◇ Geometria differenziale delle curve nello spazio

Data una curva liscia, regolare, in $\mathbb{R}^3$, parametrizzata dall'ascissa curvilinea s, si definisce curvatura il modulo del vettore $\underline{r}''$ (accelerazione, rispetto a s)

$k = \|\underline{r}''\|$

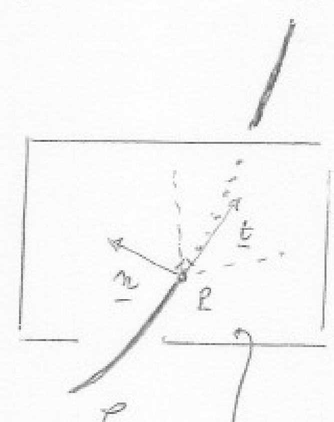
è spesso chiamato vettore di curvatura $\longrightarrow$ $\underline{r}'' = k\,\underline{n}$ $(=\underline{t}')$ $\quad \underline{n}$: normale principale

(chiaramente $\langle \underline{r}'', \underline{r}' \rangle = 0$ poiché $\|\underline{r}'\| = 1$, $\underline{r}' = \underline{t}$)

$k > 0$ (attenzione!)

(se $k = 0$ $\underline{n}$ non è univocamente definito)

(se $k > 0$ si parla di curva biregolare)



piano normale a $\mathcal{C}$ in P (di ascissa curvilinea s)

$$\langle \underline{X} - \underline{P}, \underline{t} \rangle = 0$$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \underline{P} = \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \\ z(s) \end{pmatrix}, \quad \underline{t} = \begin{pmatrix} x'(s) \\ y'(s) \\ z'(s) \end{pmatrix}$$

$$(x - x(s))\,x'(s) + (y - y(s))\,y'(s) + (z - z(s))\,z'(s) = 0$$

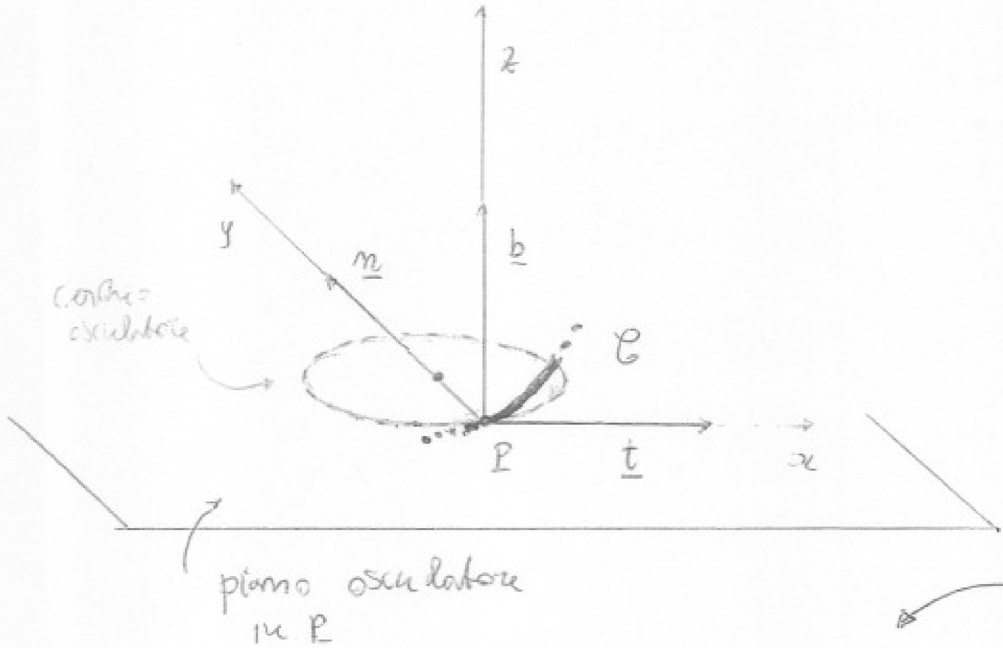
$$\langle \underline{R} - \underline{r}(s), \underline{r}'(s) \rangle = 0$$

il piano passante per P e di giacitura individuata da $\underline{t}$, $\underline{n}$ si chiama piano osculatore (in P). Il cerchio (di tale piano) di centro $C = P + \frac{1}{k}\underline{n}$ (centro di curvatura) e raggio $\rho = \frac{1}{k}$ (passante ovviamente per P) si dice cerchio osculatore a $\mathcal{C}$ in P

$\frac{1}{k} = \rho$ raggio di curvatura

Si ponga ora $\underline{b} := \underline{t} \times \underline{n}$ $\qquad$ $\underline{b}$: versore binormale

$(P, \underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$ si dice triedro principale (o fondamentale o di Frénet) — o apparato di Frénet — in P ed è il sistema di riferimento naturale per studiare la curva in un intorno di un suo punto.

