a.a 2005/06

Corso di Laurea in Informatica/Informatica Multimediale

Esercizi Analisi Matematica 2

Funzioni di due variabili

a cura di Roberto Pagliarini

Vediamo prima di tutto degli esercizi sugli insiemi di livello; data una funzione di due variabili $f(x,y)$ gli insiemi di livello c sono gli insiemi delle coppie tali che $f(x,y)=c$, ossia:
dato $c \in \mathbb{R}$: $\{(x,y) \in D \subset \mathbb{R}^2 : f(x,y) = c\}$.

Esercizio 1

Dire chi sono gli insiemi di livello della funzione di due variabili

$$f(x,y) = x^2 + y$$

Il grafico della funzione é il seguente:

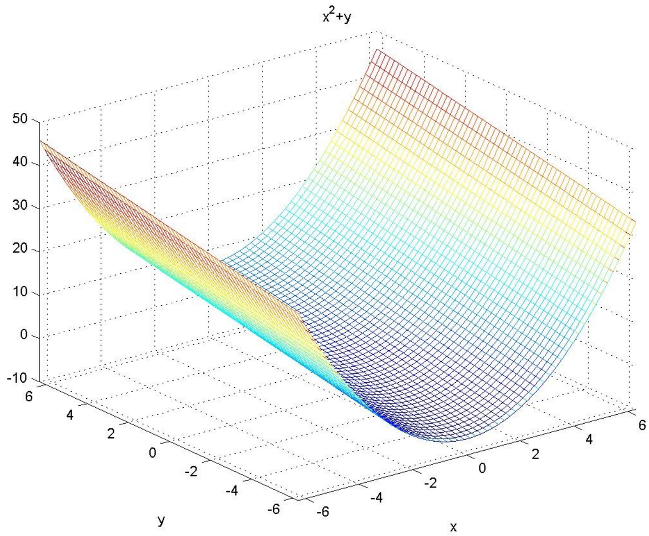

Figura 1: Grafico di $x^2 + y$

Dato $c \in \mathbb{R}$ il relativo insieme di livello é descritto dalla seguente equazione:

$$x^2 + y = c \Leftrightarrow y = -x^2 + c$$

che descrive una parabola con asse di simmetria y e vertice il punto $(0,c)$.
Gli insiemi di livello per $c = 0,1,2,3,4,5$ sono riportati nella seguente figura:

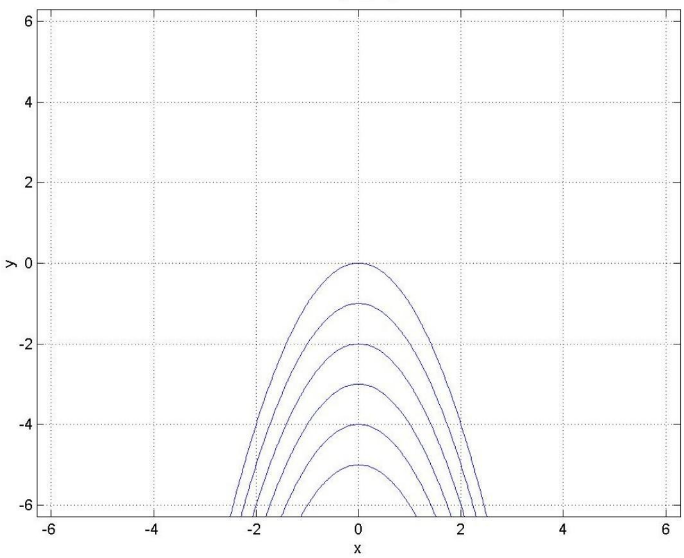

Figura 2: Curve di livello di $x^2 + y$

Esercizio 2

Dire chi sono gli insiemi di livello della seguente funzione:

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$$

Il grafico della funzione é riportato in figura 3 :

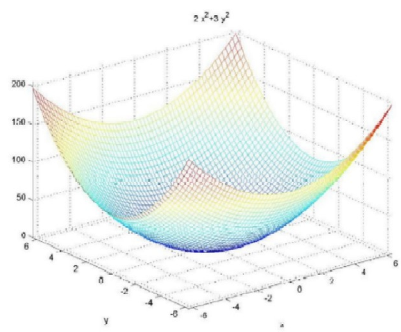

Figura 3: Grafico di $2x^2 + 3y^2$

Dato $c \in \mathbb{R}$ il relativo insieme di livello é descritto dalla seguente equazione:

$$2x^2 + 3y^2 = c$$

che per $c < 0$ rappresenta l'insieme vuoto, per $c = 0$ rappresenta il punto $(0, 0)$ mentre per $c > 0$ é l'equazione di un'ellise. Infatti:

$$2x^2 + 3y^2 = c \Leftrightarrow \frac{x^2}{\frac{c}{2}} + \frac{y^2}{\frac{c}{3}} = 1$$

che rappresenta un'ellise di centro l'origine e vertice i punti

$$\left(0, \sqrt{\frac{c}{3}}\right) \quad \left(0, -\sqrt{\frac{c}{3}}\right) \quad \left(\sqrt{\frac{c}{2}}, 0\right) \quad \left(-\sqrt{\frac{c}{2}}, 0\right)$$

Gli insiemi di livello per $c = 0, 1, 2, 3, 4$ sono riportati nella seguente figura:

