Formule di Weingarten

Consentono di esprimere S rispetto alla base $\{\underline{r}_u, \underline{r}_v\}$: S dipenderà dai coefficienti delle due forme fondamentali.

Scriviamo:

$$\underline{N}_u = a_{11}\,\underline{r}_u + a_{21}\,\underline{r}_v$$

$$\underline{N}_v = a_{12}\,\underline{r}_u + a_{22}\,\underline{r}_v$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Moltiplicando ambo i membri scalarmente sia per $\underline{r}_u$ che per $\underline{r}_v$, si ottiene un sistema (non omogeneo) lineare di 4 equazioni in 4 incognite, univocamente risolubile ($\{\underline{r}_u, \underline{r}_v\}$ formano una base!). Si ottiene

$$a_{11} = \frac{fF - eG}{EG - F^2}$$

$$a_{12} = \frac{gF - fG}{EG - F^2}$$

$$a_{21} = \frac{eF - fE}{EG - F^2}$$

$$a_{22} = \frac{fF - gE}{EG - F^2}$$

formule di Weingarten

in modo più compatto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = -\underbrace{\frac{1}{EG-F^2}\begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1}}\begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}$$

A titolo di controllo, poniamoci nel caso $F = 0$ e verifichiamo che, posto

$$e = (\underline{r}_u, \underline{r}_v) \qquad e' = \left(\frac{\underline{r}_u}{\sqrt{E}}, \frac{\underline{r}_v}{\sqrt{G}} \right)$$

base ortonormale

la matrice $\overset{-dN}{=}$

$$\mathcal{M}_{e'e'}(S) \text{ è simmetrica} \quad \text{(e calcoliamola!)}$$

cambio di base

$$\mathcal{M}_{e'e'}(S) = \mathcal{M}_{e'e}(I) \cdot \mathcal{M}_{ee}(S) \cdot \mathcal{M}_{ee'}(I)$$

$$\begin{array}{ccc} e & & e' \\ \underline{r}_u & \longmapsto & \frac{\underline{r}_u}{\sqrt{E}} \\ \underline{r}_v & \longmapsto & \frac{\underline{r}_v}{\sqrt{G}} \end{array} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{G}} \end{pmatrix}^{-1}}_{= \begin{pmatrix} \sqrt{E} & 0 \\ 0 & \sqrt{G} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{e}{E} & \frac{f}{E} \\ \frac{f}{G} & \frac{g}{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{E}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{G}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{E} & 0 \\ 0 & \sqrt{G} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{e}{E\sqrt{E}} & \frac{f}{E\sqrt{G}} \\ \frac{f}{\sqrt{E}\,G} & \frac{g}{G\sqrt{G}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e}{E} & \frac{f}{\sqrt{EG}} \\ \frac{f}{\sqrt{EG}} & \frac{g}{G} \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

— ∘ — ∘ —

Variante:

$$dN: \begin{array}{l} \underline{r}_u \longmapsto a_{11}\,\underline{r}_u + a_{21}\,\underline{r}_v \\ \underline{r}_v \longmapsto a_{12}\,\underline{r}_u + a_{22}\,\underline{r}_v \end{array} \quad \ldots$$

$$\frac{\underline{r}_u}{\sqrt{E}} \mapsto a_{11} \frac{\underline{r}_u}{\sqrt{E}} + \frac{a_{21}}{\sqrt{E}}\sqrt{G}\cdot\frac{\underline{r}_v}{\sqrt{G}}$$

$$\frac{\underline{r}_v}{\sqrt{G}} \mapsto \frac{a_{12}}{\sqrt{G}}\sqrt{E}\frac{\underline{r}_u}{\sqrt{E}} + a_{22} \frac{\underline{r}_v}{\sqrt{G}}$$

ora $\quad a_{21} = -\frac{f}{G} \qquad a_{12} = -\frac{f}{E}$

$$a_{21}\sqrt{\frac{G}{E}} = -\frac{f}{G}\sqrt{\frac{G}{E}} = -\frac{f}{\sqrt{GE}}$$

$$a_{12}\sqrt{\frac{E}{G}} = -\frac{f}{E}\sqrt{\frac{E}{G}} = -\frac{f}{\sqrt{EG}} \qquad \checkmark$$

★★★ I teoremi di Gauss (Egregium) e di Codazzi - Mainardi

★★ Strategia generale

$u \leftrightarrow 1$
$v \leftrightarrow 2$

Si parte da

$$(\diamond)\begin{cases} \underline{r}_{uu} = \Gamma^1_{11}\underline{r}_u + \Gamma^2_{11}\underline{r}_v + e\,\underline{N} \\ \underline{r}_{uv} = \Gamma^1_{12}\underline{r}_u + \Gamma^2_{12}\underline{r}_v + f\,\underline{N} \quad = \underline{r}_{vu} \\ \underline{r}_{vv} = \Gamma^1_{22}\underline{r}_u + \Gamma^2_{22}\underline{r}_v + g\,\underline{N} \end{cases}$$

Γ: simboli di Christoffel

$\Gamma^{\circ}_{12} = \Gamma^{\circ}_{21}$

- i Γ dipendono dalla 1ª f. fond. (metrica) e dalle sue derivate (parziali) prime

Si ricordi, per il seguito, che:

- La matrice di S rispetto a $(\underline{r}_u, \underline{r}_v)$ è descritta dalle formule di Weingarten $(S = -dN)$

Si calcolino tramite le $(\diamond)$

$$\underline{r}_{uuv} = \underline{r}_{uvu}$$

(Schwarz)

$$\underline{r}_{uvv} = \underline{r}_{vvu}$$

e si eguaglino le rispettive componenti rispetto a $(\underline{r}_u, \underline{r}_v, \underline{N})$

componenti normali

★ Codazzi - Mainardi

$$\begin{cases} e_v - f_u = e\Gamma^1_{12} + f\left(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}\right) - g\Gamma^2_{11} \\ f_v - g_u = e\Gamma^1_{22} + f\left(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\right) - g\Gamma^2_{12} \end{cases}$$

componenti tangenziali $\Rightarrow K = K(E, F, G, E_u, E_v, \ldots,$

$E_{uu}\, E_{uv}\, E_{vv}, \ldots,$

+

$K = \dfrac{eg - f^2}{EG - F^2}$

+

Weingarten

formule di Gauss ***

$\Rightarrow$ Theorema Egregium

ex: $EK = (\Gamma^2_{11})_v - (\Gamma^2_{12})_u + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - (\Gamma^2_{12})^2$

le eq. di Gauss e Codazzi-Mainardi sono nec. e sufficienti per la ricostruzione di una superficie di I^a e II^a forma fondamentale assegnate (eq. di compatibilità). Questo è il teorema di Bonnet (o teor. fond. della teoria delle superfici)

