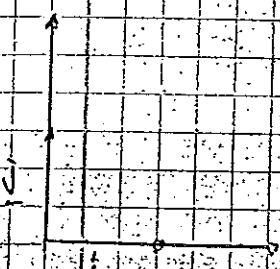




1 - forme differenziali

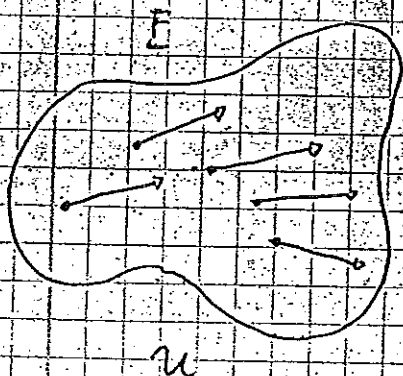
TOPOLOGIA E GEOMETRIA
DIFFERENZIALE - a.a. 2009/10
Prof. M. Spina A1

Potenziali in $\mathbb{R}^2$. Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ una regione
(aperto connesso). Siano $P : U \rightarrow \mathbb{R}$
 $Q : U \rightarrow \mathbb{R}$ funzioni di classe C^1 .



$$\text{Sia } E(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$$

$(x, y) \in U$ un campo
vettoriale definito su U



condiziamo l'espressione

$$\omega = \omega(x, y) :=$$

$$= P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

(1-forma differenziale)

Sia data (su U) una curva γ

orientata generalmente regolare

($\equiv$ regolare a tratti)

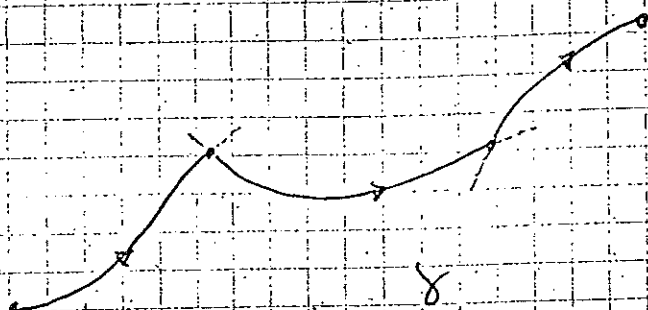
$\star \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ^(continua) γ è detta generalmente

regolare se esiste una partizione di

$[a, b]$, sia $P = \{a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_n = b\}$

$t_i < t_{i+1}$ tale che $\gamma|_{[t_k, t_{k+1}]}$ sia

regolare.



Curve giunamente
regolari.

Definiamo l'integrale curvilineo di ω rispetto a $\gamma + (*)$ (integrale curvilineo di 1^a specie)

che denotiamo con

$$\int_{\gamma +} \omega \quad [(*) \text{ è fissato un orientamento}]$$

Se γ è regolare, possiamo

$$\int_{\gamma +} \omega := \int_a^b \{ P(x(t), y(t)) \dot{x}(t) + Q(x(t), y(t)) \dot{y}(t) \}$$

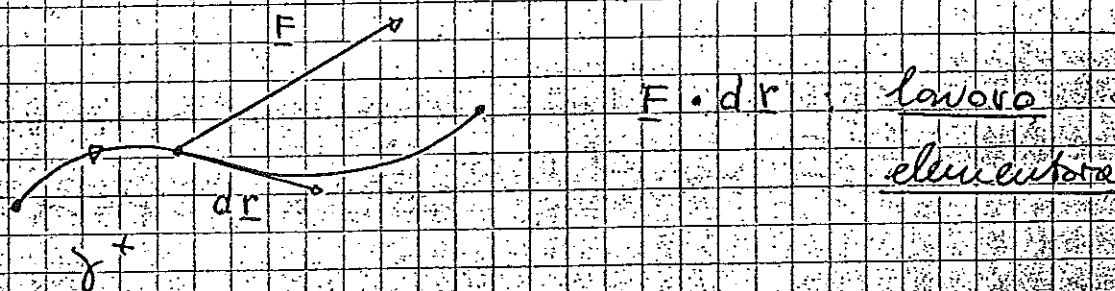
$$(\gamma : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b])$$

In forma più compatta:

$$\int_{\gamma +} \omega = \int_a^b \langle \underbrace{F(x(t), y(t))}_{\underline{r}(t)} | \dot{\underline{r}}(t) \rangle dt$$

o anche $\int_a^b \underline{F} \cdot \underline{\dot{r}} dt$, o $\int_{\gamma^+} \underline{F} \cdot d\underline{r}$

Se $\underline{F}$ è un campo di forze $\int_{\gamma^+} \underline{F} \cdot d\underline{r}$
rappresenta il lavoro di $\underline{F}$ lungo γ^+



★ Se γ^+ è chiuso $\int_{\gamma^+} \underline{F} \cdot d\underline{r}$ prende anche

il nome di circolazione di $\underline{F}$ lungo γ^+

Se γ^+ è quasi regolare si
somma sui singoli tratti in cui è regolare
(non ci sono problemi in quanto i pti
angolosi hanno misura (in $\mathbb{R}$) nulla)

Se γ possiede l'orientamento
opposto γ^- , si ha

$$\int_{\gamma^-} \omega = - \int_{\gamma^+} \omega$$

Facciamo vedere che, fissato un
orientamento, $\int_{\gamma} \omega$ non dipende

dalla parametrizzazione

$$\int_{a'}^{b'} (p' \frac{dx}{dt'} + q' \frac{dy}{dt'}) dt' =$$

$$(x \quad t' = t'(t) \quad \frac{dt'}{dt} > 0, \quad a' \leq t' \leq b' \quad)$$

ecc.

$$\int_{a'}^{b'} (p' \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt'} + q' \frac{dy}{dt} \frac{dt}{dt'}) \frac{dt'}{dt} dt$$

$$= \int_a^b (p \frac{dx}{dt} + q \frac{dy}{dt}) dt$$

4) Dunque il significato di integrazione su una curva regolare γ

4) Come den un significato "diretto" a ω ?

Sia V uno sp. vettoriale reale di dim n
 e sia V^* il suo duale (lo sp. vett. delle
forme lineari su V).

$f \in V^*$ e $f: V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$f(\alpha v_1 + \beta v_2) = \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) \quad \begin{matrix} \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ v_1, v_2 \in V \end{matrix}$$

Dato una base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ di V ,

la base duale $\{e_1^*, e_2^*, \dots, e_n^*\}$ di V^*

è così definita

(Dim $V^* = \dim V = n$)

$$e^*_i(e_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n)$$

Ogni $f \in V^*$ si scrive (in modo unico)

$$\text{come } f = \sum f_i e^*_i$$

$$\text{con } f_i = f(e_i) \quad (\text{ovvio})$$

V e V^* sono isomorfi, ma non in modo canonico: l'isomorfismo dipende dalla scelta della base

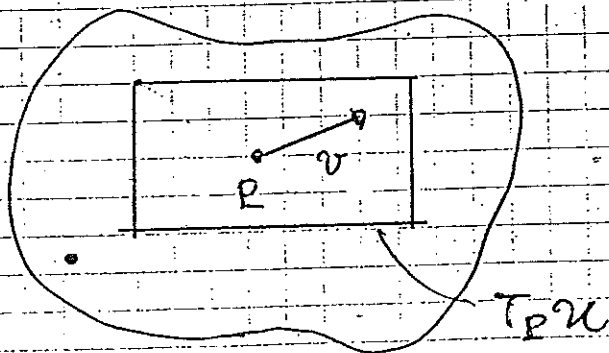
[Sia $V^{**} = (V^*)^*$ il duale di V^*
 $V \cong V^{**}$ in modo canonico (e univoco)]

$\forall v \mapsto v^{**} \in V^{**}$ così definito:

$$\forall f \in V^*, \text{ si pone } v^{**}(f) := f(v)$$

Questa mappa è un isomorfismo, e, come si vede, non dipende dalla scelta di una base!

Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto



$p \in U$ consideriamo lo spazio tangente
 $T_p U \cong \mathbb{R}^2$

★ Formalmente, lo spazio tangente

è generato da $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$

$$\underline{v} = (v_1, v_2) \leftrightarrow v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y}$$

[Data una trasf. prima regolare $(a, y) \mapsto (u, v)$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

(calcolare
prima per $\frac{\partial f}{\partial u}$)

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

ovvero (omettendo f): $(a, y) \mapsto (u, v)$
e $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

matr. jacobinica trasposta

★

spazio tangente in un pto

= spazio delle derivazioni

(~~X~~ derivazione $X : \mathcal{C}^\infty(V) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(V)$)

• $X(\alpha f + \beta g) =$ lineare
RiP

$= \alpha X(f) + \beta X(g)$ lineare

• $X(fg) = X(f)g + fX(g)$ (Leibniz)

AC - 6 -

Si prova che ∂_i fanno

$$X = v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y}$$

(a rigore si dovrebbe scrivere $\frac{\partial}{\partial x} \Big|_p$ etc.)

Chi + da?

★ $\{dx, dy\}$ + la

base duale di $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ sul

double $T_p^*(U)$ dello spazio tangente
 $T_p(U)$

$T_p^*(U)$ + spazio cotangente (o $\mathbb{R}$)

★ Questo dà senso alla localizzazione
(in molti testi di analisi)

" $dx = \Delta x$ " etc.

Infatti se $\underline{v} = \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y}$ ($\Delta x, \Delta y \in \mathbb{R}$)

Si ha

$$dx(\underline{v}) = \Delta x$$

$$dy(\underline{v}) = \Delta y$$

$$T\mathcal{U} := \bigcup_{P \in \mathcal{U}} T_P(\mathcal{U})$$

è detto fibrato tangente (associato a $\mathcal{U}$)

$$T^*\mathcal{U} := \bigcup_{P \in \mathcal{U}} T_P^*(\mathcal{U})$$

è detto fibrato cotangente (associato a $\mathcal{U}$)

un pto di $T\mathcal{U}$ è dunque una coppia (P, v_P) $P \in \mathcal{U}, v_P \in T_P(\mathcal{U})$

un pto di $T^*\mathcal{U}$ è una coppia

$$(P, v_P^*) \quad P \in \mathcal{U}, v_P^* \in T_P^*(\mathcal{U})$$

(*) una mappa $S: \mathcal{U} \rightarrow T\mathcal{U}$ tale che

$$S(P) = v_P \in T_P(\mathcal{U}) \quad \forall P \in \mathcal{U} \quad \text{e}$$

è detta coppia vettoriale

(è una "sezione" del fibrato tangente)

(*) una mappa $S: \mathcal{U} \rightarrow T^*\mathcal{U}$ tale che

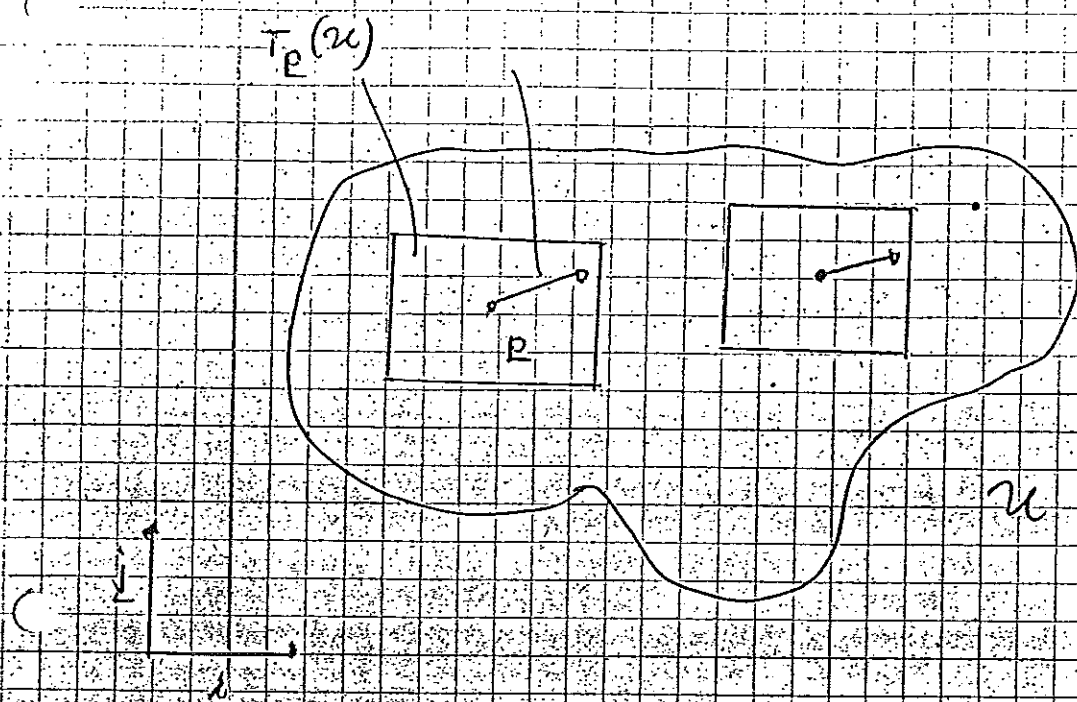
$$S(P) = v_P^* \in T_P^*(\mathcal{U}) \quad \forall P \in \mathcal{U} \quad \text{e}$$

è detta 1-forma di presuride

(è una "sezione" del fibrato cotangente)

(*) lascia, ovvio $\mathbb{C}^0 \dots$

$$E = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y} = P(x, y) \underline{i} + Q(x, y) \underline{j}$$



$$\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

(stessa forma, con $T_P^*(U) \dots$)

[$\star$ $\{dx, dy\}$ generano il $\mathcal{E}^0(U)$ - mod

delle 1^a forme di perenni ($\mathcal{E}^0(U)^*$) $\equiv \Lambda^1(U)$

non costituiscono una base delle forme di perenni (come sp. vettoriali),

[ma $dx|_P$ $dy|_P$ invece costituiscono

una base di $T_P^*(U) \dots$]

$\star$) $\Lambda^1(U)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$: e inoltre

$$\omega \in \Lambda^1(U) \Rightarrow f\omega \in \Lambda^1(U), (\omega f) \in \Lambda^1(U)$$

dove $f \in \mathcal{E}^0(U) \equiv$ funzioni $\mathcal{E}^0$ su U .

$$f(\omega_1 + \omega_2) = f\omega_1 + f\omega_2, (f+g)\omega = f\omega + g\omega$$

$$\Lambda^1 - \mathcal{G} -$$

$$f(g\omega) = (fg)\omega - g\omega$$

Osservare che

$$(x, y) \leftarrow (u, v)$$

A

$$\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

Confrontandola con

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \\ \frac{\partial}{\partial v} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix} = (A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

★

$$\Rightarrow \text{vettori tangenti} = \text{vettori contravarianti}$$

$$\text{covarianti} = \text{vettori covarianti}$$

⇒ ★★ Distinguo lo spazio tangente dal
cotangente somministrando le loro
diverse leggi di trasformazione.