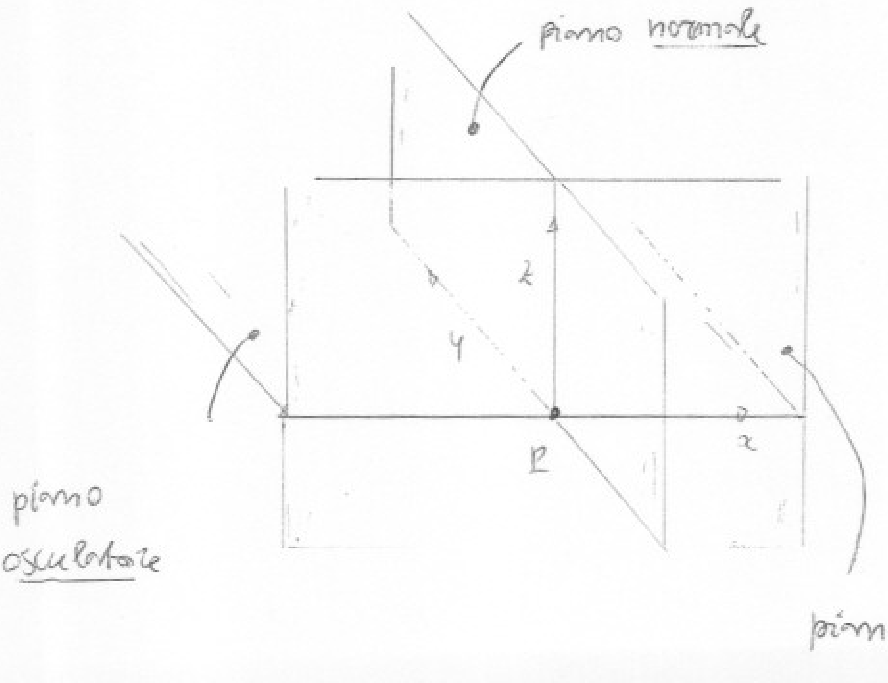


piani principali

piano (P, x, y): piano osculatore

piano (P, y, z) piano normale

piano (P, x, z) piano rettificante



Riprendiamo $\underline{t}' = k\,\underline{n}$

Si ha $\underline{b}' = (\underline{t} \times \underline{n})' = \underbrace{\underset{\underset{k\underline{n}}{\parallel}}{\underline{t}'} \times \underline{n}}_{\underset{0}{\parallel}} + \underline{t} \times \underline{n}'$,

"velocità di variazione" del piano osculatore

ossia

$$\underline{b}' = \underline{t} \times \underline{n}'$$

ma $\langle \underline{b}', \underline{t} \rangle = 0$, e, essendo un versore,

$\langle \underline{b}', \underline{b} \rangle = 0$ $\Rightarrow$

$\underline{b}' := \tau\,\underline{n}$ per qualche $\tau = \tau(s) \in \mathbb{R}$

☆ τ: torsione della curva (in P)

Calcoliamo $\underline{n}'$: $\underline{n}' = (\underline{b} \times \underline{t})' =$

$= \underline{b}' \times \underline{t} + \underline{b} \times \underline{t}' = \tau \underbrace{\underline{n} \times \underline{t}}_{-\underline{b}} + \underline{b} \times k\,\underline{n} =$ $\quad \underline{b} \times \underline{n} = -\underline{t}$

$= -\tau\,\underline{b} - k\,\underline{t}$

$= -k\,\underline{t} - \tau\,\underline{b}$. Si hanno, in definitiva,

le formule di Frenet (-Serret) ☆

$' = \dfrac{d}{ds}$

$$\begin{cases} \underline{t}' = k\,\underline{n} \\ \underline{n}' = -k\,\underline{t} - \tau\,\underline{b} \\ \underline{b}' = \tau\,\underline{n} \end{cases}$$

scriviamole in questa forma

$$\left(\underline{t}' \;\; \underline{n}' \;\; \underline{b}'\right) = \left(\underline{t} \;\; \underline{n} \;\; \underline{b}\right) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix}}_{\in\, so(3)}$$