Se $F = 0$, si trova

$$\boxed{K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left(\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right)}$$

ulteriori casi particolare importanti: $E \equiv 1 \quad G = G(u,v)$

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{G}}\left(\frac{G_u}{\sqrt{G}}\right)_u = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{G}}(+2)(\sqrt{G})_{uu} = -\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$$

$$\boxed{K = -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u^2}}$$

* (per le coord. geodetiche e le coord. polari (per queste ultime è $G = G(u)$)

* metriche conformemente piatte: $E = G = \lambda(u,v) \quad (>0)$

$$K = -\frac{1}{2\lambda}\left[\left(\frac{\lambda_v}{\lambda}\right)_v + \left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)_u\right] = -\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\partial^2\log\lambda}{\partial v^2} + \frac{\partial^2\log\lambda}{\partial u^2}\right) = \boxed{-\frac{1}{2\lambda}\Delta\log\lambda}$$

La connessione di Levi Civita

Fissato P, $\{\underline{r}_u, \underline{r}_v, \underline{N}\}$ formano una base di $\mathbb{R}^3$.

Dunque:

$$\diamond \begin{cases} \underline{r}_{uu} = \Gamma^1_{11}\underline{r}_u + \Gamma^2_{11}\underline{r}_v + L_1\underline{N} \\ \underline{r}_{uv} = \Gamma^1_{12}\underline{r}_u + \Gamma^2_{12}\underline{r}_v + L_2\underline{N} \\ \quad \parallel \\ \underline{r}_{vu} = \Gamma^1_{21}\underline{r}_u + \Gamma^2_{21}\underline{r}_v + L_2'\underline{N} \\ \underline{r}_{vv} = \Gamma^1_{22}\underline{r}_u + \Gamma^2_{22}\underline{r}_v + L_3\underline{N} \end{cases}$$

Si ottiene facilmente $L_1 = e$, $L_2 = L_2' = f$, $L_3 = g$

i $\{\Gamma^i_{jk}\}_{\substack{i=1,2\\ j=1,2\\ k=1,2}}$ sono detti simboli di Christoffel

Si trova subito, da $\underline{r}_{uv} = \underline{r}_{vu}$,

$$\Gamma^1_{12} = \Gamma^1_{21}, \quad \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21}$$

I simboli di Christoffel possono ottenersi prendendo i prodotti scalari delle $\diamond$ con $\underline{r}_u$ e $\underline{r}_v$ ...: essi dipendono dai coefficienti della metrica e dalle loro derivate

Per esempio $\langle \underline{r}_u \mid \underline{r}_{uu} \rangle = \frac{1}{2} E_u$ ...

In generale si ottiene ...

Qualche dettaglio sul calcolo dei simboli di Christhoffel

$$\underline{r}_{uu} = \Gamma^1_{11}\,\underline{r}_u + \Gamma^2_{11}\,\underline{r}_v + e\,\underline{N} \quad . \qquad \text{Sim:}$$

$$\langle \underline{r}_{uu}, \underline{r}_u \rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\langle \underline{r}_u, \underline{r}_u \rangle = \frac{1}{2}E_u \qquad \text{e, d'altro canto:}$$

$$\langle \underline{r}_{uu}, \underline{r}_u \rangle = \Gamma^1_{11}\underbrace{\langle \underline{r}_u\,\underline{r}_u \rangle}_{E} + \Gamma^2_{11}\underbrace{\langle \underline{r}_v, \underline{r}_u \rangle}_{F}$$

$$= \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F \qquad (*) \quad \boxed{\frac{1}{2}E_u = \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F}$$

calcoliamo ora

$$\langle \underline{r}_{uu}, \underline{r}_v \rangle = \frac{\partial}{\partial u}\overbrace{\langle \underline{r}_u, \underline{r}_v \rangle}^{F} - \langle \underline{r}_u, \underline{r}_{vu} \rangle$$

$$= F_u - \langle \underline{r}_u, \underline{r}_{uv} \rangle = F_u - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\overbrace{\langle \underline{r}_u, \underline{r}_u \rangle}^{E}$$

Ma è pure:

$$= F_u - \frac{1}{2}E_v$$

$$\langle \underline{r}_{uu}, \underline{r}_v \rangle = \Gamma^1_{11}\underbrace{\langle \underline{r}_u\,\underline{r}_v \rangle}_{F} + \Gamma^2_{11}\underbrace{\langle \underline{r}_v, \underline{r}_v \rangle}_{G}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{F_u - \frac{1}{2}E_v = \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G} \qquad (**)$$

Le $(*)$ e $(**)$ forniscono un sistema lineare nelle incognite Γ^1_{11} e Γ^2_{11}, univocamente risolubile $(EG - F^2 > 0)$

ecc. ecc.

In generale

Si pone $g_{im} = \langle \underline{r}_i | \underline{r}_m \rangle$

qui $i=1,2$ $m=1,2$ etc... ma le formule hanno validità generale per una varietà riemanniana)

$$g_{im,k} = \langle \underline{r}_{ik} | \underline{r}_m \rangle + \langle \underline{r}_i | \underline{r}_{mk} \rangle$$

$\left(\overset{\shortparallel}{\frac{\partial}{\partial x_k} g_{im}}\right)$

Si arriva a

$$\langle \underline{r}_{ik} | \underline{r}_m \rangle = \frac{1}{2}\left(g_{im,k} + g_{mk,i} - g_{ki,m}\right) \equiv \Gamma_{ikm}$$