★ Tali combinazioni si stabiliscono in modo naturale alle R-forme ... (vedi oltre)

★ Definizione Sia ω una 1-forma

def. su $U \subset \mathbb{R}^2$ (aperto) e di classe

$$C^1: \quad \omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$$

$$\text{e } P, Q \in C^1(U)$$

• ω si dice esatta se $\exists f \in C^2(U)$ tale che

$$P = f_x \quad Q = f_y \quad \Rightarrow$$

$$\omega = f_x dx + f_y dy \equiv df$$

• ω si dice chiusa se

$$P_y = Q_x \quad (\text{in } U)$$

Ovviamente (teorema di Schwarz...)

★ ω esatta $\Rightarrow$ ω chiusa

(il viceversa è falso in generale, vero sotto opportune ipotesi su U ... vedi oltre)

Se $F \rightarrow \omega$ è un campo di forze

l'esistenza di ω esprime il fatto che

★ F è conservativa e f è chiamata
funzione potenziale (o semplicemente
potenziale)

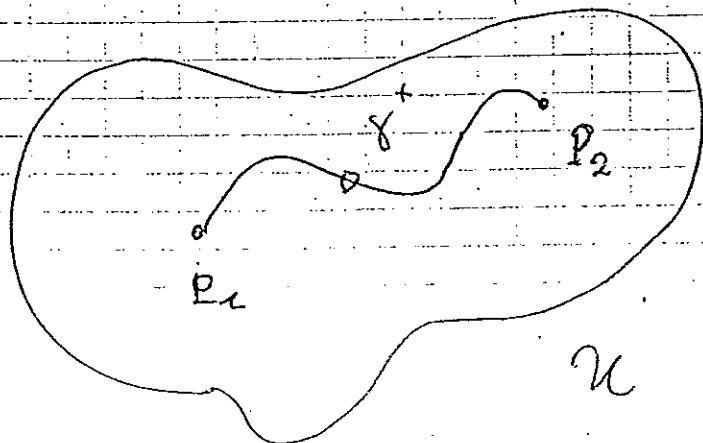
Se U è connesso, è chiaro che

★ f è determinata a meno di una costante
(vedi disp. 4)

★ Teorema fondamentale del calcolo
(generalizzato)

Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto e connesso per
archi, sia $\varphi \in \mathcal{C}^1(U)$ e sia

γ ^{quadrato} una curva generalmente regolare, orientata,
congiungente due punti fissati P_1 e P_2 ,
 $U \cap \gamma$ (una tale curva esiste sempre...)



Allora

$$\varphi(P_2) - \varphi(P_1) = \int_{\gamma^+} d\varphi$$

Dim.

Si fa vedere la generalità in proposizione

γ regolare ...

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$t \mapsto \gamma(t)$$

Poriamo

$$\Phi(t) := \varphi(\gamma(t))$$

$$\begin{cases} \gamma(a) = P_1 \\ \gamma(b) = P_2 \end{cases}$$

Si ha ($t \in [a, b] \dots$)

$$\Phi'(t) = \langle \nabla \varphi(\gamma(t)) | \dot{\gamma}(t) \rangle$$

Per il teorema fondamentale del
calcolo si

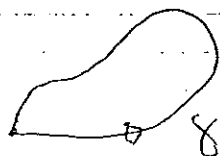
$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \Phi'(t) dt \quad \text{ovvero}$$

$$\varphi(P_2) - \varphi(P_1) = \int_a^b \langle \nabla \varphi(\gamma(t)) | \dot{\gamma}(t) \rangle dt$$

$$= \int_{\gamma^+} d\varphi \quad \square$$

★ Corollario

$$\gamma \text{ chiusa} \Rightarrow \int_{\gamma} d\varphi = 0$$



□

★ Commento gli ultimi due risultati

hanno un'unica interpretazione fisica ...
 Il lavoro compiuto da una forza conservativa
 dipende solo dagli estremi di un cammino...

★ Teorema sia $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto e

connesso per archi ($\equiv$ aperto e connesso)

sia ω 1-forma di classe C^1

$$\omega \text{ è esatta} \iff \int_{\gamma} \omega = 0$$

γ chiusa e generalmente è globale

$\Rightarrow$ è stato già dimostrato.

Dim. $\Leftarrow$ Sia $P_0 \in U$ fissato.

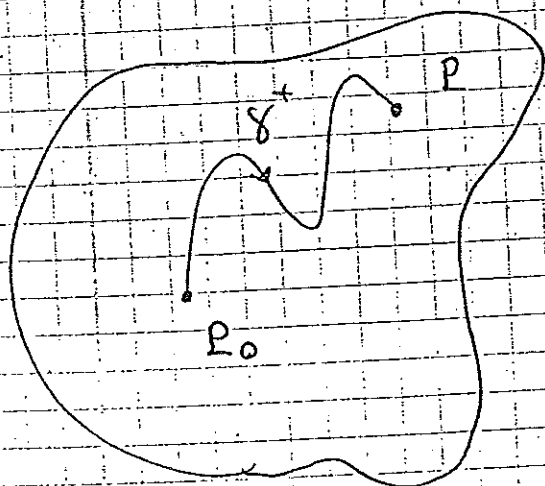
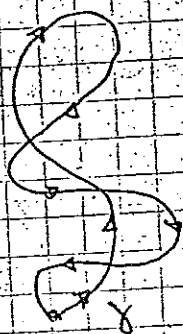
$\forall P \in U$ poniamo

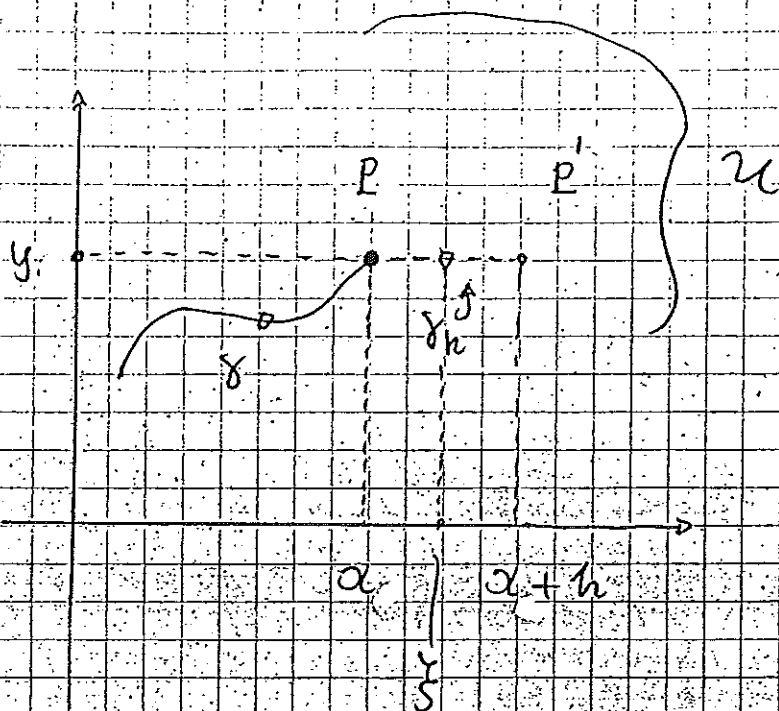
$$\varphi(P) := \int_{\gamma^+} \omega$$

γ^+ per. retto con fine punto
 P_0 a P .