1×3 $\qquad$ 1×3 $\qquad$ 3×3

$so(3)$ matr. antisimmetric

oppure nella forma $\quad \underline{\xi}' = \underline{\Omega} \times \underline{\xi} \qquad (\underline{\xi} = \underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$

tramite il vettore di Darboux

$$\underline{w} = -\tau\, \underline{t} + \kappa\, \underline{b}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{pmatrix} \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$$

(che dà la velocità angolare della "rotazione infinitesima" del triedro di Frénet)

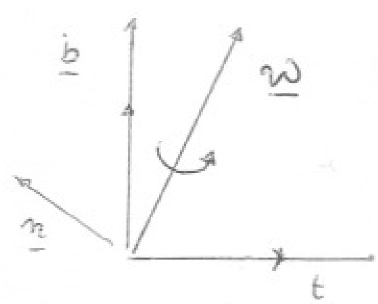
controlliamo:

$$\underline{t}' = \begin{vmatrix} \underline{t} & \underline{n} & \underline{b} \\ -\tau & 0 & \kappa \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -(-\kappa)\,\underline{n} = \kappa\, \underline{n}$$

$$\underline{n}' = \begin{vmatrix} \underline{t} & \underline{n} & \underline{b} \\ -\tau & 0 & \kappa \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\kappa\, \underline{t} - \tau\, \underline{n}$$

$$\underline{b}' = \begin{vmatrix} \underline{t} & \underline{n} & \underline{b} \\ -\tau & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(-\tau)\,\underline{n} = \tau\, \underline{n}$$

$\underline{t}, \underline{n}, \underline{b}$



(qui, $\tau < 0$)

oppure, ancora, in forma matriciale

$$\underline{\xi}' = \Omega \cdot \underline{\xi}$$

★ in definitiva, "il sistema di riferimento subisce una rotazione infinitesima attorno all'origine, che a sua volta trasla di un tratto infinitesimo lungo la curva"

Dalla discussione generale del cap. III segue subito il teorema fondamentale delle curve spaziali: curvatura e torsione determinano univocamente una curva a meno di un movimento rigido

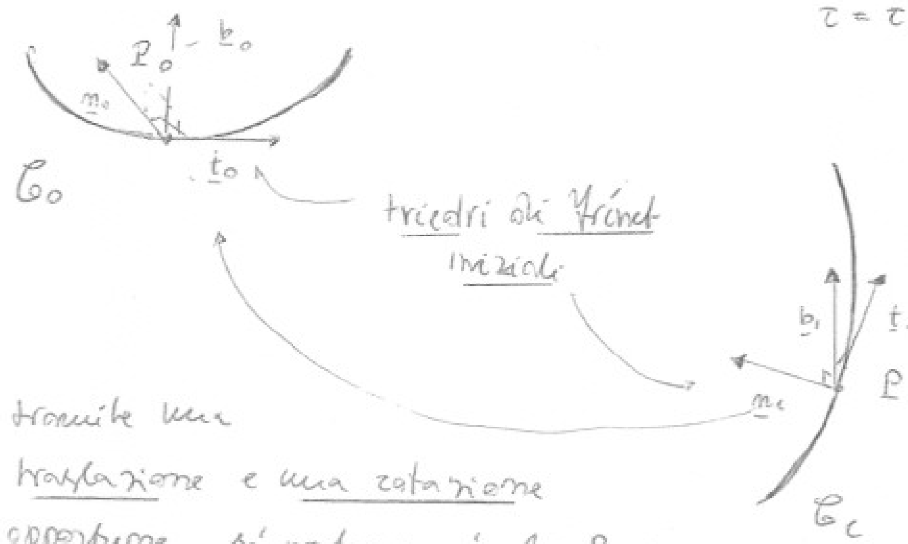
$\kappa = \kappa(s)$

$\tau = \tau(s)$

analiticamente, si tratta di un problema di Cauchy

$R'(s) = A(s)R(s)$

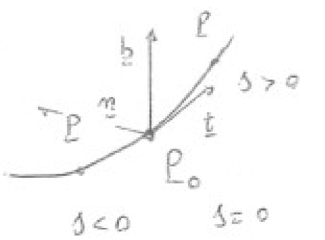
$R(0) = I$ ...



tramite una traslazione e una rotazione opportune si portano i pti P_0 e P_1 a coincidere, e così gli apparati di Frénet iniziali.