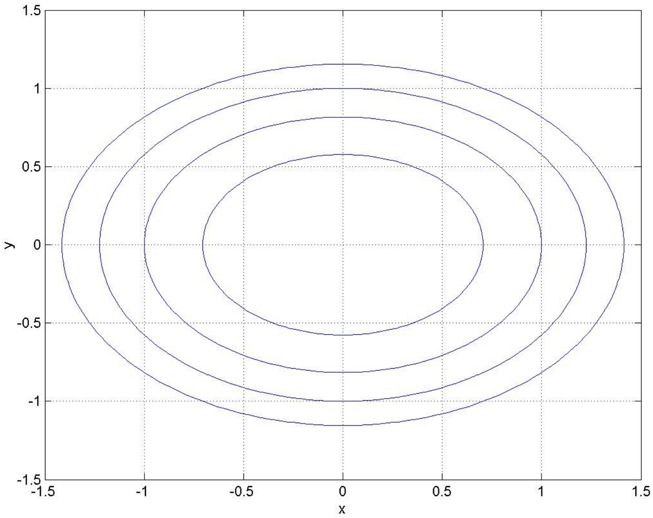

Figura 4: Curve di livello di $2x^2 + 3y^2$

Esercizio 3

Dire chi sono gli insiemi di livello della seguente funzione:

$$f(x, y) = xy$$

Il grafico della funzione é riportato in figura 5.

Dato $c \in \mathbb{R}$ il relativo insieme di livello é descritto dalla seguente equazione:

$$xy = c$$

che descrive un'iperbole equilatera con asintoti gli assi x e y.
Gli insiemi di livello per $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ sono riportati nella figura 6:

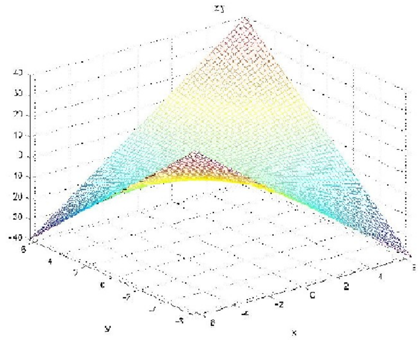

Figura 5: Grafico di xy

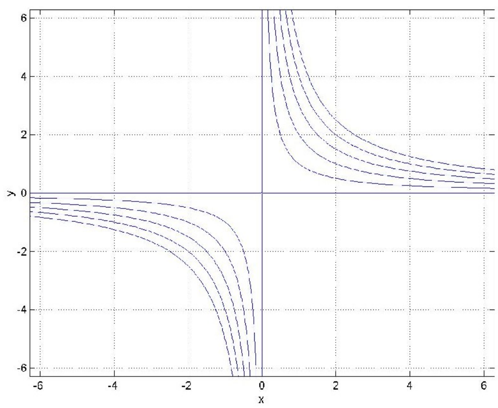

Figura 6: Curve di livello di xy

Vediamo ora alcuni esercizi riguardanti lo studio dei massimi e minimi relativi di funzioni di due variabili.

Esercizio 4

Vogliamo studiare massimi e minimi relativi della seguente funzione:

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$$

Il grafico della funzione é riportato in figura 7.

I massimi e minimi di funzioni di due variabili vanno ricercati dove il piano tangente é orizzontale al grafico della funzione stessa; questo significa che nei punti di massimo e minimo la normale ha solo componente z, dunque si deve annullare il gradiente della funzione. Dunque dobbiamo risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

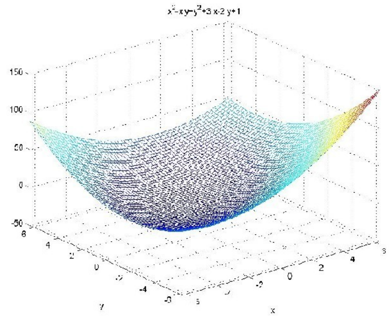

Figura 7: Grafico di $x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

Derivando la funzione rispetto a x otteniamo:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 3$$

mentre derivandola rispetto a y si ottiene:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x + 2y - 2$$

Risolvendo ora il seguente sistema

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ \\ -x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

si trova che le derivate parziali si annullano nel punto

$$(x_0, y_0) = \Big(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3} \Big)$$

che potrebbe quindi essere un punto di massimo o minimo relativo.
Dobbiamo ora studiare la natura del punto critico trovato mediante la matrice Hessiana.
Calcoliamo quindi le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -1$$

da cui risulta che

$$\mathbb{H}_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Quindi

$$det(\mathbb{H}_f(x_0,y_0)) = 4 - 1 = 3 > 0$$

In questo caso il $det(\mathbb{H}_f(x_0,y_0))$ non mi fornisce nessuna informazione di utilitá, perché il suo valore positivo mi indica che i due autovalori associati alla matrice Hessiana hanno entrambi lo stesso segno, ossia o entrambi positivi o entambi negativi. Dobbiamo allora calcolare la traccia di $\mathbb{H}_f(x_0,y_0)$. Abbiamo che

$$tr(\mathbb{H}_f(x_0,y_0)) = 2 + 2 = 4 > 0$$

quindi il punto critico $(x_0,y_0) = (-\frac{4}{3},\frac{1}{3})$ é un punto di minimo relativo.
Si fa notare che nel caso di matrici $2x2$ invece di calcolare la traccia si puó ottenere lo stesso risultanto guardando il segno dell'elemento a_{11} della matrice Hessiana calcolata nel punto critico.

Esercizio 5

Vogliamo studiare massimi e minimi relativi della seguente funzione:

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Il grafico della funzione é riportato di seguito.