★ φ è ben definita
 per ipotesi

con riferimento alla figura





δh è suff.
piccolo, $P' \in U$
(poiché U è aperto)

$$\gamma_h: \begin{cases} x = t & t \in [\alpha, \alpha+h] \\ y = y \end{cases}$$

posto $\omega = f(x, y) dx + Q(x, y) dy$

Dimostriamo che

$$\varphi_x = f \quad \varphi_y = Q$$

Proviamo solamente la prima condizione:

$$\frac{\varphi(P') - \varphi(P)}{h} = \dots = \frac{1}{h} \int_{\gamma_h} \omega =$$

$$= \frac{1}{h} \int_{\alpha}^{\alpha+h} f(t, y) dt = (\text{la prima eq})$$

$$= f(\xi, y) \rightarrow f(x, y)$$

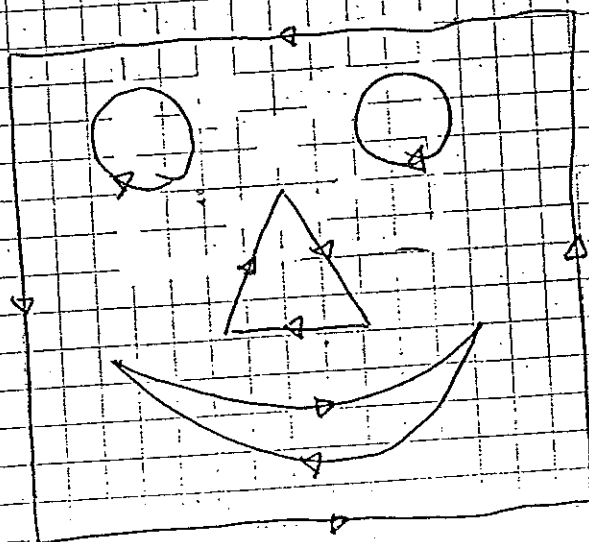
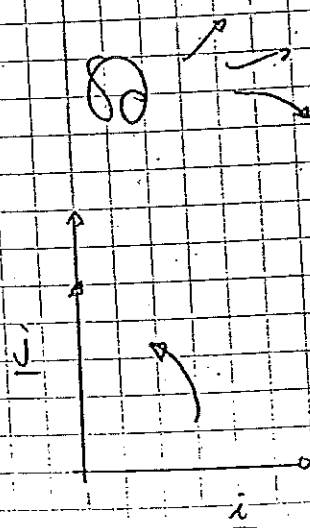
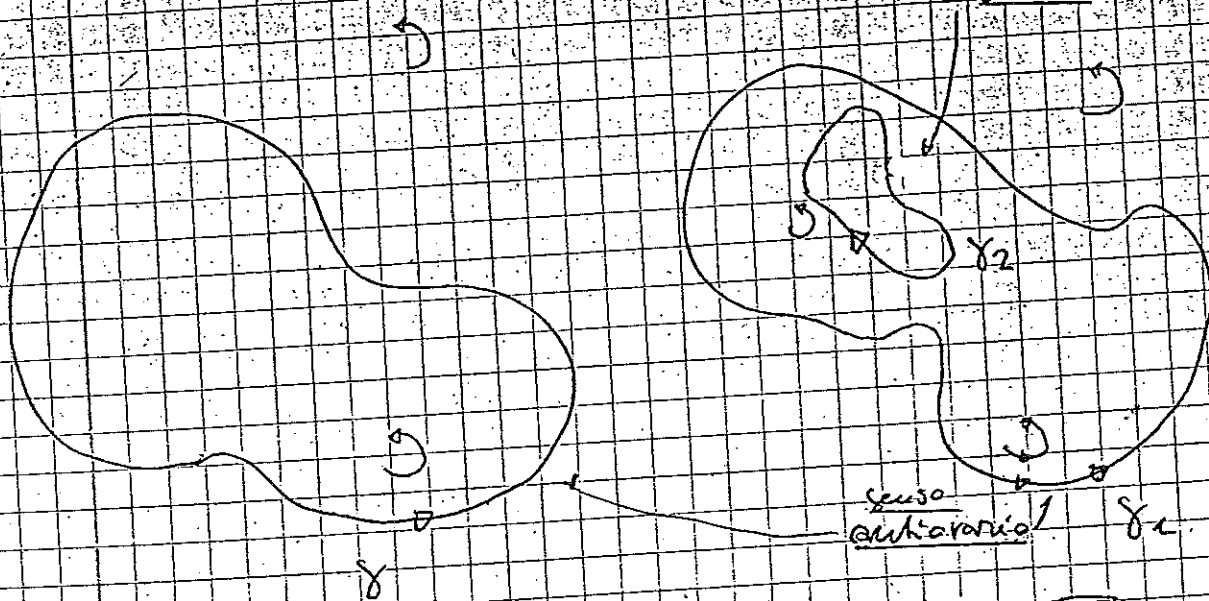
$$\text{e } h \rightarrow 0 \dots$$

□

Di fondamentale importanza è il

⚡⚡ Teorema di Green

Sia Ω un dominio di $\mathbb{R}^2$, connesso
 tale che la sua frontiera sia un'unione
 di curve generalmente regolari, orientate
 nel senso dell'orientamento adatto da quello
 del piano (vedi figure...)



Sia ω una 1-forma diff.

$$\in \mathcal{C}^1(\Omega) \quad \Omega \supset \mathbb{R}^2$$

$$\omega = P dx + Q dy$$

Se γ denota l'unione delle curve

contribuenti la frontiera di Ω , orientate
come sopra, si ha

$$\int_{\gamma^+} \omega = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

(tutta somma
di integrali...)

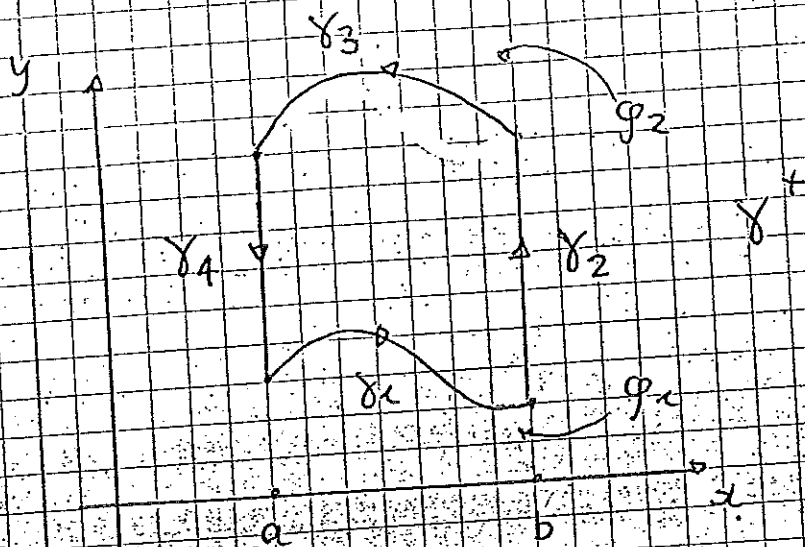
$$\gamma^+ \equiv \partial \Omega^+$$

$$\left(\equiv \iint_{\Omega^+} d\omega \right)$$

come vedremo

Dica. Dimostreremo solo un caso
molto particolare della formula, accennando
poi rapidamente alla dimostrazione nel caso
generale.