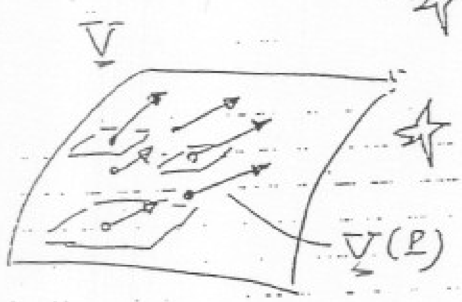
e $\Gamma^{l}_{ik} = g^{lm}\, \Gamma_{ikm}$ — si somma su m: Connessione di Einstein

(g^{lm}): inversa di (g_{ij})

sia $\underline{V}$ un campo vettoriale (tangente) su Σ : $\underline{V}: \Sigma \to \mathbb{R}^3$

$\underline{V} = \underline{V}(u,v) \equiv \underline{V}(P) \in T_P\Sigma$

☆ Derivata covariante ("connessione") (Levi Civita) (risp. a u)



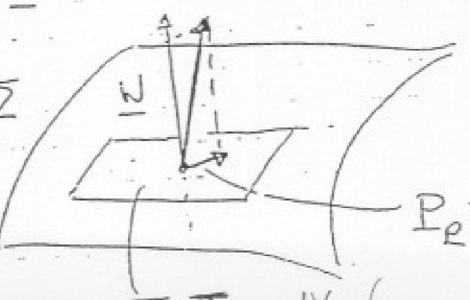
☆ $$\boxed{(\nabla_u \underline{V})(P) = P_P\left(\underline{V}_u(P)\right)}$$

$\left(\underline{V}_u = \frac{\partial \underline{V}}{\partial u}\right.$ etc.

$$P\, \underline{W} = \underline{W} - \langle \underline{W} | \underline{N} \rangle \underline{N}$$

$\left(\begin{matrix}\text{suffisso } P \\ \text{omesso}\end{matrix}\right)$

proiezione ortogonale su $T_P\Sigma$



" Se $\underline{V}$ è un campo vettoriale tangente a Σ, non è detto che $\underline{V}_u$, $\underline{V}_v$ etc. .. lo siano:

∇ produce un nuovo campo vettoriale tangente

esempio. $P \to \underline{r}_u(P)$ è un tale campo,

$P \to \underline{r}_{uu}(P)$ <u>non è tangente</u> a Σ in generale

ma

$$\nabla_u \underline{r}_u = P\,\underline{r}_{uu} = \Gamma^1_{11}\underline{r}_u + \Gamma^2_{11}\underline{r}_v$$

lo è.

Si ha

☆ $\nabla_u \underline{r}_v = \nabla_v \underline{r}_u$ ("assenza di torsione")

Inoltre:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial u_k} \langle \underline{r}_i | \underline{r}_j \rangle} = \langle \underline{r}_{ik} | \underline{r}_j \rangle + \langle \underline{r}_i | \underline{r}_{jk} \rangle$$

$$= (\text{dato che } \underline{r}_j \perp \underline{N}) =$$

$$\boxed{\langle \nabla_k \underline{r}_i | \underline{r}_j \rangle + \langle \underline{r}_i | \nabla_k \underline{r}_j \rangle}$$

("compatibilità con la metrica")
"connessione metrica"

Il "Theorema Egregium" di Gauss

> " K è invariante per isometrie, ovvero, dipende solo dai coefficienti della metrica e dalle loro derivate (fino al 2° ordine).

Dimostrazione: consideriamo

$$[\nabla_u, \nabla_v]\, \underline{r}_u :=$$

$$:= \nabla_u(\nabla_v \underline{r}_u) - \nabla_v(\nabla_u \underline{r}_u)$$

Tale quantità è della forma $\alpha\, \underline{r}_u + \beta\, \underline{r}_v$, dove α e β dipendono dalla metrica e dalle derivate di questa, fino all'ordine 2.

Calcoliamola ora esplicitamente, osservando che la derivata covariante può applicarsi anche a campi vettoriali non tangenti.

$$\nabla_u(\nabla_v \underline{r}_u) = \nabla_u\left(\underline{r}_{uv} - \langle \underline{r}_{uv} | \underline{N} \rangle \underline{N} \right) =$$

$$= \nabla_u(\underline{r}_{uv}) - \nabla_u\left(\langle \underline{r}_{uv} | \underline{N} \rangle \underline{N} \right) =$$

$$= \underline{r}_{uvu} - \langle \underline{N} | \underline{r}_{uvu} \rangle \underline{N} - \underline{P}\Big(\langle \underline{r}_{uv} | \underline{N} \rangle_u \underline{N} + \langle \underline{r}_{uv} | \underline{N} \rangle \underline{N}_u \Big)$$

$$= \underline{r}_{uvu} - \langle \underline{N} | \underline{r}_{uvu} \rangle \underline{N} - \langle \underline{r}_{uv} | \underline{N} \rangle \underline{N}_u$$

Da ciò si ottiene facilmente

$$[\nabla_u, \nabla_v]\, \underline{r}_u = \langle \underline{r}_{uu} | N\rangle \underline{N}_v - \langle \underline{r}_{uv} | N\rangle \underline{N}_u$$
$$= e\, \underline{N}_v - f\, \underline{N}_u .$$

Utilizzando le formule di Weingarten, si ottiene

$$[\nabla_u, \nabla_v]\, \underline{r}_u = \overset{\alpha}{K F}\, \underline{r}_u - \overset{\beta}{K E}\, \underline{r}_v ,$$

da cui l'asserto $\square$

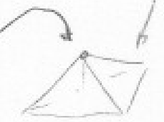
Nel caso in cui $F = 0$ si ottiene

$$\boxed{K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}} \left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)\right]}$$

formula che utilizzeremo in seguito

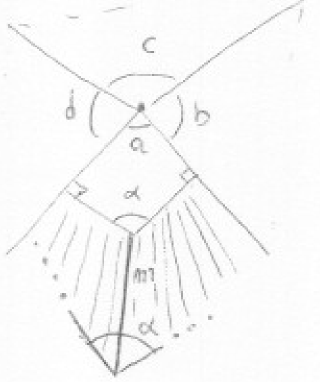
Il "Theorema Egregium" sancisce l'impossibilità di risolvere il "problema geografico" $\equiv$ la possibilità di rappresentare fedelmente (ossia isometricamente) la superficie terrestre su una carta.
(.. $K_{S^2} = +1 \quad K_{piano} = 0$ ...)