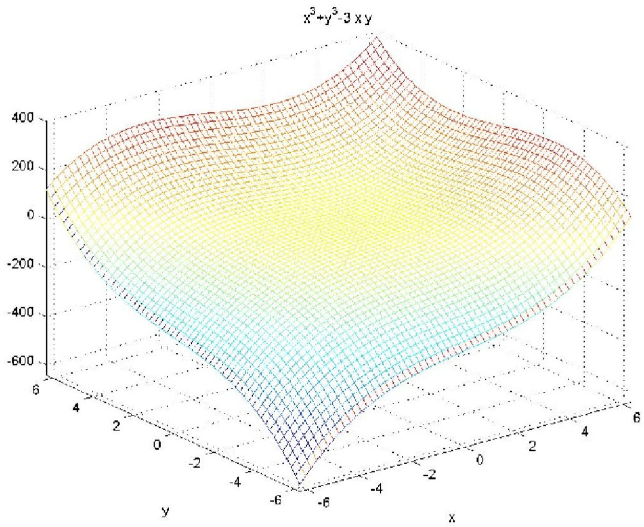

Figura 8: Grafico di $x^3 + y^3 - 3xy$

Calcoliamo le derivate parziali prime:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

Risolviamo ora il seguente sistema per trovare i punti critici, in quanto come abbiamo precedentemete ricordato i massimi e minimi relativi dobbiamo ricercarli dove si annullano le derivate parziali prime.

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0 \\ \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases}$$

Troviamo che i punti critici sono:

$$(x_1, y_1) = (0, 0) \qquad (x_2, y_2) = (1, 1)$$

Cerchiamo ora di studiare la natura dei punti critici; per questo facciamo uso della matrice Hessiana. Calcoliamo quindi le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -3$$

quindi la matrice Hessiana sará:

$$\mathbb{H}_f(x, y) = \begin{bmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$$

Calcoliamo l'Hessiano della funzione nel punto (x_1, y_1)

$$\mathbb{H}_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 6 * 0 & -3 \\ -3 & 6 * 0 \end{bmatrix}$$

e troviamo che

$$det(\mathbb{H}_f(x_1, y_1)) < 0$$

e quindi il punto $(0, 0)$ é un punto di sella.
Calcoliamo ora l'Hessiano della funzione nel punto (x_2, y_2)

$$\mathbb{H}_f(0, 0) = \begin{bmatrix} 6 * 1 & -3 \\ -3 & 6 * 1 \end{bmatrix}$$

e troviamo che

$$det(\mathbb{H}_f(x_2, y_2)) > 0$$

che non ci fornisce nessuna informazione di utilitá, perché il suo valore positivo mi indica che i due autovalori associati alla matrice Hessiana hanno entrambi lo stesso segno, ossia o entrambi positivi o entambi negativi. Dobbiamo allora calcolare la traccia di $\mathbb{H}_f(x_2, y_2)$.
Abbiamo che

$$tr(\mathbb{H}_f(x_2, y_2)) > 0$$

quindi il punto critico (x_2, y_2) é un punto di minimo relativo.

Esercizio 6

Studiare massimi e minimi relativi della seguente funzione:

$$f(x, y) = e^{x^2-y^2-x}$$

Il grafico della funzione é riportato di seguito.

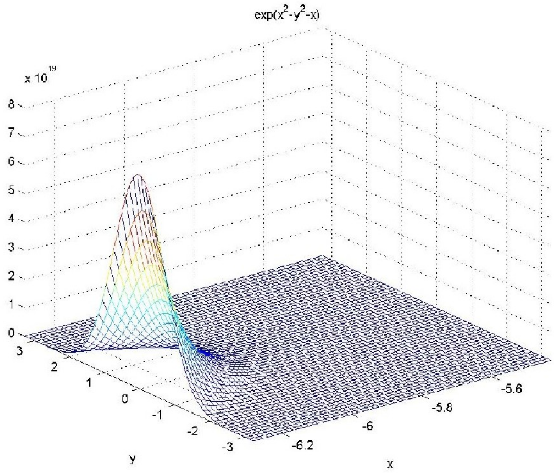

Figura 9: Grafico di $e^{x^2-y^2-x}$

Calcoliamo le derivate parziali prime:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (2x-1)e^{x^2-y^2-x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -2ye^{x^2-y^2-x}$$

Risolviamo ora il seguente sistema per trovare i punti critici

$$\begin{cases} (2x-1)e^{x^2-y^2-x} = 0 \\ \\ -2ye^{x^2-y^2-x} = 0 \end{cases}$$

Siccome $e^{x^2-y^2-x} \neq 0 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$ possiamo toglierlo e quindi ci rimarrá da risolvere il seguente sistema

$$\begin{cases} (2x-1) = 0 \\ \\ -2y = 0 \end{cases}$$

mediante il quale ci risulterá che le derivate prime si annullano nell'unico punto $(x_1, y_1) = (\frac{1}{2}, 0)$.
Studiamo ora la natura di questo punto critico; calcoliamo quindi le derivate parziali seconde che avranno i seguenti valori:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2xe^{x^2-y^2-x} + (2x-1)^2 e^{x^2-y^2-x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2e^{x^2-y^2-x} + (-2y)^2 e^{x^2-y^2-x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (2x-1)(-2y)e^{x^2-y^2-x}$$

La matrice Hessiana sará:

$$\mathbb{H}_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2xe^{x^2-y^2-x} + (2x-1)^2 e^{x^2-y^2-x} & (2x-1)(-2y)e^{x^2-y^2-x} \\ (2x-1)(-2y)e^{x^2-y^2-x} & -2e^{x^2-y^2-x} + (-2y)^2 e^{x^2-y^2-x} \end{bmatrix}$$

Calcoliamo ora l'Hessiano della funzione nel punto (x_1, y_1)

$$\mathbb{H}_f\Big(\frac{1}{2}, 0\Big) = \begin{bmatrix} e^{-\frac{1}{4}} & 0 \\ 0 & -2e^{-\frac{1}{4}} \end{bmatrix}$$

e troviamo che

$$det(\mathbb{H}_f(x_1, y_1)) < 0$$

quindi il punto critico trovato é un punto di sella.

Vediamo ora alcuni esercizi riguardanti lo studio dei massimi e minimi vincolati di funzioni di due variabili.

