GEOMETRIA — Prova scritta del 7/1/2009

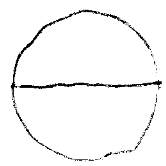
Prof. M. Spera — a.a. 2007/08

Tempo a disposizione: 2h
Le risposte vanno adeguatamente giustificate

1) Sia data, nel piano cartesiano, la catenaria $\mathcal{C}$ di equazione $y = \cosh x$. Se ne calcoli la curvatura in un punto generico. Quindi si determini l'evoluta di $\mathcal{C}$. Si calcoli la lunghezza dell'arco di evoluta di estremi corrispondenti a $x=0$ e $x=1$.

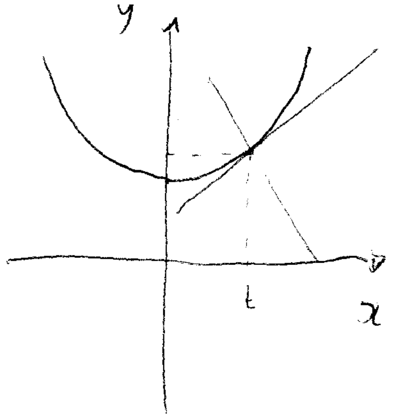
2) Si consideri la catenoide Σ ottenuta facendo ruotare la catenaria dell'esercizio 1 attorno all'asse x. Se ne calcolino le curvature principali e si verifichi che si tratta di una superficie minima. [Sugg. conviene sfruttare le tecniche dell'es. 1] Si calcoli infine la curvatura gaussiana di Σ.

3) Siano dati gli spazi topologici

$X =$  $Y =$ 

Si dica, motivando la risposta, se essi sono omeomorfi.

1



$$y = \cosh x$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = \cosh t \end{cases}$$

$$k(x) = \frac{y''(x)}{\left(1 + y'^2(x)\right)^{3/2}}$$

curvatura (con segno: risulterà positiva)

$$y = \cosh x$$
$$y' = \sinh x$$
$$y'' = \cosh x$$

$$= \frac{\cosh x}{(\underbrace{1 + \sinh^2 x}_{= \cosh^2 x})^{3/2}} = \frac{\cosh x}{\cosh^3 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}$$

$$\rho(x) = \cosh^2 x$$

raggio di curvatura

Evoluta: $\underline{R} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{curva originaria}}}{\underline{r}} + \rho \underline{n}$

troviamo $\underline{n}$ ora $\underline{\dot{r}} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sinh t \end{pmatrix}$

$$i\underline{\dot{r}} = \begin{pmatrix} -\sinh t \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{n} = \frac{\begin{pmatrix} -\sinh t \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{1 + \sinh^2 t}}$$

[$\underline{\dot{r}}$ ruotato di $\frac{\pi}{2}$ in senso antior]

$$= \frac{\begin{pmatrix} -\sinh t \\ 1 \end{pmatrix}}{\cosh t}$$

Dunque

$$\underline{R} = \begin{pmatrix} t \\ \cosh t \end{pmatrix} + \underbrace{\cosh^2 t}_{\rho} \cdot \frac{1}{\cosh t} \begin{pmatrix} -\sinh t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} t - \sinh t \cosh t \\ \cosh t \ + \cosh t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t - \sinh t \cosh t \\ 2 \cosh t \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathcal{E} : \begin{cases} x = t - \sinh t \cosh t \\ y = 2 \cosh t \end{cases}}$$

oppure: $\dot{x} = 1$

$\dot{y} = \sinh t$

: $\dot{x}(x-t) + \dot{y}(y - \cosh t) = 0$

normale

Variante: inviluppo delle normali

normale a $\mathcal{C}$ in un pto generico $(t \neq 0)$

$$m^{\perp} = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{y'} = -\frac{1}{\sinh t}$$

$$y - \cosh t = -\frac{1}{\sinh t}(x - t)$$

$$(*) \quad \boxed{\sinh t \ y - \sinh t \cosh t + x - t = 0}$$

$\frac{\partial}{\partial t} = 0$

$$\cosh t \ y - \cosh^2 t \underbrace{- \sinh^2 t - 1}_{-\cosh^2 t} = 0$$

$$\cosh t \, y - 2\cosh t = 0$$

$$\begin{cases} y = 2\cosh t \\ x = t - \operatorname{senh} t \cdot 2\cosh t + \operatorname{senh} t \cosh t \\ = t - \operatorname{senh} t \cosh t \end{cases}$$