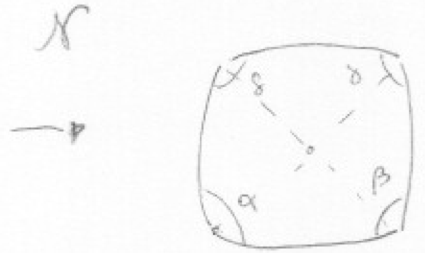
44 Discussione euristica del Theorema Egregium (Hilbert)



appross. poligonale della superficie

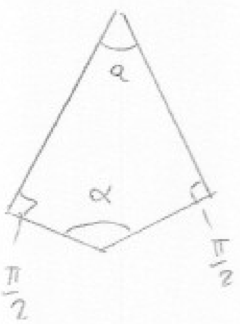
la curvatura è concentrata nel vertice





a, b, c, d
non cambiano per flessione (isometrie) per (*)

α, β, γ, δ
non cambiano per flessione



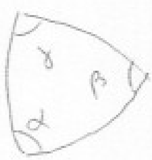
(*)

$\alpha + a = \pi$

Ma l'area di un triangolo sferico (geodetico) dipende solo dalla somma degli angoli (Harriot, Cavalieri, Girard)

$A = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ $\Rightarrow$ la curvatura gaussiana è invariante per isometrie

v. anche oltre...



Trasporto parallelo (Levi-Civita)

Discussione euristica (si può omettere)

$f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ — x, $x+h$ — trasliamo.

$$(T_h f)(x) = f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \dots$$

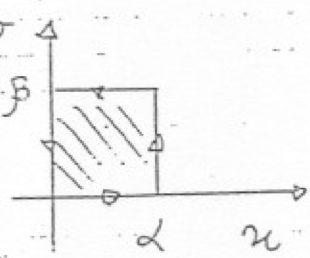
$\Rightarrow \frac{d}{dx}$ = operatore di "traslazione infinitesima"
$\equiv$ generatore del gruppo delle traslazioni

$$(T_h f)(x) \approx \left[\left(I + h\frac{d}{dx}\right) f\right](x)$$

piccolo

$$T_h = \exp\left(h\frac{d}{dx}\right)$$

Usiamo ∇ : traslare con ∇ $\equiv$ trasporto parallelo



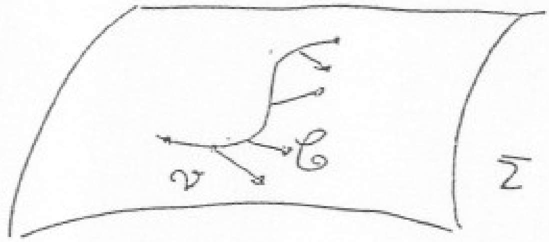
$$\left(1 + \alpha\nabla_u + \tfrac{1}{2}\alpha^2\nabla_u^2\right)\left(1 + \beta\nabla_v + \tfrac{1}{2}\beta^2\nabla_v^2\right)$$
$$-\left(1 + \beta\nabla_v + \tfrac{1}{2}\beta^2\nabla_v^2\right)\left(1 + \alpha\nabla_u + \tfrac{1}{2}\alpha^2\nabla_u^2\right)$$

$=$ (conservando i termini del 2° ordine)

$$I + \alpha\beta\,[\nabla_u, \nabla_v] + \dots$$

curvatura $\equiv$ misura della non commutatività delle derivate covarianti = "rotazione infinitesima di un vettore trasportato su un circuito "infinitesimo" chiuso

☆ Trasporto parallelo



$\mathcal{C} : I \to \mathbb{R}^3$

$\quad t \to \underline{\alpha}(t)$

curva sul Σ

$\underline{v} : I \to \mathbb{R}^3$

$\quad t \to \underline{v}(t) \quad , \underline{v}(t) \in T_{\underline{\alpha}(t)}\Sigma$

campo vettoriale su $\mathcal{C}$ (di vettori tangenti a Σ

" $\underline{v}$ è parallelo su $\mathcal{C}$ se

$\frac{\nabla}{dt}\underline{v} = 0$ ☆ $\boxed{\langle \dot{\underline{v}} \mid \underline{r}_u \rangle = \langle \dot{\underline{v}} \mid \underline{r}_v \rangle = 0}$

$(\underline{r}_u = \underline{r}_u(t) \ldots$ etc$)$ ovvero $\boxed{\dot{\underline{v}} \perp T_{\underline{\alpha}(t)}\Sigma}$ $\forall t$.

Dato $v_0 \in T_{\underline{\alpha}(0)}$, si può definire il trasporto parallelo di v_0 lungo $\mathcal{C}$ tramite

Osservazione. La condizione di parallelismo non dipende da t ...

ciò eq. a risolvere un problema di Cauchy per un sistema di equazioni diff. lineari del 1° ordine

ovvero $\exists!\ \underline{v} = \underline{v}(t)$ su $\mathcal{C}$, $\underline{v} \in T\Sigma$, $\underline{v}$ parallelo su $\mathcal{C}$, con $\underline{v}(0) = \underline{v}_0$

☆ Il trasporto parallelo conserva i prodotti scalari (e quindi le lunghezze e gli angoli... ovvero: siano dati $\underline{v}$ e $\underline{w}$ paralleli; allora

$$\frac{d}{dt}\langle \underline{v} \mid \underline{w} \rangle = \langle \dot{\underline{v}} \mid \underset{\in T\Sigma}{\underline{w}} \rangle + \langle \underline{v} \mid \underset{\in T\Sigma}{\dot{\underline{w}}} \rangle = 0 \qquad \square$$

Nel piano viene riprodotta l'usuale nozione di parallelismo:

$$\langle \dot{\underline{v}} \mid \underset{r_v}{r_u} \rangle = 0$$

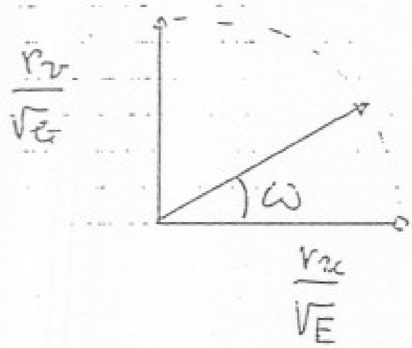
$$\Rightarrow \dot{\underline{v}} = 0 \Rightarrow \underline{v} = \text{costante}$$

(attenzione ...)