Esercizio 7

Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 1$$

si determinino, se esistono, il massimo ed il minimo della funzione sull'insieme

$$S = \Big\{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 1\Big\}$$

Il grafico della funzione é riportato in figura 10.

Poiché questa funzione é continua e l'insieme S é chiuso e limitato (S definisce una circonferenza di raggio 1 e centro $(0,0)$), per il teorema di Weirstrass essa ammette massimo e minimo. Per determinare questi massimi e minimi ricerchiamo i massimi e minimi relativi interni all'insieme S, cioé sui punti che appartengono al cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1, frontiera esclusa, mediante lo studio delle derivate parziali e dell'Hessiano della funzione; e quindi i massimi e minimi sulla frontiera (cioé sui punti che appartengono al cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1), risolvendo un problema di massimi e minimi vincolati.

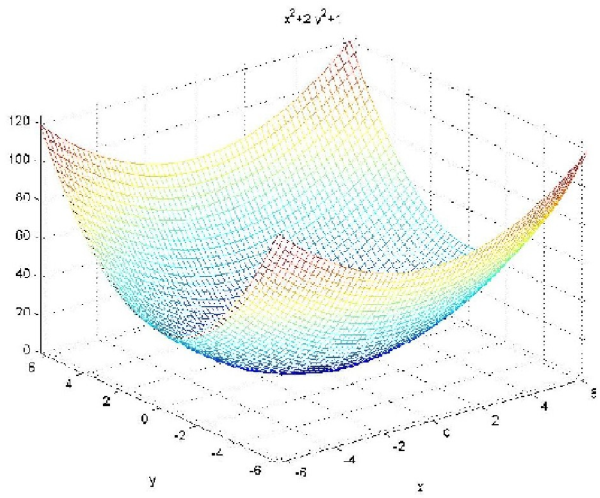

Figura 10: Grafico di $x^2 + 2y^2 + 1$

Iniziamo con lo studio dei massimi e minimi relativi interni all'insieme S. Calcoliamo le derivate parziali prime di $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y$$

e risolviamo il seguente sistema

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ \\ 4y = 0 \end{cases}$$

mediante il quale troviamo che all'interno dell'insieme S la funzione ha un unico punto critico corrispondente a $(x_0, y_0) = (0, 0)$ Studiamo ora la natura del punto critico. Calcoliamo le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0$$

quindi la matrice Hessiana sará:

$$\mathbb{H}_f(x,y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

e l'Hessiano della funzione nel punto (x_0, y_0) avrá determinate strettamente positivo; tuttavia anche la traccia del suddetto Hessiano avra valore strettamente positivo, quindi possiamo affermare che il punto $(0,0)$ é un punto di minimo relativo. Inoltre si ha che $f(0,0) = 1$.
Cerchiamo ora i massimi e minimi relativi della funzione sulla frontiera di S, risolvendo quindi un problema problema di massimi e minimi di $f(x,y)$ con il vincolo $x^2 + y^2 = 1$.
Per trovare i massimi e minimi vincolati procediamo in due modi:

- esplicitando una delle due variabili del vincolo e sostituendola nella funzione; si deve cosí studiare una funzione in una variabili;
- applicando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Applichiamo prima il metodo di sostituzione.
Dal vincolo possiamo ottenere il valore di y^2, ossia:

$$x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 1 - x^2$$

Sostituiamo ora il valore di y^2 nell'espressione di $f(x,y)$ ottenendo una funzione di una variabile, che chiamiamo z:

$$z = x^2 + 2y^2 + 1 \Leftrightarrow z = x^2 + 2(1 - x^2) + 1 = -x^2 + 3$$

Ora dobbiamo studiare i massimi e minimi di $z(x)$ sull'intervallo $[-1, 1]$ in quanto il vincolo limita in questo modo il dominio di questa funzione; infatti:

$$x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

Calcoliamoci la derivata prima di $z(x)$ e vediamo dove questa si annulla;

$$z'(x) = -2x \Rightarrow -2x = 0 \qquad \text{per x=0}$$

Quindi $z(x)$ ammette un punto di massimo relativo per $x = 0$, che sostituito nella espressone del vincolo individua i seguenti punti:

$$(x_1, y_1) = (0, 1) \qquad (x_2, y_2) = (0, -1)$$

Poiché siamo interessati a trovare i massimi ed i minimi della funzione, dobbiamo tenere conto anche degli estremi dell'intervallo $[-1, 1]$ e quindi consideriamo anche i punti

$$(x_3, y_3) = (1, 0) \qquad (x_4, y_4) = (-1, 0)$$

Calcoliamo ora il valore della funzione nei punti (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4):

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = 3 \qquad f(x_3, y_3) = f(x_4, y_4) = 2$$

Confrontando i valori assunti dalla funzione sui punti critici interni all'insieme S e sui punti di massimo e minimo della frontiera possiamo concludere che il minimo della funzione é 1 ed il punto di minimo é $(0, 0)$ mentre il valore massimo della funzione é 3 e ci sono due punti nei quali la funzione assume valore massimo, rispettivamente i punti $(0, 1)$ e $(0, -1)$.