Se κ e τ sono le stesse, C_0 e C_1 coincidono.
(ovvero, i vettori di Darboux coincidono)

Sia ora $\underline{r} = \underline{r}(s)$, $s \in I$ intervallo



s ascissa curvilinea, per convenzione negativa a sinistra di P_0 fissato, positiva a destra; sia $\underline{r} \in C^\infty$

$s \in I$ (contenente 0)

Sviluppiamo in serie di Mc-Laurin

$$\underline{r}(s) = \underbrace{\underline{r}(0)}_{=\,\underline{0}} + \underbrace{\underline{r}'(0)}_{=\,\underline{t}\,=\,\underline{t}_0}\, s + \frac{1}{2}\underbrace{\underline{r}''(0)}_{=\,\kappa\,\underline{n}}\, s^2 + \frac{1}{6}\,\underline{r}'''(0)\, s^3 + \underline{o}(s^3)$$

(vettore)

N.B. κ e τ sono calcolate in P_0

$$\frac{\underline{o}(s^3)}{s^3} \to 0, \quad s \to 0$$

$$\underline{r}''' = (k\underline{n})' = k'\underline{n} + k\underline{n}' = k'\underline{n} + $$
$$+ k(-k\underline{t} - \tau\underline{b})$$

$$= -k^2\underline{t} + k'\underline{n} - k\tau\underline{b}$$

In componenti, troviamo
rispetto a $(\underline{t}, \underline{n}, \underline{b})$

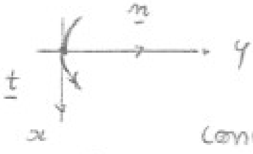
$$\begin{cases} x(s) = s - \frac{k^2}{6}s^3 + \dots \\ y(s) = \frac{k}{2}s^2 + \frac{k'}{6}s^3 + \dots \\ z(s) = -\frac{k\tau}{6}s^3 + \dots \end{cases}$$

di notevole interesse (v. anche oltre). Conservando in ognuna i primi termini dello sviluppo abbiamo

$$\begin{cases} x(s) = s + \dots \\ y(s) = \frac{k}{2}s^2 + \dots \\ z(s) = -\frac{k\tau}{6}s^3 \end{cases}$$

<u>Proiettiamo</u> sui piani coordinati:

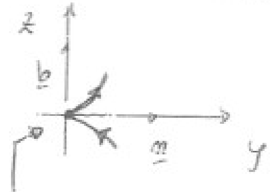
<u>piano</u> <u>osculatore</u>



$$y = \frac{k}{2}x^2$$

convessità dalla parte di $\underline{n}$ ...

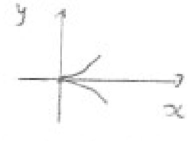
<u>piano</u> <u>normale</u>



$\tau < 0$

$y = \frac{k}{2}s^2$

$z = -\frac{k\tau}{6}s^3$: <u>cuspide</u> (tangente <u>doppia</u> orizzontale



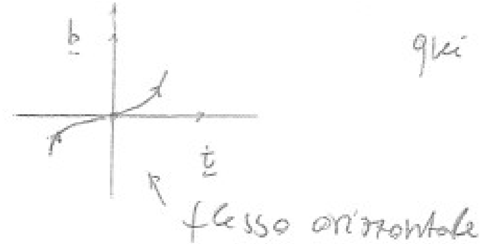
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases} \qquad y = x^{3/2} \quad x \geq 0$$

$$y^2 - x^3 = 0$$

$y^2 = 0$ asse x tangente <u>doppia</u>

piano rettificante

$$x = s$$
$$z = -\frac{k\tau}{6} s^3$$



qui $\tau < 0$

Osserviamo che k e τ <u>non</u> dipendono dall'<u>orientamento della curva</u>.

La cosa è ovvia, per definizione, per k.