Sia ora $\|\underline{v}\| \equiv 1$ e $F = \langle \underline{r}_u \mid \underline{r}_v \rangle = 0$

$$\underline{v} = v_1 \underline{r}_u + v_2 \underline{r}_v =$$

$$= \cos\omega \frac{r_u}{\sqrt{E}} + \sin\omega \frac{r_v}{\sqrt{G}}$$



Si calcoli $\dot{\underline{v}}$ e si imponga la condizione di parallelismo(*); risulta

$$\sin\omega \left(-\dot{\omega}\sqrt{E} + \frac{1}{\sqrt{G}} \langle \underline{r}_u \mid \dot{\underline{r}}_v \rangle \right) = 0$$

$$\cos\omega \left(\dot{\omega}\sqrt{G} + \frac{1}{\sqrt{E}} \langle \dot{\underline{r}}_u \mid r_v \rangle \right) = 0$$

$\Rightarrow$ (ricordando che $F = 0$ ...)

$$\langle r_u, r_{vu}\dot{u} + r_{vv}\dot{v} \rangle = \underbrace{\langle r_u, \underline{r}_{vu} \rangle}_{\frac{1}{2}E_v} \dot{u} + \underbrace{\langle r_u, \underline{r}_{vv} \rangle}_{[\underset{0}{F_v} - \langle r_{uv}, \underline{r}_v \rangle]} \dot{v}$$

$$\boxed{\dot{\omega} = \frac{1}{\sqrt{EG}} \langle \underline{r}_u \mid \dot{\underline{r}}_v \rangle} = \frac{1}{2}E_v \dot{u} - G_u \dot{v}$$

$$\boxed{= \frac{1}{\sqrt{EG}} \cdot \frac{1}{2} \cdot (E_v \dot{u} - G_u \dot{v})}$$

(*) Dettagli

sono versori

$$v = \cos w \frac{r_u}{\sqrt{E}} + \sin w \frac{r_v}{\sqrt{G}}$$

importante, per semplificare il calcolo

$$\dot{v} = -\sin w \cdot \dot{w} \frac{r_u}{\sqrt{E}} + \cos w \left(\frac{r_u}{\sqrt{E}}\right)^{\circ} \sim \text{ è } \perp \frac{r_u}{\sqrt{E}} \Rightarrow \perp r_u$$

$$+ \cos w \, \dot{w} \frac{r_v}{\sqrt{G}} + \sin w \left(\frac{\dot{r}_v}{\sqrt{G}}\right) \sim \text{ è } \perp \frac{r_v}{\sqrt{G}} \Rightarrow \perp r_v$$

imponiamo la condizione di parallelismo

(1) $\langle \dot{v}, r_u \rangle = 0$

(2) $\langle \dot{v}, r_v \rangle = 0$

si ricordi che si è supposto $F = \langle r_u, r_v \rangle = 0$

(1)

$$-\sin w \, \dot{w} \sqrt{E} + \sin w \frac{\langle \dot{r}_v, r_u \rangle}{\sqrt{G}} = 0$$

$$\sin w \left[-\dot{w}\sqrt{E} + \frac{1}{\sqrt{G}} \langle r_u, \dot{r}_v \rangle \right] = 0$$

ecc.

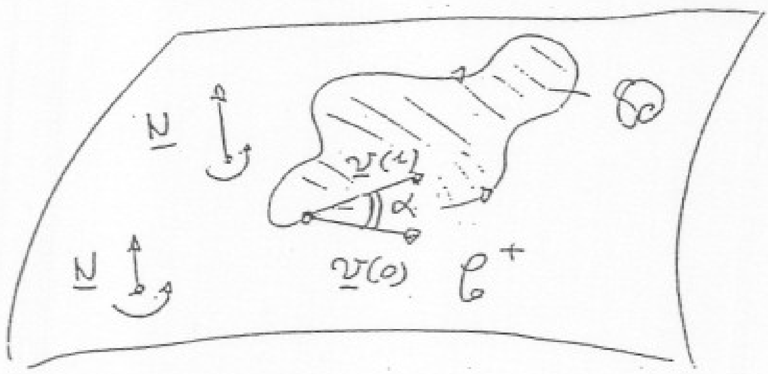
(2) è analoga!

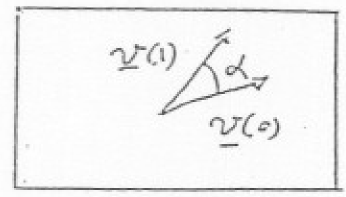
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{r_v}{\sqrt{G}}\right) = \frac{\dot{r}_v \sqrt{G} - r_v \frac{1}{2\sqrt{G}} \dot{G}}{G} = \frac{\dot{r}_v}{\sqrt{G}} - r_v \frac{\dot{G}}{2G^{3/2}}$$

$$\left\langle \frac{d}{dt}\left(\frac{r_v}{\sqrt{G}}\right), r_u \right\rangle = \frac{\langle \dot{r}_v, r_u \rangle}{\sqrt{G}}$$

Formula di Levi Civita

Sia ora $\mathcal{C}$ chiusa (e orientata in modo naturale) $(I=[0,1])$
frontiera (completa) di $\mathcal{D}$





$$\alpha = \int_0^1 \dot{\omega}\, dt = \int_{\mathcal{C}^+} d\omega = -\frac{1}{2} \cdot \int_{\mathcal{C}^+} \left(-\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\, du + \frac{G_u}{\sqrt{EG}}\, dv \right)$$

$$\overset{\text{(Green)}}{=} -\frac{1}{2} \iint_{\mathcal{D}} \left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right)_u \right] du\, dv =$$

$$= \iint_{\mathcal{D}} K \sqrt{EG}\, du\, dv = \iint_{\mathcal{D}} K\, d\sigma$$

$$\boxed{\alpha = \iint_{\mathcal{D}} K\, d\sigma}$$

formula di Levi Civita

(cf. la discussione euristica sul trasporto parallelo...
... si "infinitesimalizzi" la formula di Levi Civita...)