Vediamo ora come risolvere il problema della ricerca dei massimi e minimi vincolati mediante i moltiplicatori di Lagrange. Utilizzando tale metodo, i massimi e minimi di $f(x, y)$ vincolati a $G(x, y)$ si ottengono studiando i massimi e minimi della funzione in 3 variabili

$$\psi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda G(x, y)$$

Il metodo quindi fornisce delle condizioni necessarie per i punti di massimo e minimo in quanto vanno ricercati nell'insieme dei punti che sono soluzione del seguente sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \\ \\ \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = G(x, y) = 0 \end{cases}$$

Nel nostro caso abbiamo:

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 + 1 \qquad G(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

e quindi dovremmo risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ \\ 4y + 2\lambda y = 0 \\ \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

che é equivalente a

$$\begin{cases} x + (1 + \lambda) = 0 \\ \\ y + (2 + \lambda) = 0 \\ \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema sono:

$(x, y, \lambda) = (0, 1, -2) \qquad (x, y, \lambda) = (0, -1, -2) \qquad (x, y, \lambda) = (-1, 0, -1) \qquad (x, y, \lambda) = (1, 0, -1)$

le quali individuano i seguenti quattro punti:

$(x_1, y_1) = (0, 1) \qquad (x_2, y_2) = (0, -1) \qquad (x_3, y_3) = (1, 0) \qquad (x_4, y_4) = (-1, 0)$

Calcolando il valore della funzione nei punti trovati arriviamo alle conclusioni ottenute con il metodo di sostituzione.

Esercizio 8

Vogliamo trovare i punti di massima e di minima ordinata per la curva definita implicitamente dall'equazione

$$G(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$$

Questo si puó scrivere come un problema di massimo e minimo vincolato per la funzione

$$f(x, y) = y$$

con il vincolo

$$G(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2) = 0$$

L'insieme definito dall'equazionr $G(x, y) = 0$ é chiuso e limitato, come possiamo vedere dalla figura (11)

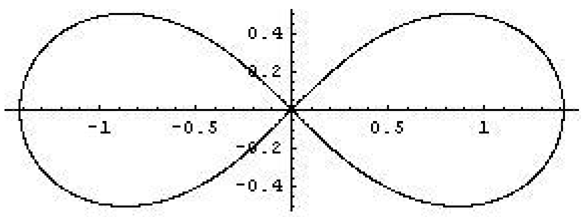

Figura 11: Il vincolo G(x,y)=0

Questo significa che ogni funzione continua definita all'interno dell'insieme definito da questo vincolo ammette massimo e minimo; dunque questo sará vero anche per la funzione $f(x, y)$.
Cerchiamo ora massimi e minimi vincolati mediante il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, i quali sono i punti candidati per la risoluzione del nostro problema. Dobbiamo trovare le soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda(4x(x^2+y^2)-4x)=0 \\ 1+\lambda(4y(x^2+y^2)+4y)=0 \\ (x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0 \end{cases}$$

Partiamo dalla prima equazione ed escludiamo il punto $(0,0)$ in quanto é un punto singolare per $f(x,y)$, ed otteniamo che deve essere $x^2+y^2=1$. Mettendo a sistema questa equazione con la terza equazione si ha il seguente sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x^2+y^2)^2-2(x^2-y^2)=0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 1-2(x^2-y^2)=0 \end{cases}$$

mediante il quale, dopo opportuni passagi, si ottengono i seguenti valori per x e y

$$\begin{cases} x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ y=\pm\frac{1}{2} \end{cases}$$

Abbiamo quindi 4 punti che possono essere risoluzione del nostro problema, rispettivamente:

$$(x_1,y_1)=\Big(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\Big) \qquad (x_2,y_2)=\Big(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\Big)$$

$$(x_3,y_3)=\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\Big) \qquad (x_4,y_4)=\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\Big)$$

Andiamo ora a inserire i valori dei punti precedentemente trovati nella funzione $f(x,y)$ ottenendo i seguenti valori

$$f(x_1,y_1)=f(x_3,y_3)=\frac{1}{2} \qquad f(x_2,y_2)=f(x_4,y_4)=-\frac{1}{2}$$

per cui i punti di massima ordinata per la curva definita dall'equazione $G(x,y)$ sono $\Big(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\Big)$ e $\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\Big)$, mentre i punti a minima ordinata sono $\Big(\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\Big)$ e $\Big(-\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2}\Big)$

Esercizio 9

Vogliamo trovare i punti di massima e di minima ascissa per la curva definita implicitamente dall'equazione

$$G(x,y) = (x^3 - 3xy + y^3)^2 = 0$$

Questo si puó scrivere come un problema di massimo e minimo vincolato per la funzione

$$f(x,y) = x$$

con il vincolo

$$G(x,y) = (x^3 - 3xy + y^3)^2 = 0$$

L'insieme definito dall'equazionr $G(x,y) = 0$ non é limitato, come possiamo vedere dalla figura (12)

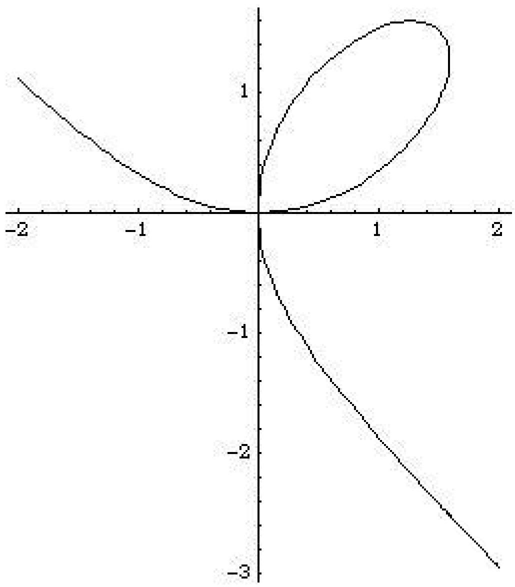

Figura 12: Il vincolo G(x,y)=0

Dunque non esistono massimi e minimi assoluti. Osservando la figura possiamo notare che nel primo quadrante c'é un punto di massimo relativo; lo dereminiamo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Utilizzando il gradiente e guardando dove questo si annulla, troviamo che il punto $(0,0)$ é un punto singolare e quindi non é massimo o minimo relativo per la funzione $f(x,y)$.

