notiamo che $rk\, A_3 = 3$, quindi una base per $Col(A_3)$ è data dalla prima, la terza e la quarta colonna di U_3.
In questo caso pensando alla matrice A_3 come ad una matrice completa associata ad un sistema lineare, si ha che tale sistema ammette infinite soluzioni dipendenti da un parametro.

Esercizio 7. Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{C}$ la decomposizione LU o P^TLU della matrice

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} i & 0 & -i & i\alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & \alpha \\ 1 & \alpha^2+4 & 0 & 2\alpha \end{bmatrix}$$

Infine determinare le colonne dominanti ed il rango di A_α.

Esempio 8. Sia α un parametro reale e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & -\alpha & 0 \\ \alpha & 2 & 4-\alpha & \alpha^2-2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \alpha+1 & -\alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

Se ne trovi una decomposizione LU e, per i valori di α per cui ci non possibile, una decomposizione $P^T LU$. Per $\alpha = 0$ e $\alpha = 2$, determinare una base dello spazio nullo e una base dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}_\alpha$.

Sol. Se $\alpha \neq 0$ possiamo considerare la decomposizione LU di $\mathbf{A}_\alpha$ senza effettuare scambi di righe:

$$\mathbf{A}_\alpha \longrightarrow \mathbf{U}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 2-\alpha & \alpha^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1-\alpha & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha \end{bmatrix}$$

in cui $\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{L}_\alpha \, \mathbf{U}_\alpha$ e

$$\mathbf{L}_\alpha = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha = 0$ calcoliamo la $P^T LU$ di $\mathbf{A}_\alpha$. Scambiamo la terza e la quarta riga:

$$\mathbf{B}_0 = E_{34} \, \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A questo punto calcoliamo la decomposizione LU di $\mathbf{B}_0$:

$$\mathbf{B}_0 \longrightarrow \mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi $\mathbf{A}_0 = \mathbf{P}^T \, \mathbf{L}_0 \, \mathbf{U}_0$, in cui $\mathbf{P}^T = E_{34}^T$ e

$$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sia ancora $\alpha = 0$ allora una base dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}_0$ ($Col(\mathbf{A}_0)$) è data da tre colonne linearmente indipendenti di $\mathbf{A}_0$, dal momento che $rank \, \mathbf{A}_0 = 3$:

$$Col(\mathbf{A}_0) =< [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \, [0 \quad 2 \quad -1 \quad 0]^T, \, [0 \quad -2 \quad 1 \quad 1]^T >$$

Una base per lo spazio nullo di $\mathbf{A}_0$ ($N(\mathbf{A}_0)$), si trova, ad esempio, risolvendo il sistema omogeneo $\mathbf{A}_0 \mathbf{v} = 0$, in cui $\mathbf{v}$ è un vettore di $\mathbb{R}^5$, quindi:

$$N(\mathbf{A}_0) =< [1 \quad -2 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T, \; [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T >$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Sia $\alpha = 2$ allora una base dello spazio delle colonne di $\mathbf{A}_2$ è data da quattro colonne linearmente indipendenti di $\mathbf{A}_2$, dal momento che $rank \, \mathbf{A}_2 = 4$:

$$Col(\mathbf{A}_2) =< [-1 \quad 2 \quad 0 \quad 0]^T, \, [0 \quad 2 \quad -1 \quad 0]^T, \, [1 \quad 2 \quad -2 \quad 0]^T, \, [-2 \quad 2 \quad 3 \quad 1]^T >$$

Una base per lo spazio nullo di $\mathbf{A}_2$ è

$$N(\mathbf{A}_2) =< [-4 \quad 6 \quad 0 \quad 2 \quad 1]^T >$$

Esempio 9. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ e si consideri la matrice

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} i & 0 & -2i & i \\ \alpha & \alpha & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & -\alpha & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se ne calcoli una decomposizione LU e, per i valori di α per i quali non possibile, una decomposizione $P^T LU$. Si calcolino anche basi dello spazio delle colonne e dello spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$, per ogni $\alpha \in \mathbb{C}$.

Interpretando la matrice come matrice completa di un sistema lineare, per quali valori di α esso ha soluzione?

Sol. Sia $\alpha \neq 0, 1$, allora

$$\mathbf{A}_\alpha = \mathbf{L}_\alpha \, \mathbf{U}_\alpha$$

in cui

$$\mathbf{L}_\alpha = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha & 0 & 0 \\ 2 & -1 & \frac{\alpha-1}{\alpha} & 0 \\ 0 & -\alpha & -2+2\alpha & \alpha \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{U}_\alpha = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2\alpha-1}{\alpha} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\alpha}{1-\alpha} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha = 0$ scambiamo la seconda con la terza riga e poi procediamo con la riduzione LU, da cui $\mathbf{A}_0 = \mathbf{P^T L}_0 \, \mathbf{U}_0$ in cui

$$\mathbf{P^T} = E_{23}$$

$$\mathbf{L}_0 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{U}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha = 1$ non occorre effettuare scambi di righe: $\mathbf{A}_1 = E_{34}\mathbf{L}_1 \, \mathbf{U}_1$ in cui

$$\mathbf{L}_1 = \begin{bmatrix} i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $\alpha \neq 0, 1$ allora la matrice $\mathbf{A}_\alpha$ ha rango 4, quindi lo spazio nullo di $\mathbf{A}_\alpha$ è costituito dal solo vettore nullo e una base per lo spazio delle colonne è data dalle quattro colonne di $\mathbf{A}_\alpha$.

Se $\alpha = 0$, allora

$$Col(\mathbf{A}_0) =< (i \quad 0 \quad 2 \quad 0)^t, \; (0 \quad 0 \quad -1 \quad 0)^t, \; (-2i \quad -1 \quad -5 \quad -1)^t >$$

$$N(\mathbf{A}_0) =< (-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)^t >$$

Se $\alpha = 1$ allora

$$Col(\mathbf{A}_1) =< (i \quad 0 \quad 2 \quad 0)^t, \; (0 \quad 0 \quad -1 \quad 0)^t, \; (i \quad 0 \quad 2 \quad 0)^t >$$

$$N(\mathbf{A}_{-1}) =< [2 \quad -1 \quad 1 \quad 0]^t >$$

Se interpretiamo la matrice $\mathbf{A}_\alpha$ come matrice completa di un sistema lineare, questo ammette soluzione solamente per $\alpha = 0, 1$, cioè quando la colonna dei termini noti non è dominante.

Esercizio 10. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare una decomposizione LU per

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha & 0 & \alpha & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \alpha \\ 1 & 2 & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix}$$

per i valori di α per cui non è possibile, determinare una $P^T LU$.

Esercizio 11. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinare una decomposizione LU per

$$\mathbf{A}_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1 \\ -1 & 1-2\alpha & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ -\alpha & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

per i valori di α per cui non è possibile, determinare una $P^T LU$.