Ancora sul trasporto parallelo

Sia $\underline{v}(t) = v^1(t)\,\underline{r}_u + v^2(t)\,\underline{r}_v$ $\qquad (\underline{r}_u = r_u(t)$ etc.$)$

Da $\langle \dot{\underline{v}} \mid \begin{matrix} r_u \\ \underline{r}_v \end{matrix} \rangle = 0$

si ha osservato che $\dot{\underline{v}} = \dot{v}^1\,\underline{r}_u + \dot{v}^2\,\underline{r}_v +$

$+ v^1\,\dot{\underline{r}}_u + v^2\,\dot{\underline{r}}_v \ldots$

$$\boxed{\dot{v}^i\, g_{ij} + v^i \underbrace{\alpha_{ij}}_{\langle \dot{\underline{r}}_i\, r_j \rangle} = 0} \qquad \begin{matrix} i = 1,2 \\ j = 1,2 \end{matrix}$$

(convenzione di Einstein)

ora, è $\dot{\underline{r}}_i = \underline{r}_{ij}\, \dot{u}^j$ $\qquad \begin{pmatrix} u = u^1 \\ v = u^2 \end{pmatrix}$

e $\langle \underline{r}_{ij} \mid \underline{r}_k \rangle = \ldots \Gamma^l_{ij}\, g_{lk}$

$$\boxed{\dot{v}^r = \dot{u}^l v^j\, \Gamma^r_{lj} = 0 \qquad r = 1,2}$$

$$\boxed{\dot{v}^l\, g_{lk} + v^i\, \dot{u}^j\, \Gamma^l_{ij}\, g_{lk} = 0} \qquad k = 1,2$$

eq. trasporto parallelo

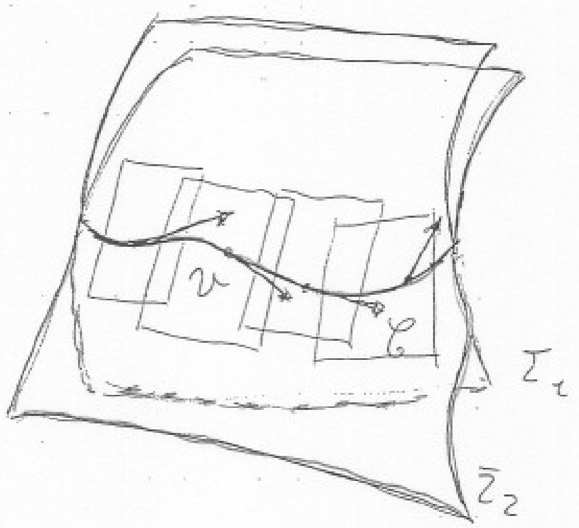
(Sistema di eq. diff. lineari omogenee del 1° ordine
(... vale il teorema di Cauchy ...

(moltiplicando per (g^{ij}) ...

v. anche oltre, pag. XI - 21

☆ Ancora sul trasporto parallelo:

☆☆ interpretazione geometrica (è l'idea originale di Levi-Civita ☆☆☆)



Siano Σ_1, Σ_2 tangenti lungo $\mathcal{C}$

☆ Il trasporto parallelo lungo $\mathcal{C}$ è allora il medesimo per le due superficie.

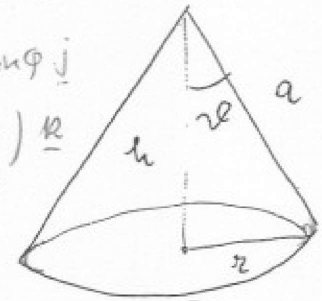
v. anche poco oltre

Applicazione: trasporto parallelo sulla sfera ⟶

Trasporto parallelo sulla Sfera

$h = r \cot \vartheta$

$\underline{r} = \underline{r}(\rho, \varphi) = \rho\cos\varphi\,\underline{i} + \rho\sin\varphi\,\underline{j} + h\left(1 - \frac{\rho}{r}\right)\underline{k}$

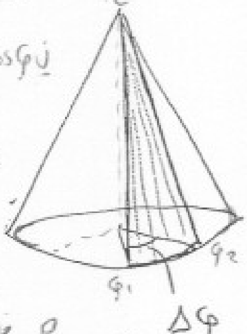


Area laterale di una porzione di cono

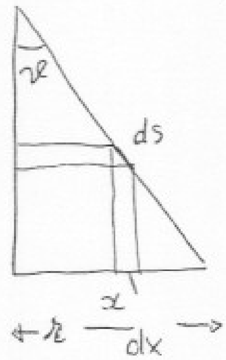
$dA = \Delta\varphi \cdot x \cdot ds =$

$\underline{r}_\rho = \cos\varphi\,\underline{i} + \sin\varphi\,\underline{j} - \frac{h}{r}\underline{k}$

$\underline{r}_\varphi = -\rho\sin\varphi\,\underline{i} + \rho\cos\varphi\,\underline{j}$



$= \frac{\Delta\varphi}{\sin\vartheta}\, x\, dx$



$\frac{1}{2}a^2\beta = 2\pi r \frac{a}{2}$

$a\beta = 2\pi r$

$\beta = 2\pi \frac{r}{a} = 2\pi \sin\vartheta$

$E = 1 + \cot^2\vartheta$

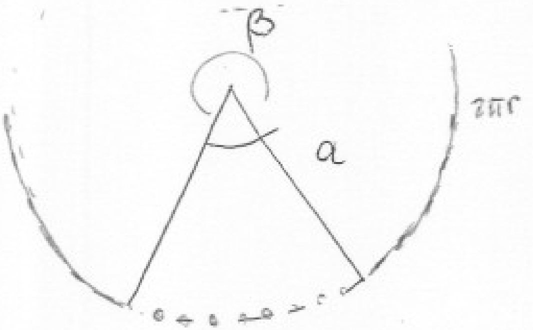
$G = \rho^2$

$\sqrt{EG} = \underbrace{\sqrt{1+\cot^2\vartheta}}_{\frac{1}{\sin\vartheta}}\, \rho$

$\Rightarrow \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_0^r \sqrt{EG}\, d\rho\, d\varphi =$