★ Sia Ω un dominio normale rispetto
all'asse x , e sia $Q \equiv 0$



$$\gamma^+ = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$$

$$\int_{\gamma^+} P d\alpha = \sum_{i=1}^4 \int_{\gamma_i} P d\alpha = \dots$$

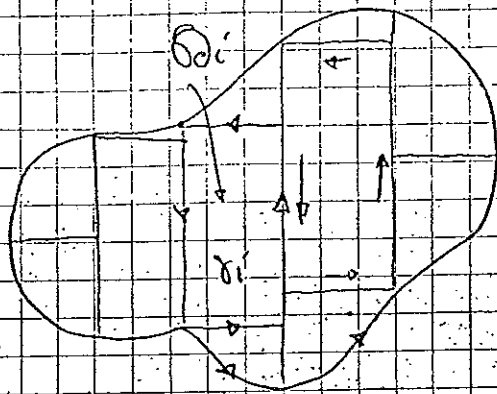
$$\dots = \int_a^b P(\alpha, \varphi_1(\alpha)) d\alpha - \int_a^b P(\alpha, \varphi_2(\alpha)) d\alpha$$

$$= \int_a^b [P(\alpha, \varphi_1(\alpha)) - P(\alpha, \varphi_2(\alpha))] d\alpha$$

$$= \iint_{\gamma^+} \frac{\partial P}{\partial y} d\alpha dy = - \int_a^b d\alpha \int_{\varphi_2(\alpha)}^{\varphi_1(\alpha)} \frac{\partial P}{\partial y}(\alpha, y) dy$$

$$= - \int_a^b [P(\alpha, \varphi_2(\alpha)) - P(\alpha, \varphi_1(\alpha))] d\alpha \quad \square$$

(Analogo anche per $P \equiv 0$ e ∂ normale rispetto all'area)



In generale si divide, tramite "tagli" opportuni, il dominio in domini normali rispetto a entrambi gli assi.

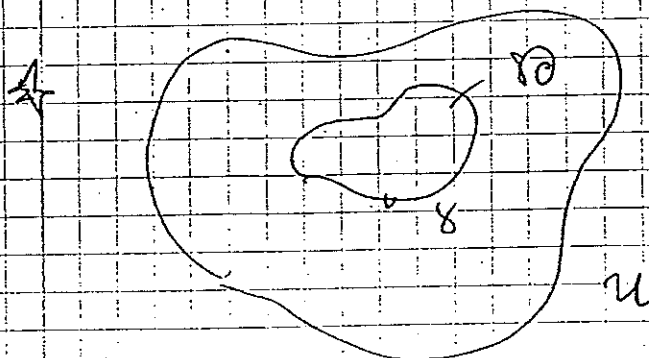
gli integrali dopp. si sommano...

gli integrali di linea lungo le linee interne si cancelano a due a due



e rimane solamente l'integrale sulla frontiera ... $\square$

assumiamo alcune conseguenze della formula di Green



se w è chiusa

$$\text{e se } \gamma = \partial \Omega \dots$$

$$\int_{\gamma} w = 0$$

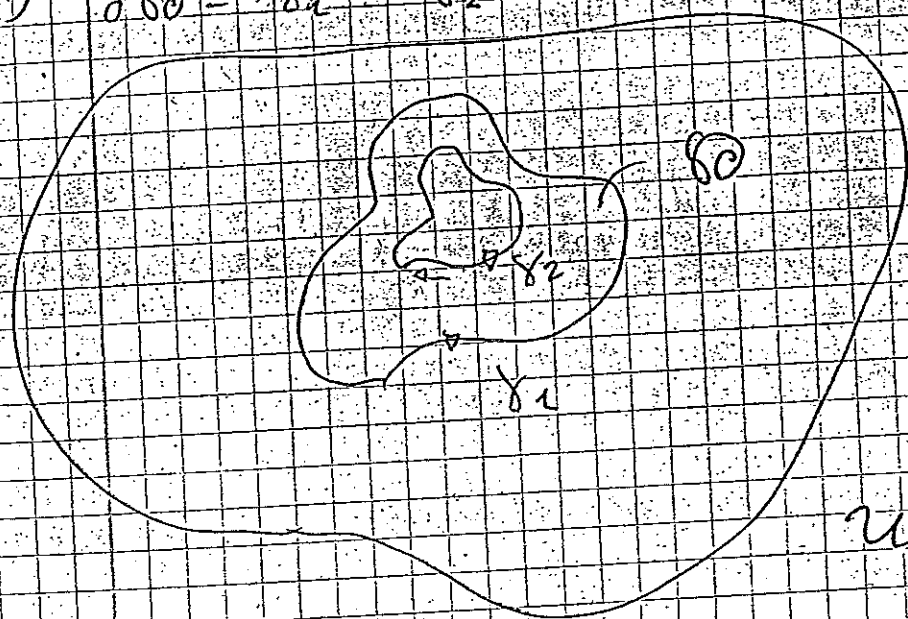
Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto e connesso

Def. γ_1 e γ_2 (curve giunemente regolari orientate) si dicono omologhe se

cofinuiscono la frontiera di un dominio Ω in U (*). Si scrive in tal caso $\gamma_1 \sim \gamma_2$

(è una relazione di equivalenza)

$$(*) \quad \partial \Omega = \gamma_1 \cup \gamma_2^- \quad (\equiv \gamma_1 - \gamma_2)$$



Se $\gamma = \partial \Omega$

si dice che

" γ è omologa a

0"

$$\gamma \sim 0$$

Proposizione Con le notazioni precedenti... γ e ω è chiusa e

$\gamma_1 \sim \gamma_2$, allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Dim. ovvia, dal Teorema di Green (vale anche se $\gamma \sim 0$...)

osserviamo anche che $\forall \gamma$ chiusa
 gen. regolare si

$$\int_{\gamma} \omega + df = \int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma} df = 0$$

[$\Lambda^k(\mathcal{U}) = \{ \text{forme differenziali in } \mathcal{U} \}$
 (di classe C^k)]

Siano $\omega_1, \omega_2 \in \Lambda^k(\mathcal{U})$, chissà

(*) ω_1 e ω_2 si dicono coomologhe
 se $\omega_1 - \omega_2 = df$ per qualche f

Scriviamo in tal caso $\omega_1 \sim \omega_2$

ω è esatta se $\omega \sim 0$ (1-forma $= 0$)