(valida $\forall\, t \in \mathbb{R}$) ✓

Lunghezza dell'arco di evoluta di estremi corrispondenti a $t=0$ e $t=1$:

ricordare: $\left[\rho = \cosh^2 x\right]$

$$l = \left| \rho_{t=0} - \rho_{t=1} \right|$$

catenaria

$$= \left| \cosh^2(0) - \cosh^2(1) \right|$$

$$= \left| 1 - \left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)^2 \right| = \left(\frac{e+e^{-1}}{2}\right)^2 - 1$$

$$= \frac{(e+e^{-1})^2 - 2^2}{4} =$$

$$= \frac{e(e+e^{-1}+2)\, e(e+e^{-1}-2)}{4e^2} = \frac{(e^2+2e+1)(e^2-2e+1)}{4e^2}$$

$$= \frac{(e+1)^2(e-1)^2}{4e^2} = \frac{(e^2-1)^2}{4e^2}$$

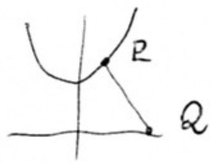
(2) Per calcolare le curvature principali

osserviamo che $k_1 = \pm$ curv. meridiano $= -\dfrac{1}{\cosh^2 t}$ (ex. prec.)

$$k_2 = \frac{1}{\text{gran normale} \equiv N}$$

calcoliamo N riprendiamo la (*) e intersechiamo con l'asse x $(y=0)$.

si ottiene



$$-\sinh t \cosh t + x - t = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = t + \sinh t \cosh t$$

Q: $\quad y = 0$

$P: (t, \cosh t)$

$Q: (t + \sinh t \cosh t, 0)$

calcoliamo ora $\overline{PQ} = N$

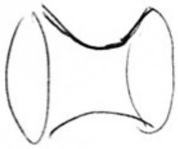
$$\overline{PQ} = \left[(\sinh t \cosh t)^2 + \cosh^2 t\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \cosh t \cdot (\underbrace{\sinh^2 t + 1}_{\cosh t^2})^{\frac{1}{2}} = \cosh^2 t$$

$$\Rightarrow \quad k_2 = \cosh^{-2} t = -k_1$$

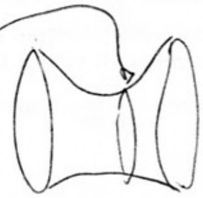
$\Rightarrow$ (come sappiamo) $\quad H = 0$

ricordare:

✦ la catenoide 2.  è l'unica superficie minima di rotazione!

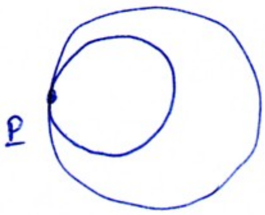
si ha poi $K = k_1 k_2 = -k_1^2 = -\cosh^4 t$

curv. gaussiana sul parallelo corr. a t



Nota: ricordando che $H = 0$, si poteva concludere subito che $k_2 = -k_1$, dall'es. 1.

(3)

$X =$  e $Y =$ 

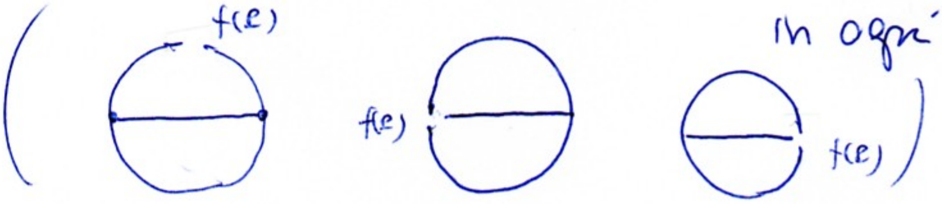
non sono omeomorfi (anche se entrambi connessi per archi ($\Rightarrow$ connessi) e l.c.p.a., e compatti)

Sia p.a. $f : X \longrightarrow Y$ un omeom.

$$f|_{X \setminus \{p\}} : X \setminus \{p\} \longrightarrow Y \setminus \{f(p)\}$$

è allora un omeom. Ma $X \setminus \{p\}$ 

non è connesso, mentre $Y \setminus \{f(p)\}$ lo è in ogni caso

()