ANALISI MATEMATICA I (Bioinformatica; a.a. 2007/08)

Proff. M. Spera e M. Squassina

Prova scritta del $\boxed{24/6/2008}$

Prologo

① $-1 = (-1)^{\frac{2}{2}} = \left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} = 1$!

Dov'è l'errore?

② Determinare $\{x^2 \leq 2\} \cap \mathbb{Q} \cap \{x^2 \geq 2\}$

③ Sia $f(x) = x|x|$. Dire se $\exists\, f'(0)$ e calcolarla.

④ Calcolare $\frac{d}{dx}\left(\int_0^x \sin(t^{1000})\, dt\right)$

⑤ Sia $x > 0$. Calcolare $\int_x^{x^2} \frac{1}{t}\, dt$

⑥ Calcolare $\lim_{x \to +\infty} \sin\frac{1}{x}$

— · — · — · — · —

E1 a) Dire se $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3}\right)$ converge

b) Studiare la convergenza di

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\left(\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3}\right)$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

E2 Studiare la funzione $f(x) = x^3 e^{-x}$

(dominio, segno, asintoti, punti critici, flessi...)

e abbozzarne il grafico

(E3) Calcolare $I = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx$

(E4) Risolvere il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

– · – · – · – · –

(T1) a) Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange.

b) Dimostrare che se, su un intervallo, $f' > 0$, allora f è strettamente crescente.

c) E' vero che f strettamente crescente e derivabile in un intervallo $\Rightarrow f' > 0$?

(T2) a) Enunciare e dimostrare il teorema degli zeri (per le funzioni continue).

b) Sia $f : [0,1] \to [0,1]$ continua.
Dimostrare che $\exists\ \xi \in [0,1]$ tale che $f(\xi) = \xi$

Sugg. Se $f(0) = 0$, oppure $f(1) = 1$, abbiamo finito; supponiamo dunque $f(0) \neq 0$, $f(1) \neq 1$.
Si consideri $F(x) := f(x) - x$ e si applichi il teorema degli zeri ...

Prologo

① $$(a^m)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \quad \text{ecc.}$$

valgono in piena generalità solo se $a > 0$

② $$\{x^2 \leq 2\} \cap \{x^2 \geq 2\} = \{x^2 = 2\} = \{-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\}$$

e $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\} \cap \mathbb{Q} = \emptyset$

③ $f(x) = x|x|$

Con la definizione, se $x \neq 0$

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x| \to 0 \quad \text{se } x \to 0$$

$$\Rightarrow \quad f'(0) = 0$$

oppure se $x \geq 0$ $\quad f(x) = x^2$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$

se $x \leq 0$ $\quad f(x) = -x^2$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x^2}{x} = 0$$

$\Rightarrow \quad f'_+(0) = f'_-(0) = 0 \quad \Rightarrow f'(0)$ esiste e

$f'(0) = 0$

④ $$\frac{d}{dx} \int_0^x \sin(t^{1000})\, dt \underset{\text{T.F.C.}}{=} \sin(x^{1000})$$

5) se $x > 0$, $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{t}\, dt = \log(x^2) - \log x$

$= 2\log x - \log x$

$= \log x$

6) $\lim_{x \to +\infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{y \to 0^+} \sin y = 0$

T1) parte b) Siano $x_1 < x_2$ $(x_i \in I)$

Si ha: $f(x_1) - f(x_2) = \underbrace{f'(\xi)}_{>0} \underbrace{(x_1 - x_2)}_{<0} < 0$

da cui l'asserto.

---

se $f(0) \neq 0$, $f(1) \neq 1$ $\qquad F(x) := f(x) - x$

T2) F è continua, e

$F(0) = f(0) > 0 \qquad (f(0) \in (0,1])$

$F(1) = f(1) - 1 < 0 \qquad (f(1) \in [0,1))$

$\Rightarrow \exists\, \xi \in (0,1)$ tale che $F(\xi) = 0$ (t. d. zeri)

ossia $f(\xi) = \xi$.