Se γ è una curva chiusa gen. regolare si ha

$$\int_{\gamma} \omega_1 = \int_{\gamma} \omega_2$$

Quindi: se γ è chiusa e ω è chiusa

*** $\int_{\gamma} \omega$ dipende solo da $[\gamma]$

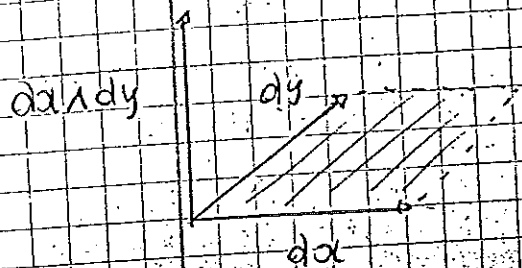
(classe di omologia di γ)

e solo da $[\omega]$

(classe di coomologia di ω)

(Riprendiamo la formula di Green)

Sia $dx \wedge dy$ l'elemento d'area orientato
(2-forma)



$$dx \wedge dy := \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du \wedge dv$$

(trasforma di coordinate quadratiche)

$$\left(\begin{array}{l} dx \wedge dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du \wedge dv \\ \text{el. d'area} \end{array} \right)$$

$$\text{Si ha } dy \wedge dx = - dx \wedge dy \quad \text{antisimmetria}$$

$$\Rightarrow dx \wedge dx := \frac{\partial(x, x)}{\partial(u, v)} du \wedge dv = 0$$

$$dy \wedge dy = 0$$

★ In generale, una 2-forma in $u \in \mathbb{R}^2$

è un'espressione del tipo

$$\text{(consideriamo tutto } \mathbb{R}^n \dots) \quad f(x, y) dx \wedge dy \quad (\text{mot: } \Lambda^2(u))$$

una 0-forma in $u \in \mathbb{R}^2$ è

semplicemente una funzione. $(\equiv \Lambda^0(u))$

★ Vogliamo costruire

$$d: \Lambda^1(u) \rightarrow \Lambda^2(u)$$

derivazione esterna

In analogia a

$$d : \Lambda^0(u) \rightarrow \Lambda^1(u)$$

$$f \mapsto df = f_x dx + f_y dy$$

Imponendo ovvie proprietà di linearità
compatibilità con tale d :

si deve ottenere

$$d\omega = d(Pdx + Qdy) =$$

$$= d(Pdx) + d(Qdy) :=$$

$$dP \wedge dx + dQ \wedge dy =$$

↗
è una
funzione...

$$= (P_x dx + P_y dy) \wedge dx +$$

$$+ (Q_x dx + Q_y dy) \wedge dy =$$

$$= \dots = (Q_x - P_y) dx \wedge dy$$

★ Osserviamo che $d^2 : \Lambda^0(u) \rightarrow \Lambda^2(u)$

è nullo : $d^2 = 0$

$$d(df) = \dots (\text{Schwarz}) = 0$$

★ Il teorema di Green prende la forma

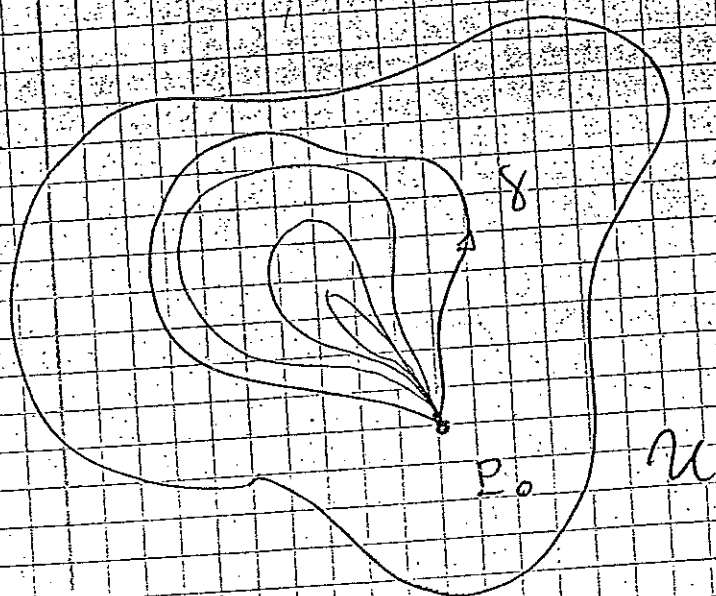
$$\boxed{\int_{\partial \mathbb{D}^+} \omega = \int_{\mathbb{D}^+} d\omega}$$

★ Quando una forma chiusa è esatta!

Def. Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ un aperto connesso (= regione)

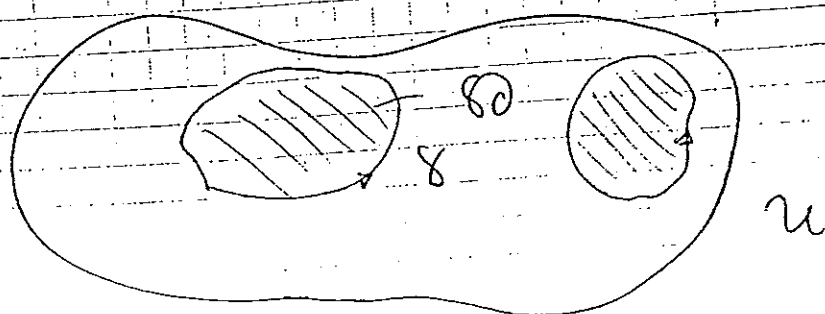
U è detto semplicemente connesso

se, fissato un qualsiasi pto $P_0 \in U$ (punto base), ogni curva chiusa γ generalmente regolare basata su P_0 può essere deformata con continuità fino a ridursi a P_0 (" γ è omotopa al cammino costante ")



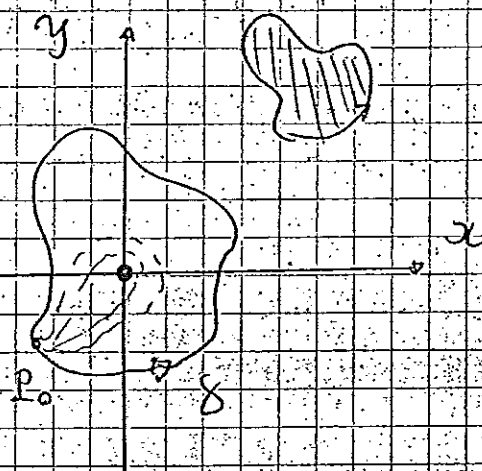
Equivalentemente, in queste ipotesi, ogni γ chiusa è "omologa a 0",

ovvero $\gamma = \partial \delta$, $\delta \in U$
dominio



★ Esempio importante

$U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ ★ non è semplicemente connesso