Osserviamo poi che, cambiando l'orientamento

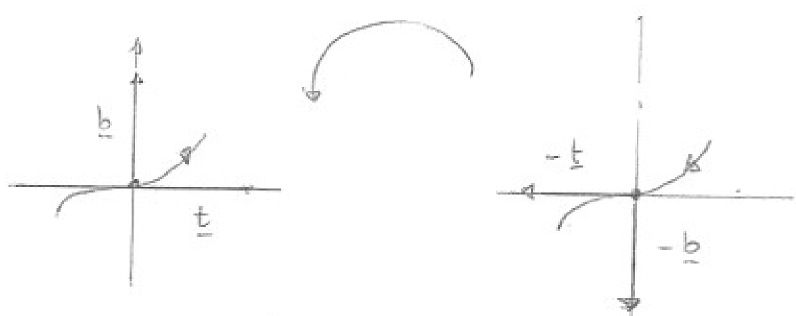
$$\underline{t} \longmapsto -\underline{t}$$

$$\underline{n} \longmapsto \underline{n} \qquad \left(\frac{d\underline{t}}{ds} = \frac{d(-\underline{t})}{d(-s)} \dots \right)$$

$$\underline{b} \longmapsto -\underline{b}$$

sicché $\underline{b}' = \dfrac{d\underline{b}}{ds} = \dfrac{d(-\underline{b})}{d(-s)} \longmapsto \underline{b}'$

ma, poiché $\underline{b}' = \tau \underline{n}$, τ rimane invariata



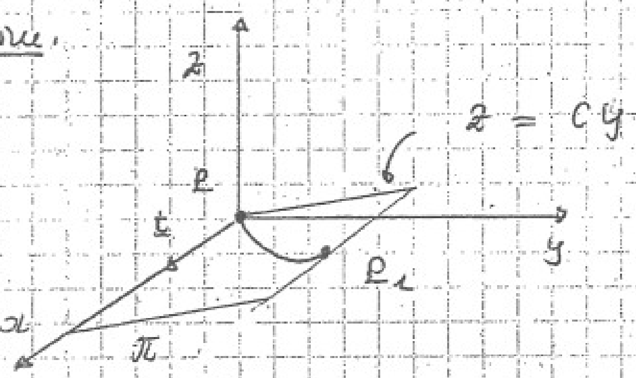
ruotando, è lo stesso grafico!

☆ Ulteriore interpretazione geometrica del piano osculatore (in P)

Proposizione. Sia $P_1 \in \mathcal{C}$, $P \neq P_1$.

Si consideri il piano π contenente la retta tangente a $\mathcal{C}$ in P e P_1. Se $P_1 \to P$, tale piano tende al piano osculatore a $\mathcal{C}$ in P.

Dim.



L'equazione di π è $z = cy$.

$$\frac{z(s)}{y(s)} = c(s) = -\frac{\tau}{3} s \to 0 \quad \text{se } s \to 0.$$

ovvero, al limite, si ottiene $z = 0$, cioè il piano osculatore. □

☆ Vogliamo provare formule esplicite per k e τ in funzione di un parametro qualsiasi. Cominciamo con l'ottenere tali formule in funzione di s ...

Formule Generali

1 convenzione

$$\cdot = \frac{d}{dt} \qquad ' = \frac{d}{ds}$$

Osserviamo intanto che

$$\dot{\underline{r}} = \frac{d\underline{r}}{dt} = \frac{d\underline{r}}{ds}\frac{ds}{dt} = \underline{r}' \cdot \frac{ds}{dt}$$

accelerazione

$$\boxed{\ddot{\underline{r}}} = \frac{d}{dt}\left(\underline{r}'\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d}{ds}\underline{r}' \cdot \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \underline{r}'\frac{d^2s}{dt^2} =$$

$$= \underline{r}''\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \underline{r}'\frac{d^2s}{dt^2} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \underline{n}}_{\text{accelerazione centripeta}} + \underbrace{\frac{d^2s}{dt^2}\underline{t}}_{\text{accelerazione tangenziale}}$$

Si può calcolare poi $\dddot{\underline{r}}$ etc...

inoltre

$$\underline{r}' = \frac{\dot{\underline{r}}}{\|\dot{\underline{r}}\|} \qquad \underline{r}'' = \ldots \frac{\|\dot{\underline{r}}\|^2\ddot{\underline{r}} - \langle\dot{\underline{r}},\ddot{\underline{r}}\rangle\dot{\underline{r}}}{\|\dot{\underline{r}}\|^4}$$