La soluzione del nostro problema sará data dalle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 1 + \lambda(3x^2 - 3y) = 0 \\ \\ \lambda(3y^2 - 3x) = 0 \\ \\ (x^3 - 3xy + y^3)^2 = 0 \end{cases}$$

Partiamo dalla seconda equazione ed escludiamo il punto $(0,0)$ in quanto é un punto singolare per $f(x,y)$, ed otteniamo che deve essere $x = y^2$. Mettendo a sistema questa equazione con la terza equazione si ha il seguente sistema

$$\begin{cases} x = y^2 \\ \\ (x^3 - 3xy + y^3)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x = y^2 \\ \\ (y^6 - 2y^3) = 0 \end{cases}$$

mediante il quale, dopo opportuni passagi, si ottengono i seguenti valori per x e y

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{4} \\ \\ y = \sqrt[3]{2} \end{cases}$$

Quindi il punto $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ é un punto di massimo relativo per la funzione $f(x,y)$ sul vincolo ristretto al primo quadrante.

Esercizio 10

Data la funzione

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy + x + y$$

si determinino, se esistono, il massimo ed il minimo della funzione sull'insieme

$$D = \Big\{(x,y) : x \leq 0, y \leq 0, x + y \geq -3\Big\}$$

Il grafico della funzione é riportato in figura 13.

L'insieme D definisce tre semipiani le cui intersezioni definiscono il dominio su cui andare a studiare i massimi e minimi.

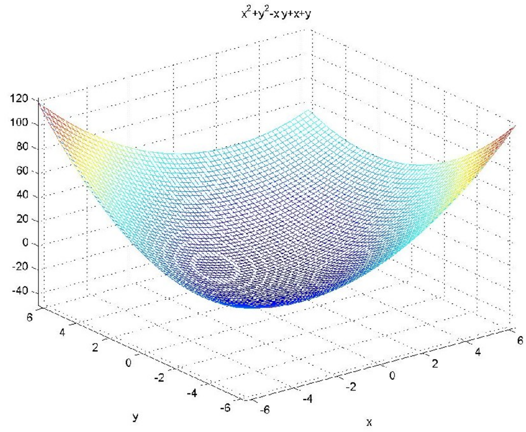

Figura 13: Grafico di $3x^2 + 2y^2 + 4x + 1$

La prima cosa da fare é quella di studiare i punti critici interni al dominio, frontiera esclusa. Calcoliamoci quindi le derivate parziali prime

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y + 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - x + 1$$

Risolviamo ora il seguente sistema per trovare i punti critici

$$\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ \\ 2y - x + 1 = 0 \end{cases}$$

La soluzione del sistema é data dal punto $(x_0, y_0) = (-1, -1)$. Si puó facilmente verificare che $(x_1, y_1) \in D$.
Dobbiamo ora andare a studiare la natura del punto critico mediante l'Hessiano.
Calcoliamoci le derivate parziali seconde:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -1$$

quindi la matrice Hessiana sará:

$$\mathbb{H}_f(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

e l'Hessiano della funzione nel punto (x_0, y_0) avrá determinate strettamente positivo; tuttavia anche la traccia del suddetto Hessiano avra valore strettamente positivo, quindi possiamo affermare che il punto $(-1, -1)$ é un punto

di minimo relativo. Inoltre si ha che $f(-1,-1) = -1$.
Cerchiamo ora i massimi e minimi relativi della funzione sulla frontiera di D, ossia

$$\Big\{(x,y) : x = 0, y = 0, x + y = -3\Big\}$$

La frontiera di D é data da precisi vincoli che definiscono una regione chiusa, i quali possono essere epressi come funzioni di una sola variabile. Studieremo i tre vincoli che definiscono la frontiera in maniera separata.

- Segmento compreso tra i punti $(-3,0)$ e $(0,0)$.

Questo segmento sta sulla retta $y = 0$ e quindi i punti su tale segmento sono del tipo $(x, 0)$ con

$$-3 \leq x \leq 0$$

Dobbiamo quidi cercare massimi e minimi di

$$g(x) = f(x,0) = x^2 + x, \qquad x \in [-3,0]$$

Ci siamo quindi ricondotti allo studio di massimi e minimi di funzioni ad una variabile. Calcoliamo la derivata prima di $g(x)$

$$g'(x) = 2x - 1$$

Si ottiene semplicemente che la $g'(x)$ si annulla nel punto $x = -\frac{1}{2}$.
Calcoliamo ora il valore di $g(x)$ nel punto in cui si annulla $g'(x)$ e negli estrmi del segmento. Otteniamo che:

$$g\Big(-\frac{1}{2}\Big) = -\frac{1}{4} \qquad g(-3) = 6 \qquad g(-3) = 0$$

Allora, essendo $g(x)$ una parabola il punto $x = -\frac{1}{2}$ é un minimo su questa frontiera.

- Segmento compreso tra i punti $(0,0)$ e $(0,-3)$.

Questo segmento sta sulla retta $x = 0$ e quindi i punti su tale segmento sono del tipo $(0, y)$ con

$$-3 \leq y \leq 0$$

Dobbiamo quidi cercare massimi e minimi di

$$h(y) = f(0,y) = y^2 + y, \qquad y \in [-3,0]$$

Calcoliamo la derivata prima di $h(x)$

$$h'(x) = 2x - 1$$

Si ottiene che la $h'(y)$ si annulla nel punto $y = -\frac{1}{2}$.
Calcoliamo ora il valore di $h(y)$ nel punto in cui si annulla $h'(y)$ e negli estrmi del segmento. Otteniamo che:

$$h\Big(-\frac{1}{2}\Big) = -\frac{1}{4} \qquad h(-3) = 6 \qquad h(-3) = 0$$

Anche in questo caso, essendo $h(x)$ una parabola il punto $y = -\frac{1}{2}$ é un minimo su questa frontiera.

- Segmento compreso tra i punti $(0, -3)$ e $(-3, -0)$.