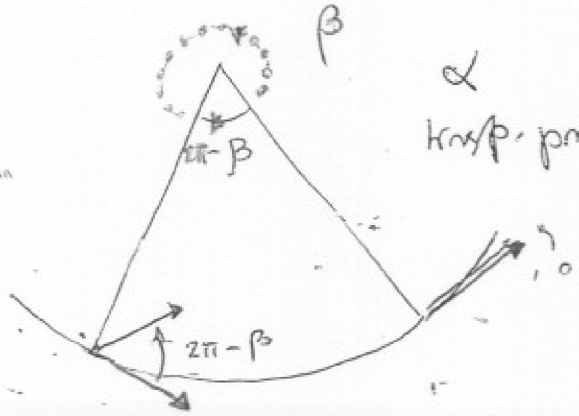
$$\Rightarrow A = \Delta\varphi \cdot \frac{1}{\sin\vartheta} \cdot \frac{r^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \beta$$

$$= \frac{1}{2}\frac{r^2}{(\sin\vartheta)^2}\,\beta$$



$$\Rightarrow \boxed{\beta = \sin\vartheta \cdot \Delta\varphi}$$

Sia $\Delta\varphi = 2\pi \Rightarrow \beta = 2\pi \sin\vartheta$



$\underset{\text{trasp. par.}}{\alpha} = 2\pi - \beta$

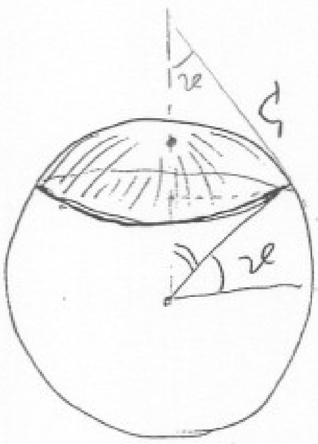
$= 2\pi(1 - \sin\vartheta)$

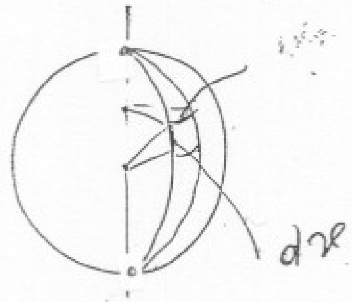
se $\vartheta \to 0$

$2\pi - \beta \to 2\pi \qquad \beta \to 0$

Ma

area calotta : C_1





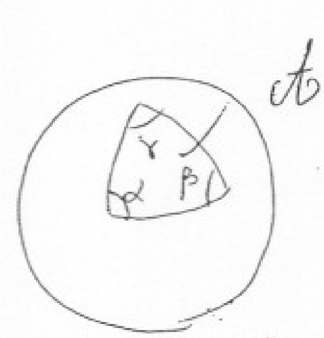
$$C_1 = 2\pi \int_{\vartheta}^{\frac{\pi}{2}} \cos\tilde{\vartheta} \, d\tilde{\vartheta} = 2\pi(1 - \sin\vartheta)$$

$$= 2\pi - \beta$$

caso particolare : $\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 2\pi$
= area semisfera

In accordo con la formula generale di Levi-Civita

Dare una dim. diretta, per la sfera, di $\alpha + \beta + \gamma - \pi = A$ (area)

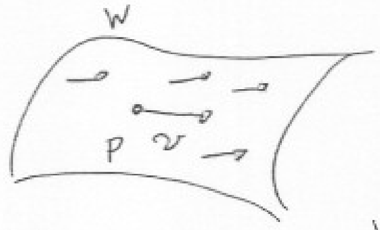


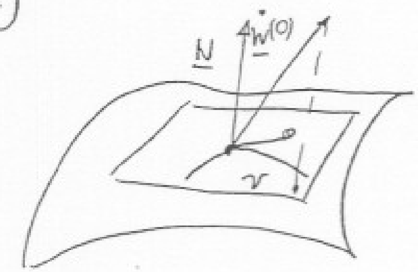
Cavalieri	1638
Girard	1625
Harriot	1603

Approfondimenti

(d) Derivata covariante (su Σ)

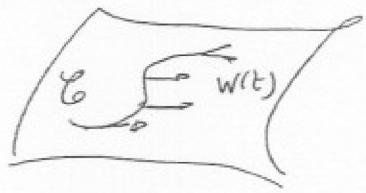
① $(\nabla_v W)(p)$ $\quad W \in \mathfrak{X}(\Sigma)$





estensioni

③

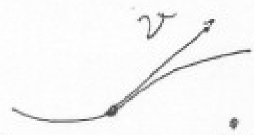


② $\nabla_X Y$ $\quad X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma)$

$\nabla_{\dot\alpha} W$ $\quad$ W def. su $\mathcal{C}$: $\alpha = \alpha(t)$

◊ ◊ ◊ ◊ ——

① Sia



$\mathcal{C}: \underline{r} = \underline{r}(t)$ $\quad \mathcal{C}$ $\quad \dot{\underline{r}}(0) = v$

$\underline{W}(x,v) := w^i \underline{r}_i$ $\qquad \underline{r}_i \equiv \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i} \equiv \underline{r}_{\frac{\partial}{\partial x_i}}$

campo vettoriale $\equiv w^i(x,v)\, \underline{r}_i(x,v)$

(convenzione di Einstein)

restringendo a $\mathcal{C}$: otteniamo $\underline{W}(t) \equiv$

$w^i(x(t), v(t))\, \underline{r}_i(x(t), v(t))$

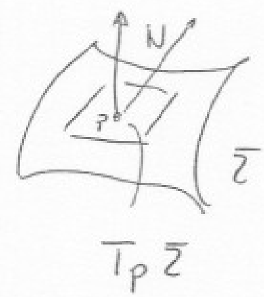
Consideriamo $\quad \dot{\underline{w}}(0) = \left.\dfrac{d\underline{w}}{dt}\right|_{t=0}$

È un vettore in $\mathbb{R}^3$, non necessariamente tangente a Σ. La proiezione $\underline{P}_p\, \dot{\underline{w}}(0)$ invece $\in T_p \Sigma$. Per definizione

derivata covariante di W rispetto a v in p

$$\left[(\nabla_v W)(p) = \underline{P}_p\, \dot{\underline{w}}(0) = \right.$$

$$\left. = \dot{\underline{w}}(0) - \langle \dot{\underline{w}}(0), \underline{N}_p \rangle\, \underline{N}_p \right]$$