1

1.1 $$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left[\sin\frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3}\right]}_{a(n)}$$

da $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^6)$ $\quad (5! = 120)$

si ha $a(n) \sim \dfrac{1}{120}\dfrac{1}{n^5}$

$\Rightarrow$ la serie converge.

1.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha a(n)$; $\quad n^\alpha a(n) \sim \dfrac{1}{120}\dfrac{1}{n^{5-\alpha}}$

$\Rightarrow$ per la convergenza deve essere $5-\alpha > 1$

$\Rightarrow$ $\alpha < 4$

$$\boxed{f(x) = x^3 e^{-x}}$$

2

dominio: $\mathbb{R}$

segno: $f(x) \gtrless 0$ per $x \gtrless 0$

asintoti: $\dfrac{f(x)}{x} = x^2 e^{-x} \longrightarrow \begin{cases} 0 & x \to +\infty \\ +\infty & x \to -\infty \end{cases}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \begin{cases} 0 \\ -\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ asintoto orizzontale destro

$$f'(x) = 3x^2 e^{-x} + x^3(-e^{-x})$$
$$= 3x^2 e^{-x} - x^3 e^{-x}$$
$$= x^2(3-x)\, e^{-x}$$

$$\boxed{f' = x^2(3-x)e^{-x}}$$

segno di f'

$\Rightarrow$

	0		3	
——	0	——	0	- - - -

$x = 0$ flesso orizzontale (ascendente)

$x = 3$ massimo relativo (e assoluto)

$$f(3) = 3^3 e^{-3} = \left(\frac{3}{e}\right)^3 > 1$$

$$f''(x) = 2x(3-x)e^{-x} + x^2(-1)e^{-x} + x^2(3-x)(-e^{-x})$$

$$= e^{-x}\left[2x(3-x) - x^2 - x^2(3-x)\right]$$

$$= e^{-x}\left[6x - 2x^2 - x^2 - 3x^2 + x^3\right]$$

$$= e^{-x}\left[x^3 - 6x^2 + 6x\right]$$

$$= e^{-x}\, x\,(x^2 - 6x + 6)$$

$x^2 - 6x + 6 = 0 \qquad x = 3 \pm \sqrt{9-6} = 3 \pm \sqrt{3}$

(entrambe > 0, simmetriche rispetto a $x = 3$)

Segno di f''

		0		$3-\sqrt{3}$		$3+\sqrt{3}$	
x	- - - -	0	———		———		———
x^2-6x+6	———		———	0	- - - -	0	———
	- - - -	0	———	0	- - - -	0	———