Questo segmento sta sulla retta $x + y = -3$ e i punti su tale segmento sono del tipo $(x, -3 - x)$ con

$$-3 \leq x \leq 0$$

Bisogna notare che in questo caso é indifferente se si parametrizza il vincolo rispetto a x o rispetto a y; nel nostro caso si é scelto di tenere x e parametrizzare y. Dobbiamo quidi cercare massimi e minimi di

$$k(x) = f(x, -3 - x) = 3x^2 + 9x + 6 = x^2 + 3x + 2, \qquad x \in [-3, 0]$$

$k'(x)$ avrá valore zero per $x = -\frac{3}{2}$. Calcoliamo ora il valore di $k(x)$ nel punto in cui si annulla $h'(x)$ e negli estrmi del segmento e otteniamo che anche in questo caso $x = -\frac{3}{2}$ é un minimo per il segmento considerato.
Avendo ora trovato 4 minimi relativi, rispettivamente uno all'interno di D e tre sulla frontiera, andremo a calcolare il minimo assoluto di $f(x, y)$ sull'insieme D. Per fare ció dobbiamo semplicemente calcolare il valore della $f(x, y)$ nei punti trovati. In questo modo otterremo che il punto $(-1, -1)$ é punto di minimo assoluto.

Esercizio 11

Studiare i massimi e minimi relativi della seguente funzione

$$f(x, y) = e^{(x+y)}(x^2 + y)$$

Il grafico della funzione é riportato in figura 14.

Procediamo come precedentemente fatto.
Calcoliamo prima di tutto le derivate parziali prime:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{(x+y)}(x^2 + 2x + y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{(x+y)}(x^2 + 2x + 1)$$

Risolviamo ora il seguente sistema per trovare i punti critici

$$\begin{cases} e^{(x+y)}(x^2+2x+y)=0 \\ \\ e^{(x+y)}(x^2+2x+1)=0 \end{cases}$$

Poiché $e^{(x+y)}$ é sempre diverso da zero possiamo eliminarlo; ci resta quindi da risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x^2+2x+y=0 \\ \\ x^2+2x+1=0 \end{cases}$$

che avrá unica soluzione pari a:

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ \\ y=-\frac{5}{4} \end{cases}$$

e quindi avremo il seguente punto critico:

$$(x_1,y_1)=\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{4}\right)$$

Studiamo ora la natura del punto critico. Le derivate parziali seconde saranno pari a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{(x+y)}(x^2+4x+y+2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{(x+y)}(x^2+y+2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=e^{(x+y)}(x^2+2x+y+1)$$

Si avrá che

$$det\mathbb{H}_f(x_1,y_1)>0$$

quindi si dovrá analizzare il segno della traccia; quindi

$$tr\mathbb{H}_f(x_1,y_1)>0$$

e quindi il punto $(x_1,y_1)=\left(\frac{1}{2},-\frac{5}{4}\right)$ é un punto di minimo relativo.

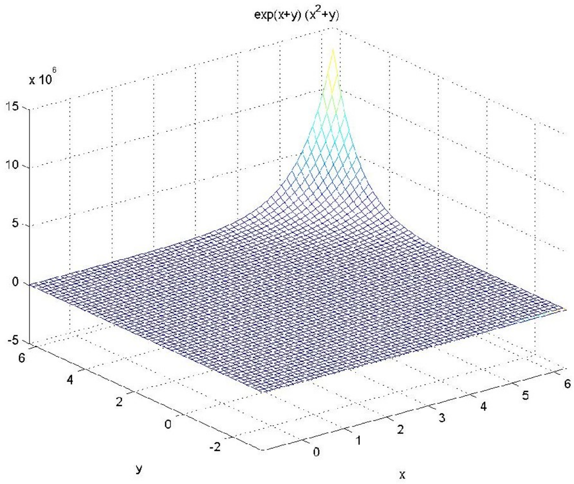

Figura 14: Grafico di $e^{(x+y)}(x^2+y)$

Esercizio 12

Data la funzione

$$f(x,y) = e^{x^2-y^2}$$

si determinino, se esistono, il massimo ed il minimo della funzione sull'insieme

$$D = \left\{x^2+y^2=1\right\}$$

Il grafico della funzione é riportato in figura 15.

I candidati ad essere massimi e minimi vincolati saranno dati dalle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2xe^{x^2-y^2} = \lambda 2x \\ \\ -2ye^{x^2-y^2} = \lambda 2y \\ \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

Risolvendo il sistema si ottengono quattro soluzioni:

$$(x_1,y_1)=(0,1) \qquad (x_2,y_2)=(0,-1) \qquad (x_3,y_3)=(1,0) \qquad (x_4,y_4)=(-1,0)$$

Sostituendo i valori dei punti trovati nella funzione troviamo che sul vincolo questa ha due massini, rispettivamente $(-1,0)$ e $(1,0)$, e due minimi, rispettivamente $(0,1)$ e $(0,-1)$. Possiamo vedere anche questo guardando dove le curve di livello di $f(x,y)$ e il dominio si intersecano e i rispettivi gradienti sono paralleli. Per disegnare le curve di livello della funzione possiamo usare la seguente trasformazione:

$$e^{x^2-y^2} = c \Rightarrow \log c = x^2 - y^2$$

Nella figura 16 possiamo vedere l'intersezione tra il vincolo e gli insiemi di livello della funzione.