Il calcolo mostra che essa non dipende da γ tale che $\dot{\underline{r}}(0) = v$

Pertanto è ben definita.

$$\dot{\underline{w}} = \dot{w}^i \underline{r}_i + w^i \dot{\underline{r}}_i =$$

$$= \dot{w}^i \underline{r}_i + w^i \underline{r}_{i,j} \dot{u}^j$$

Christoffel

$$= \dot{w}^i \underline{r}_i + w^i \dot{u}^j \Gamma^k_{ij} \underline{r}_k + \beta N$$

$$= \dot{w}^k \underline{r}_k + w^i \dot{u}^j \Gamma^k_{ij} \underline{r}_k + (\quad - - \quad)$$

$$= \left[\dot{w}^k + w^i \dot{u}^j \Gamma^k_{ij} \right] \underline{r}_k + (\qquad)$$

$$\Rightarrow \quad P_P \, \dot{\underline{w}}(0) = \left[\dot{w}^k + w^i \dot{x}^j \Gamma^k_{ij} \right] \underline{r}_k \quad \Rightarrow \quad \underline{w} \text{ è parallelo lungo } \mathcal{C} \iff$$

$$\boxed{\dot{w}^k + w^i \dot{x}^j \Gamma^k_{ij} = 0} \qquad k = 1, 2$$

si può proseguire: da $\dot{w}^k = w^k_{,j} \, \dot{x}^j$

si trova

☆☆☆ sist. eq. diff. lineare del prim'ordine, univocamente risolubile una volta assegnato un vettore iniziale

in definitiva (☆☆) $v = \dot{\underline{r}}(0) = \underline{r}_i \dot{x}^i(0)$

$$\dot{\underline{w}} = \big[\underbrace{w^k_{,j} \dot{x}^j}_{\dot{w}^k} + w^i \dot{x}^j \Gamma^k_{ij} \big] \underline{r}_k + (\quad)$$

$$= \left\{ \left(w^k_{,j} + w^i \Gamma^k_{ij} \right) \dot{x}^j \right\} \underline{r}_k + (\quad)$$

Dunque

(☆☆) $$(\nabla_v w)(P) = \left\{ \left(w^k_{,j}(P) + w^i(P) \Gamma^k_{ij}(P) \right) \dot{x}^j(P) \right\} \underline{r}_k(P)$$

(lieve abuso di notazione)

(☆☆) ci mostra subito che le osservazioni ② e ③ hanno senso

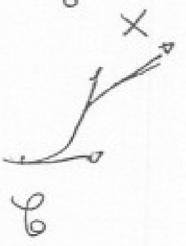
notiamo: $(\nabla_X Y)(P) = (\nabla_{X_P} Y)(P)$ (②)

e, riguardo a ③, che la formula dipende solo dai valori di $\underline{w}$ su $\mathcal{C}$

Conseguenza importante:

$\nabla_X Y\big|_{\mathcal{C}}$ dipende solo da $X|_{\mathcal{C}}$ e $Y|_{\mathcal{C}}$

($X|_{\mathcal{C}}$ tangente a $\mathcal{C}$)



— · — · —

(2) $$(\nabla_X Y)(P) := (\nabla_{X_P} Y)(P)$$

$$\left[\ \nabla_X : \mathcal{X}(\Sigma) \to \mathcal{X}(\Sigma)\ \right]$$

derivata covariante risp a $X \in \mathcal{X}(\Sigma)$

L'applicazione

$$\left[\ \nabla : \quad X \longmapsto \nabla_X\ \right]$$

è detta <u>connessione</u> di <u>Levi Civita</u>

Il <u>tutto si generalizza pari pari ad una</u>
<u>varietà Riemanniana</u>

proprietà generali

Proprietà di ∇_X (∇)

1) linearità : ∇_X è un operatore lineare

$$\nabla_X(\alpha Y_1 + \beta Y_2) = \alpha \nabla_X Y_1 + \beta \nabla_X Y_2$$

$\alpha, \beta \in \mathcal{C}^\infty(S)$

2) "tensorialità in X prop. di modulo"

$$\nabla_{\alpha X + \beta Y} Z = \alpha \nabla_X Z + \beta \nabla_Y Z$$

3) Regola di Leibniz

$$\nabla_X \alpha Y = \underbrace{X(\alpha)} Y + \alpha \nabla_X Y$$

$$X = a(u,v)\, r_u + b(u,v)\, r_v$$

$$X(\alpha) = a(u,v)\frac{\partial \alpha}{\partial u} + b(u,v)\frac{\partial \alpha}{\partial v}$$

$$X(\alpha) = d\alpha(X)$$

proprietà specifiche

Ulteriori proprietà (dip. dal caso specifico)

Riprendendo la formula:

$$\boxed{\nabla_{r_i} r_j = \Gamma_{ij}^{K} r_K}$$

(n) otteniamo da $r_{uv} = r_{vu}$ ($r_{ij} = r_{j,i}$)

Che

1'

$$\boxed{\begin{gathered}\Gamma_{ij}^{K} = \Gamma_{ji}^{K} \\ \nabla_{r_i} r_j = \nabla_{r_j} r_i\end{gathered}}$$

"assenza di torsione"

2' "metricità" "compatibilità con la metrica"

$$\frac{\partial}{\partial u_K} \overset{g_{ij}}{\langle \underline{r}_i, \underline{r}_j \rangle} = \langle \overset{\overset{N}{\curlyvee}}{\underline{r}_{i,K}}, r_j \rangle + \langle \underline{r}_i, \overset{\overset{N}{\curlyvee}}{\underline{r}_{j,K}} \rangle$$

$$= \langle \nabla_{r_K} r_i, r_j \rangle + \langle \underline{r}_i, \nabla_{r_K} r_j \rangle$$

in modo compatto ..

$$d \langle X, Y \rangle = \langle \nabla X, Y \rangle + \langle X \nabla Y \rangle$$

$$\left(Z \langle X, Y \rangle = \langle \nabla_Z X, Y \rangle + \langle X \nabla_Z Y \rangle \right)$$

In astratto $1, 2, 3 + 1', 2'$ caratterizzano la connessione

canonica su una varietà Riemanniana

(Levi-Civita) * osservazione

Applicazione diretta del formalismo:

THEOREMA EGREGIUM