Calcoliamo

bro

$$\boxed{k = \|\underline{r}''\| = \|\underline{r}'' \times \underline{r}'\| = \ldots = \frac{\|\ddot{\underline{r}} \times \dot{\underline{r}}\|}{\|\dot{\underline{r}}\|^3}}$$

Calcoliamo τ.

$$\tau = -\frac{\langle \underline{r}' \times \underline{r}'', \underline{r}''' \rangle}{k^2} = -\frac{\langle \underline{r}' \times \underline{r}'', \underline{r}''' \rangle}{\|\underline{r}' \times \underline{r}''\|^2}$$

$$= \ldots\ldots = -\frac{\langle \dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}; \dddot{\underline{r}} \rangle}{\|\dot{\underline{r}} \times \ddot{\underline{r}}\|^2}$$

(lunghi calcoli)

Verifichiamo la prima...

$$-\frac{\langle \underline{r}' \times \underline{r}'', \underline{r}''' \rangle}{k^2} = -\frac{\langle \underline{t} \times k\underline{n}, (k\underline{n})' \rangle}{k^2} =$$

$$= -\frac{\langle k\underline{b}, k'\underline{n} + k\underline{n}' \rangle}{k^2} =$$

$$= -\frac{\langle k\underline{b}, k\underline{n}' \rangle}{k^2} = -\langle \underline{b}, \underline{n}' \rangle =$$

$$= -\langle \underline{b}, -k\underline{t} - \tau\underline{b} \rangle = \tau \qquad \square$$

Determiniamo le equazioni dei piani coordinati (intrinseci) (= piani principali)

(*) piano normale $\quad \langle \underline{r} - \underline{r}_0, \dot{\underline{r}}_0 \rangle = 0$

(*) piano osculatore

$$\langle \underline{r} - \underline{r}_0 \,,\, \underline{r}_0'' \times \underline{r}_0' \rangle = 0$$

$$\underline{r}_0'' \times \underline{r}_0' = \underset{\substack{\vee\\0}}{k}\, \underline{n} \times \underline{t}$$

ora si ha $\quad \underline{\mathring{r}} \times \underline{\ddot{r}} = s' \underline{r}' \times \left[\underline{r}'' s'^2 + \underline{r}' s'' \right] =$

$$= s'^3 (\underline{r}' \times \underline{r}'') \quad \Big(= \underset{\neq 0}{\left(\frac{ds}{dt}\right)^3} (\underline{r}' \times r'') \Big)$$

$\Rightarrow$ rispetto ad un parametro qualsiasi:

$$\langle \underline{r} - \underline{r}_0 \,,\, \underline{\mathring{r}}_0 \times \underline{\ddot{r}}_0 \rangle = 0$$

(*) piano rettificante

$$\langle \underline{r} - \underline{r}_0 \,,\, \underline{r}_0'' \rangle = 0$$

oppure $\quad \langle \underline{r} - \underline{r}_0 \,,\, \underline{n}_0 \rangle = 0 \quad \ldots .$

$$\underline{n}_0 = \underline{b}_0 \times \underline{t}_0$$

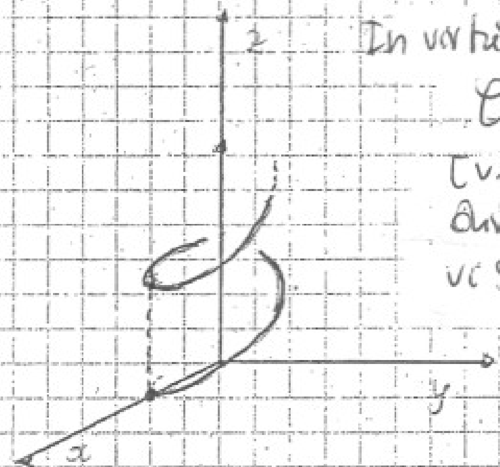
dat. dal piano osculatore

Conclusione .. nei calcoli espliciti non è necessario passare attraverso la lunghezza d'arco

☆ <u>Esempio classico</u> : <u>l'elica cilindrica</u> $\mathcal{C}$

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t \\ z = bt \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R} \qquad a, b > 0 \quad \leftarrow \text{per fissare le idee}$$

<u>passo dell'elica</u> $= 2\pi b$



In virtù del teorema fondamentale
$\mathcal{C}$ è piana $\iff \tau = 0$
[v. anche oltre per una dim. diretta.
vi sono però metodi ad hoc

[verifichiamo che $\mathcal{C}$ non è piana...
per es. .. se lo fosse $\exists\ A, B, C, D$ tali che, identicamente, si avrebbe

$$A\,x(t) + B\,y(t) + C\,z(t) + D \equiv 0$$

e questo non è possibile : .. se $t \to \pm\infty$ $x(t)$ e $y(t)$ rimangono limitate e $z(t)$ no ...]