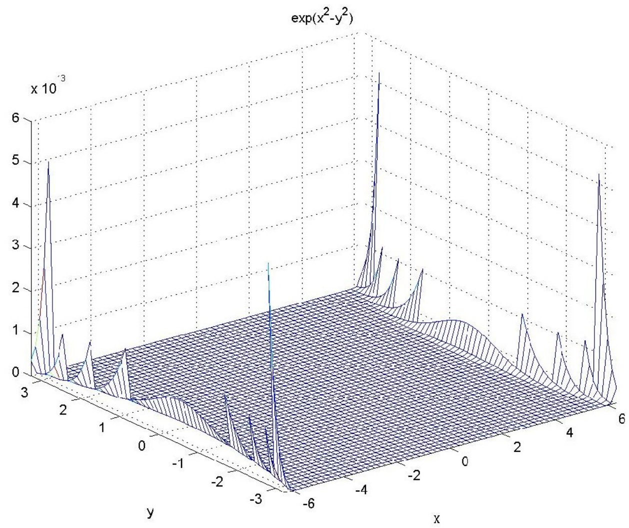

Figura 15: Grafico di $e^{x^2-y^2}$

Esercizio 13

Data la funzione

$$f(x,y) = x + y$$

si determinino, se esistono, il massimo ed il minimo della funzione sull'insieme

$$D = \left\{(x-1)^2 + y^2 = 4\right\}$$

il quale rappresenta una circonferenza di raggio 2 e centro $(1,0)$. Il grafico della funzione é riportato in figura 17.

Come giá visto usiamo i moltiplicatori di Lagrange e risolviamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} 1 = \lambda 2(x-1) \\ \\ 1 = \lambda 2y \\ \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Dividendo la prima equazione per la seconda otteniamo

$$\begin{cases} 1 = \frac{(x-1)}{y} \\ \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

da cui

$$\begin{cases} (x-1) = y \\ \\ (x-1)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

Troviamo quindi le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} x = \pm\sqrt{2} + 1 \\ \\ y = \pm\sqrt{2} \end{cases}$$

Sostituendo i valori delle soluzioni trovate all'interno della funzione troveremo che il massimo vincolato é dato dal punto $(\sqrt{2}+1, \sqrt{2})$ mentre il minimo vincolato é dato dal punto $(-\sqrt{2}+1, -\sqrt{2})$. Nella figura 18 possiamo vedere l'intersezione tra il vincolo e gli insiemi di livello della funzione, per il valore di c compreso tra -4 e 4.

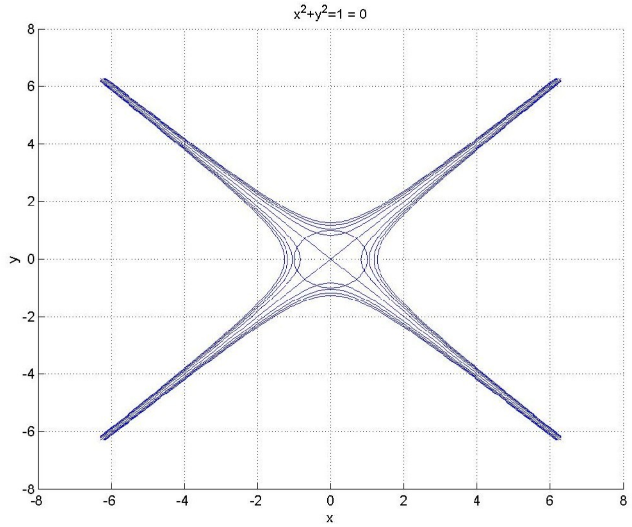

Figura 16: Insiemi di livello di $e^{x^2-y^2}$ e vincolo $x^2+y^2=1$

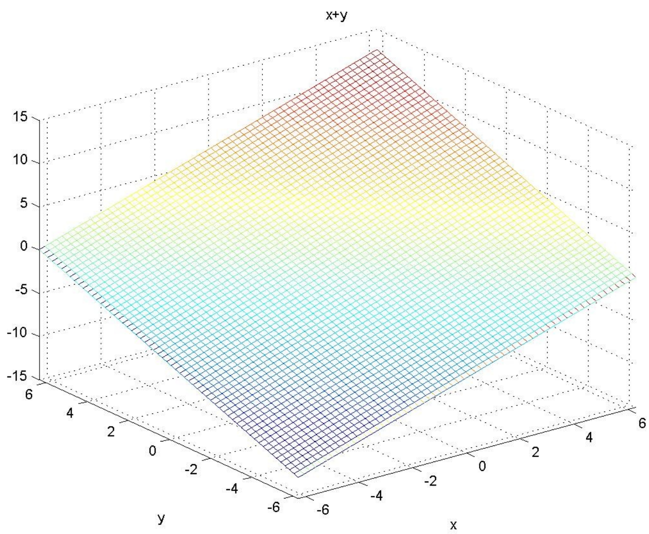

Figura 17: Grafico di $x+y$

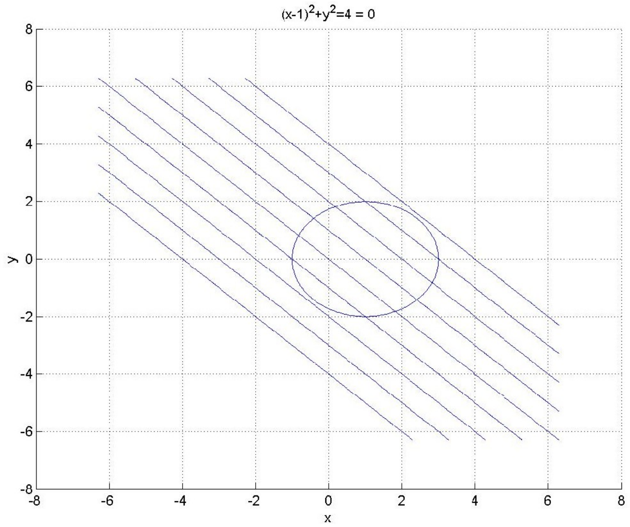

Figura 18: Insiemi di livello di $x + y$ e vincolo $(x - 1)^2 + y^2 = 4$