★ Di importanza fondamentale è il seguente teorema, detto

★★ Lemma di Poincaré

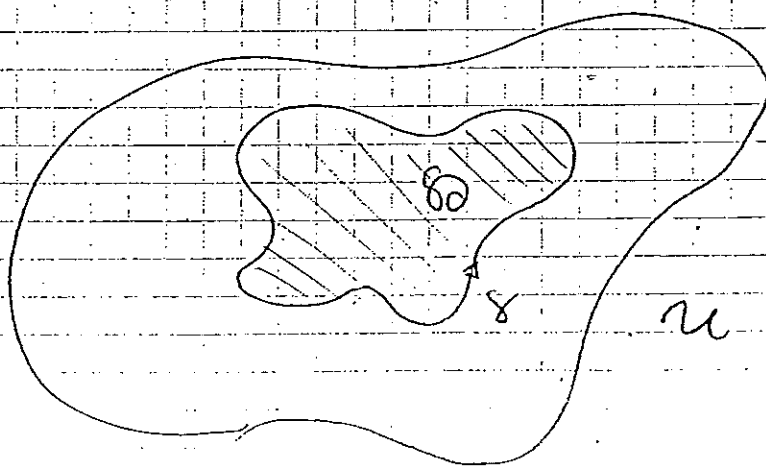
Sia $\omega \in \Lambda^1(U)$, ω chiusa

$U \subset \mathbb{R}^2$
 U aperto connesso e semplicemente connesso

Allora ω è chiusa $\Leftrightarrow$ ω è esatta

Dm. $\Leftarrow$ è ovvio

$\Rightarrow$



Sia γ una curva chiusa p.c., regolare
in U . Allora $\exists \theta$ tale che $\gamma = \partial \theta$
(U è semplicemente connesso).

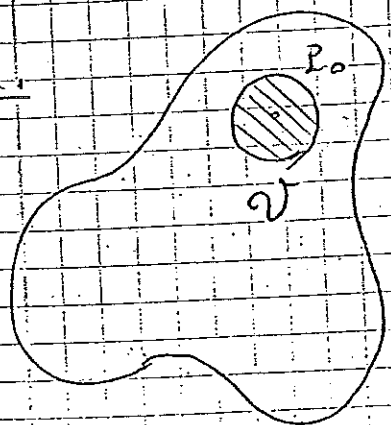
Si ha $\int_{\gamma} \omega = \int_{\partial \theta} d\omega = 0$

Poiché γ è arbitraria, si conclude che
 ω è esatta. $\square$

★ Corollario Sia $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto, $\omega \in \Lambda^1(U)$
 ω è chiusa $\Leftrightarrow$ è localmente esatta,
ovvero, $\forall p \in U \exists V$, aperto $\ni p$
tale che $\omega|_V$ sia esatta.

Dim.

U



Dato $p_0 \in U$, poiché
 U è aperto, $\exists V$
disco aperto $\ni p_0$
contenuto in U .

V è connesso e semplicemente

connesso $\Rightarrow \omega|_V$ è

esatta per il lemma di Poincaré.

★ esempio importante

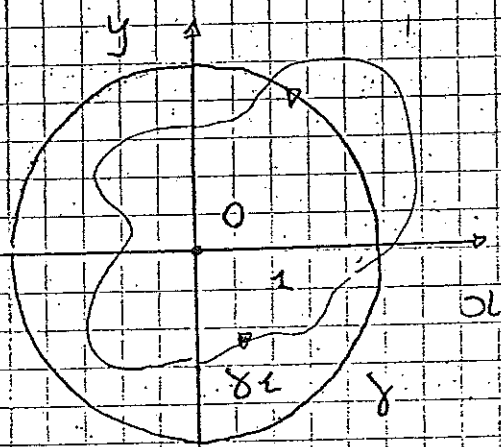
Se cade l'ipotesi di semplice connessione, il lemma di Poincaré non vale in generale.

$$M = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$$

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2} dy - \frac{y}{x^2+y^2} dx$$

★ ω è chiusa (Calcolo diretto)

★ ω non è esatta



$$x^2 + y^2 = 1$$

$$x = \cos \varphi$$

$$y = \sin \varphi$$

$$\varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \\ &= \int_0^{2\pi} \{ \cos \varphi d \sin \varphi - \\ &\quad - \sin \varphi d \cos \varphi \} d\varphi \end{aligned}$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi$$

$$= 2\pi \neq 0$$

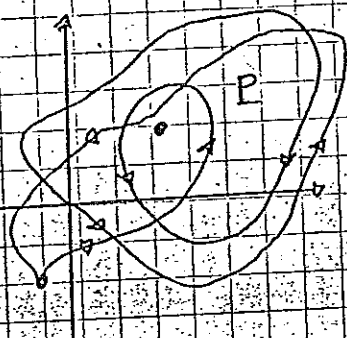
(Se ω fosse esatta $\int_{\gamma} \omega$ dovrebbe essere nullo...)

Osserviamo che $\int_{\gamma} \omega = n \cdot 2\pi$

dove γ è una qualsiasi curva chiusa

che si avvolga n volte attorno a 0 .

$\Rightarrow$ si ha la possibilità di definire
 ☆ un indice di avvolgimento di un
 cammino attorno ad un punto...



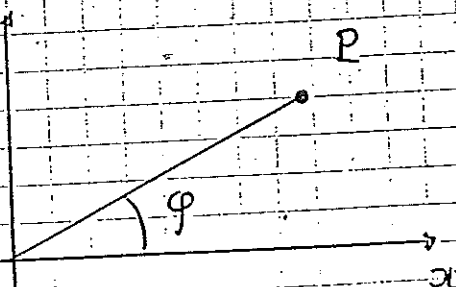
☆ Dunque: proprietà topologiche
 sono riflesse in proprietà analitiche
 (... si frugerebbe al teorema di de Rham
 vedi anche altre)

☆ Proseguendo, ... Sappiamo che ω
 deve essere localmente esatta

In fatti $\omega = d\varphi$

con $\varphi(x, y) = \arctg \frac{y}{x}$

(l'angolo ...)
 o angolo polare



☆ φ non è definita
 globalmente su $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, come sappiamo

★ Queste considerazioni spiegano matematicamente la legge di Biot - Savart.

★ Equazioni differenziali esatte

Poniamo in $U \subset \mathbb{R}^2$ aperto connesso.

La scrittura

$$\omega = 0, \quad P dx + Q dy = 0$$

(con $Q \neq 0$) è equivalente all'equazione differenziale ("dividendo per dx ...")

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{P}{Q}$$

$$y'(x) = - \frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}$$

Viceversa, una tale equazione dà luogo a $\omega = P dx + Q dy$.

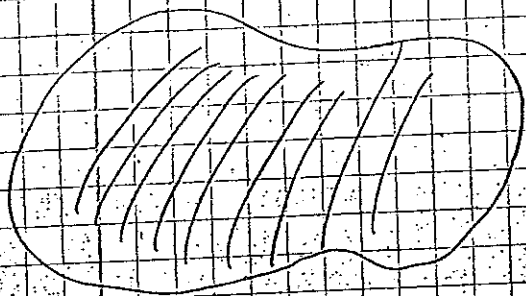
★ Se ω è esatta $\omega = f_x dx + f_y dy = df$

$f_y \neq 0$ si ha

$$y'(x) = - \frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))}$$

e già sappiamo (in base alla teoria del Dini

Che la soluzione generale dell'eq. diff.
 è data dalle curve di livello (in $\mathcal{U}$)
 di f (determinata a meno di una
 costante) $f(x, y) = c$



$f=c$

Se $\mathcal{U}$ è chiusa,
 e localmente isolata
 e, in aperti port piccoli,
 non si può ancora il problema...