Altro esempio : la cubica gobba

[Se per un momento consideriamo

$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 \\ z &= t^3 \end{aligned}$$

, si avrebbe $At + Bt^2 + Ct^3 + D \equiv 0$
il che è palesemente assurdo ...]

[In generale si può anche procedere così ..
Si considera il piano passante per tre punti (non allineati) della curva e si verifica che vi sono altri punti di $\mathcal{C}$ non giacenti su di esso.]

L'elica è regolare ...

$$ds = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = \sqrt{a^2+b^2}\, dt$$

usando l'ascissa curvilinea si ha

$$\begin{cases} x(s) = a \cos \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ y(s) = a \sin \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ z(s) = b \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

[se parto da $t=0$ ho $s = \sqrt{a^2+b^2}\, t$

$$\underline{r} = (a \cos t, \ a \sin t, \ bt)$$

$$\underline{\dot{r}} = (-a \sin t, \ a \cos t, \ b)$$

$$\underline{\ddot{r}} = (-a \cos t, \ -a \sin t, \ 0)$$

$$\underline{\dddot{r}} = (a \sin t, \ -a \cos t, \ 0)$$

$$k = \frac{\| \underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}} \|}{\| \underline{\dot{r}} \|^3} = \left(\text{poiché } \langle \underline{\dot{r}}, \underline{\ddot{r}} \rangle = 0 \right)$$

$$= \frac{\| \underline{\dot{r}} \| \, \| \underline{\ddot{r}} \|}{\| \underline{\dot{r}} \|^3} = \frac{\| \underline{\ddot{r}} \|}{\| \underline{\dot{r}} \|^2} = \frac{a}{a^2+b^2} \quad \text{(costante)}$$

$$\tau = -\frac{\langle \underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}, \underline{\dddot{r}} \rangle}{\| \underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}} \|^2} = \ldots = \frac{-\langle \underline{\dot{r}} \times \underline{\ddot{r}}, \underline{\dddot{r}} \rangle}{\| \underline{\dot{r}} \|^2 \, \| \underline{\ddot{r}} \|^2} =$$

$$= \frac{1}{(a^2+b^2)a^2} \cdot \begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{(a^2+b^2)a^2} \cdot b \cdot a^2 = -\frac{b}{a^2+b^2} < 0 \quad (b>0)$$

se $b<0$ la torsione è positiva.

☆ ... una vite potrà essere di due tipi...

☆ Attenzione .. ciò non ha nulla a che vedere con l'orientamento !

☆ In virtù del teorema fondamentale, le eliche cilindriche sono le uniche curve aventi curvatura e torsione costanti

Inoltre $\mathscr{C}$ è piana $\Leftrightarrow$ $\tau \equiv 0$, sempre per il teor. fondamentale, oppure osservando, direttamente, che $\tau \equiv 0 \Rightarrow \underline{b} = \underline{b}(s) = b_0$ (costante). Posto $f(s) = \langle \underline{r}(s), b_0 \rangle$, è $f'(s) = \langle \underline{r}'(s), b_0 \rangle = \langle \underline{t}(s), b_0 \rangle = 0 \Rightarrow$ $\langle \underline{r}(s), b_0 \rangle = \underset{\text{costante}}{c}$, la quale ci dice che $\mathscr{C}$ appartiene al piano di equazione $\langle X, b_0 \rangle = c$.