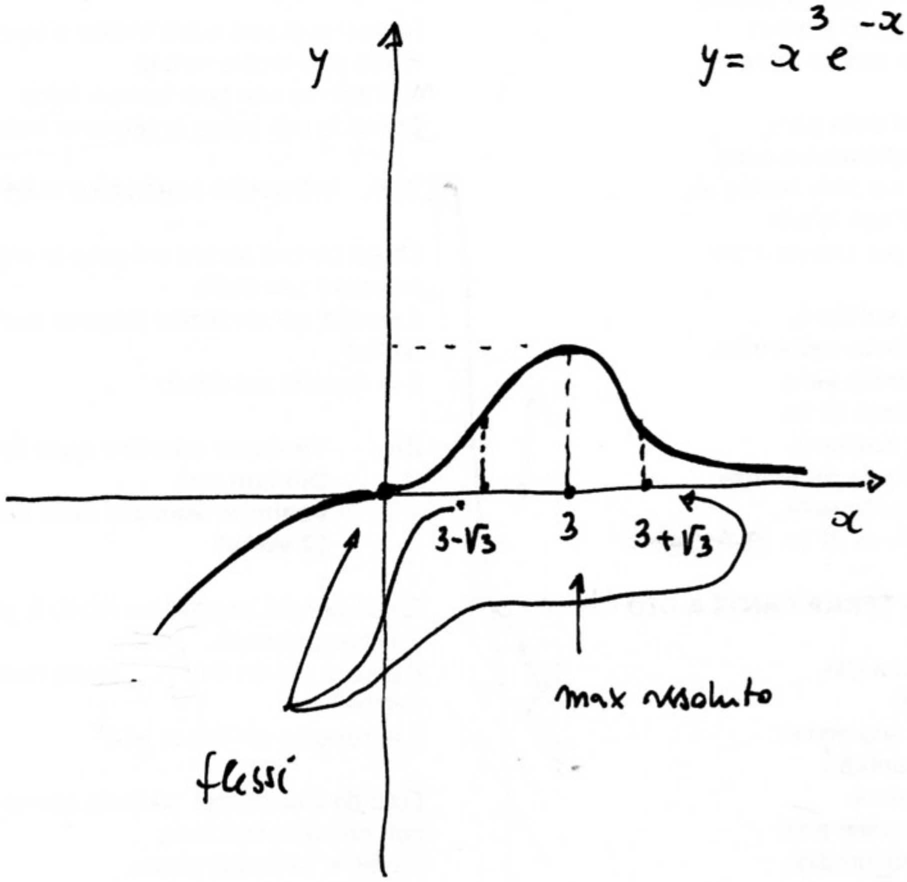
$$\boxed{f'' = e^{-x}\, x\,(x^2 - 6x + 6)}$$

$x = 0$ flesso a ascendente

$x = 3-\sqrt{3}$ flesso discend.

$x = 3+\sqrt{3}$ = ascend.

Abbozzo del grafico



non esiste minimo assoluto

3

$$I = \int_0^1 \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\, dx \qquad \sqrt{x} = t$$

$$x = t^2 \qquad t \in [0,1]$$

$$dx = 2t\, dt$$

$$I = \int_0^1 \frac{1-t}{1+t} \cdot 2t\, dt = 2\int_0^1 \frac{1-t}{1+t}\, t\, dt$$

ora $\displaystyle \frac{1-t}{1+t} \cdot t = \frac{t-t^2}{1+t} = \frac{t-1+\overbrace{1-t^2}^{(1-t)(1+t)}}{1+t} =$

$$= \frac{t-1}{1+t} + 1 - t = \frac{t+1-1-1}{1+t} + 1 - t$$

$$= 1 - \frac{2}{1+t} + 1 - t = 2 - t - \frac{2}{1+t} \quad (\blacklozenge)$$

$$\Rightarrow \quad I = 2\left[\overbrace{2 - \frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} - 2\int_0^1 \frac{1}{1+t}\, dt\right]$$

$$= 2\left[\frac{3}{2} - 2 \log(1+t)\Big|_0^1\right] = 2\left[\frac{3}{2} - 2\left[\log 2 - \overbrace{\log 1}^{0}\right]\right]$$

$$= 2\left[\frac{3}{2} - 2\log 2\right] = 3 - 4\log 2$$

variante:

[calcolo standard]

$$\begin{array}{r|l} -t^2 + t & t+1 \\ \cline{2-2} +t^2 + t & -t+2 \\ \hline = \quad 2t & \text{quoziente} \\ -2t - 2 & \\ \hline = \quad -2 & \\ \text{resto} & \end{array} \quad \Rightarrow \quad \frac{-t^2+t}{1+t} = -t + 2 - \frac{2}{1+t}$$

$$= (\blacklozenge)$$

④

$$\begin{cases} y' = y^2 + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Problema di Cauchy.

l'equazione è a variabili separabili

$$\frac{dy}{y^2+1} = dx$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y^2+1} = \int dx \qquad \arctan y = x + c$$

imponendo la condizione iniziale si ha

$$\arctan 1 = c$$

ossia $\quad c = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \quad y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$ definita in

$$\left(-\frac{3}{4}\pi \; , \; \frac{\pi}{4}\right)$$