Se $\mathcal{U}$ non è chiusa, osservato che
 il campo di direzioni non cambia se
 $\omega \rightarrow \omega' = \mu P dx + \mu Q dy \equiv P' dx + Q' dy$
 $\mu(x, y) \neq 0$ in $\mathcal{U}$

Si può sempre trovare una tale μ
 (fattore integrante) tale che $d\omega' = 0$
 (Esamineremo alcuni esempi in seguito...)

★ Osserviamo altre applicazioni della formula di Green.

Si ha

$$\iint_D \omega \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_{\gamma} \omega \, dy - y \, dx$$



★ formula di Pappas

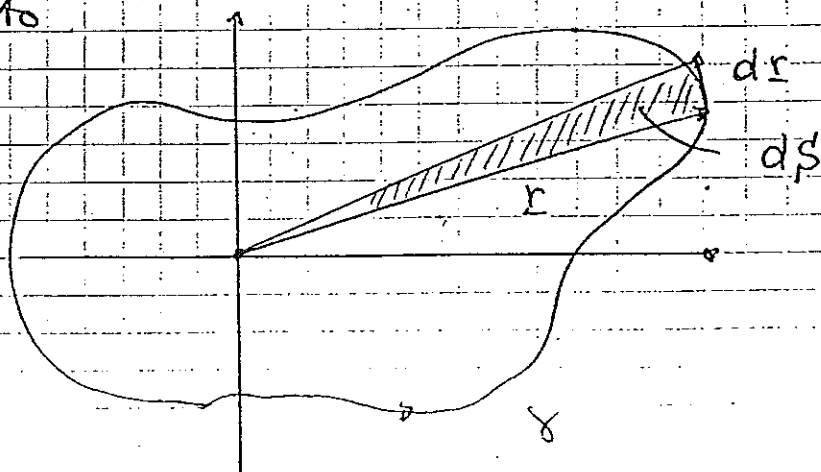
Osserviamo anche che

$$\frac{1}{2} \int_{\gamma} \omega \, dy - y \, dx = \frac{1}{2} \int_{\gamma} d(\omega y) - y \, dx = \frac{1}{2} \int_{\gamma} d(\omega y) - y \, dx$$

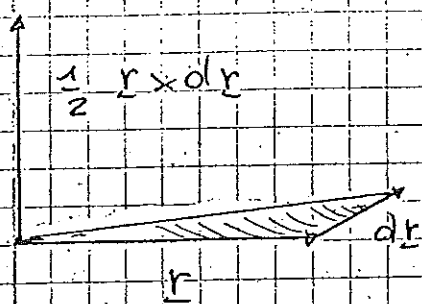
$$= \frac{1}{2} \int_{\gamma} d(\omega y) - \int_{\gamma} y \, dx = - \int_{\gamma} y \, dx$$

e analogamente $\int_{\gamma} \omega \, dx = \int_{\gamma} \omega \, dx$

Tale formula ha un contenuto intuitivo elevato.



$$ds = \frac{1}{2} \| \underline{r} \times d\underline{r} \|$$



$$\underline{r} \times d\underline{r} =$$

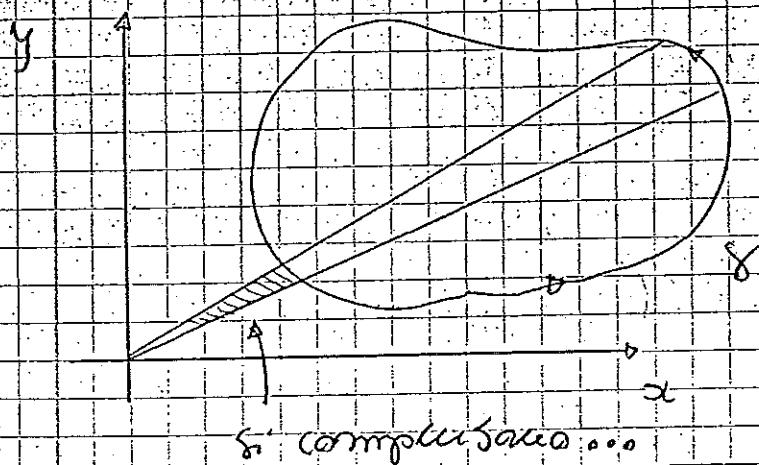
$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= x(dy) - y(dx)$$

da un'area orientata

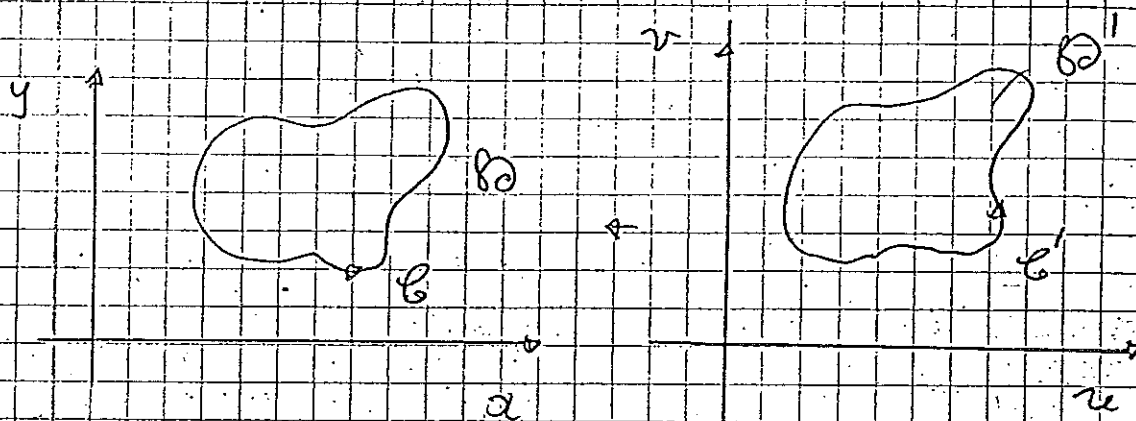
"integrando" si ottiene la formula.

osservazione: l'origine può essere ovunque.



★ Dimostriamo che

$$\iint_S dx dy = \iint_{S'} \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv$$



Supponiamo che la trasformazione sia $\mathcal{C}^2$,
(inoltre alla sua inversa), e conservi l'orientamento
(o la semplicità). Sia

$$\iint_{\Omega} \alpha \, dx \, dy = \int_{\Gamma} \alpha \, dy = \int_{\Gamma'} \alpha (y_u \, du + y_v \, dv) \quad \left(\text{integrando su } \frac{\partial \Omega}{\partial (u,v)} \right)$$

$$= \int_{\Gamma'} (\alpha y_u) \, du + (\alpha y_v) \, dv = \quad \left(\text{cicli} \right)$$

$$\iint_{\Omega'} \{ (\alpha y_v)_u - (\alpha y_u)_v \} \, du \, dv =$$

$$= \iint_{\Omega'} \{ \alpha_{uv} y_v + \alpha y_{vu} - \alpha_{vu} y_u - \alpha y_{uv} \} \, du \, dv$$

$$= \iint_{\Omega'} (\alpha_{uv} y_v - \alpha_{vu} y_u) \, du \, dv =$$

(Schwarz)

$$= \iint_{\Omega'} \frac{\partial(\alpha, y)}{\partial(u, v)} \, du \, dv = \iint_{\Omega'} \left| \frac{\partial(\alpha, y)}{\partial(u, v)} \right| \, du \, dv$$