4 Sfera osculatrice

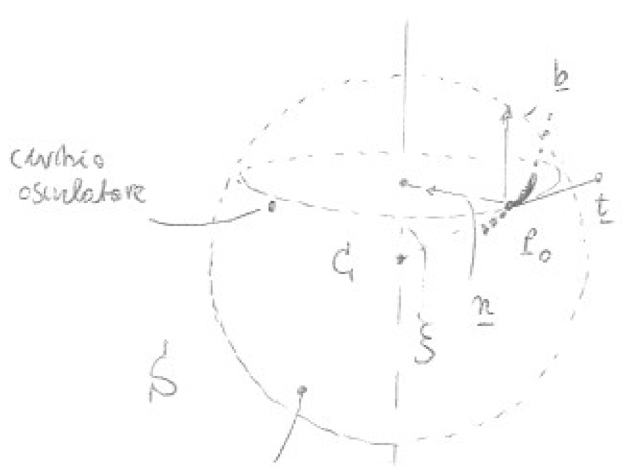
Applichiamo la descrizione locale di una curva spaziale

$$\begin{cases} x = x(s) = s - \frac{k^2}{6} s^3 + \dots \\ y = y(s) = \frac{k}{2} s^2 + \frac{k'}{6} s^3 + \dots \\ z = z(s) = -\frac{k\tau}{6} s^3 + \dots \end{cases}$$

alla determinazione della sfera osculatrice S a $\mathcal{C}$ in un suo pto P_0, ovvero la sfera limite di quelle passanti per P_0 e per altri tre pti della curva, quando si portino questi ultimi a coincidere con P_0.

Tale sfera conterrà il cerchio osculatore di $\mathcal{C}$ in P_0

$k > 0 \quad \tau \neq 0$



Equazione della sfera di centro $C_1 : (x_0, y_0, z_0)$ e raggio R

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$$

nel nostro caso (utilizzando il triedro di Frénet in P_0... v. figura

$$C_1 = \left(0, \frac{1}{k}, \xi\right)$$

da determinarsi

e si ha subito: $R^2 = \frac{1}{k^2} + \xi^2$ (la sfera passa per P_0)

Sia ora $P = (x(s), y(s), z(s))$ imponiamo l'appartenenza del pto alla sfera (troncando lo sviluppo al 3° ordine, assicurando con ciò, al limite, un contatto quadripunto. Calcoliamo:

$$x(s)^2 + \left(y(s) - \frac{1}{k}\right)^2 + (z(s) - \xi)^2 = \frac{1}{k^2} + \xi^2$$

$$\left(1 - \frac{k^2}{\cdot} s^3 \ldots\right)^2 + \left(\frac{k}{\cdot} s^2 \ldots \frac{k'}{\cdot} s^3 \ldots \frac{1}{\cdot}\right)^2 + \left(\frac{k\tau}{\cdot} s^3 \ldots\right)^2$$

1° membro 2° membro

fino all'ordine 3

ordine 0: $\frac{1}{k^2} + \cancel{\xi^2} = \frac{1}{k^2} + \cancel{\xi^2}$ ✓

ordine 1: $0 = 0$ ✓

ordine 2: $s^2 - 2\,\frac{k}{2}\,\frac{1}{k}\,s^2 = 0$ ✓

ordine 3: $-2\,\frac{k'}{6}\,\frac{1}{k}\,s^3 + 2\,\frac{k\tau}{6}\,\xi\,s^3 = 0$, che implica:

raggio di curvatura: (si ricordi...)

$$\rho = \frac{1}{k}$$

$$\rho' = -\frac{k'}{k^2}$$

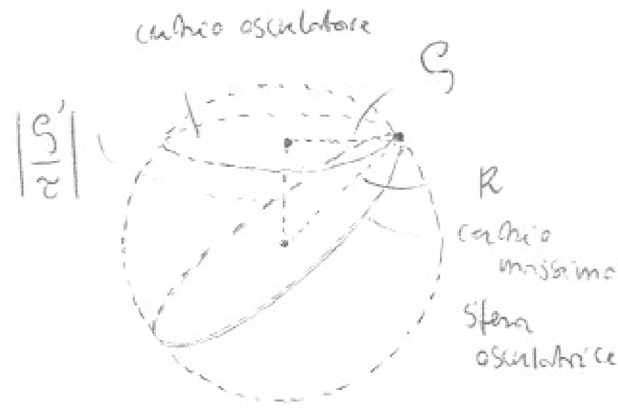
$$-\frac{k'}{k} + k\tau\xi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \xi = \frac{1}{\tau}\cdot\frac{k'}{k^2} =$$

$$= -\frac{1}{\tau}\rho'$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = \sqrt{\rho^2 + \frac{\rho'^2}{\tau^2}}}$$

raggio di S



Determiniamo esplicitamente le coordinate del centro della sfera osculatrice (formula di de Saint Venant)