INSIEMI

1. CLASSI O COLLEZIONI (E LORO NOTAZIONE)

La matematica non è solo un utile linguaggio, ma che è anche una proposta di importanti nozioni. Molte delle nozioni matematiche sono precisate, nello sviluppo della stessa matematica, mediante definizioni esplicite che permettono una presentazione non equivoca delle nozioni introdotte una volte che siano noti i significati dei termini usati nelle definizioni. La richiesta che siano noti i significati dei termini usati in una definizione porta naturalmente ad un regresso di definizioni attraverso nozioni sempre più basilari, regresso che non può proseguire all'infinito, e che, perciò, dovrà essere arrestato ad un certo punto. Si perverrà, così, a delle nozioni che non saranno più definite esplicitamente, le cosiddette nozioni primitive.

Sorge allora il problema di precisare le nozioni primitive, certo non attraverso una definizione esplicita, e di dare significato alle parole che le indicano. Un diverso tentativo di precisare il significato di certe parole tramite il linguaggio è quello di cercare di individuare un qualcosa attraverso la descrizione di proprietà che lo caratterizzino univocamente, descrizioni che possono contenere al loro interno il nome di quel qualcosa a cui si cerca di dare significato. Queste descrizioni vengono anche dette definizioni implicite, o assiomatizzazioni. Perché questo diverso metodo funzioni bisogna che non ci siano più nozioni diverse che soddisfano le stesse proprietà, altrimenti non si sa più cosa si è voluto individuare. Risultati di logica matematica della prima metà del 1900, mostrano che, qualunque sia la precisione, la ricchezza del linguaggio e l'abbondanza delle descrizioni, ci saranno sempre nozioni sostanzialmente diverse che soddisfano la stessa descrizione mediante proprietà che vorrebbero essere caratterizzanti, se queste nozioni includono infiniti elementi, come ad esempio la nozione di numero.

Si ripropone allora il problema di precisare le nozioni primitive senza potere fare ricorso al linguaggio né mediante definizioni esplicite, né implicite, per darne il significato. Cercherò di mostrare come, a partire dall'esperienza e attraverso varie operazioni mentali, si possa dare una vaga idea del significato dei termini primitivi, idea che si può cercare di affinare sempre meglio, senza pretendere di poterla precisare completamente. Risulterà che il significato attribuito alle nozioni primitive è personale, ma, attraverso il confronto interpersonale, si può arrivare ad accettare che certi aspetti siano comuni alle varie visioni personali: tali aspetti, anche se non caratterizzano univocamente un significato,vengono accettati anche come base degli sviluppi di una teoria deduttiva, cioè di una teoria che espliciti ciò che è implicito nell'assunzione degli aspetti accettati.

Il collegamento delle nozioni primitive, e non solo di queste, all'esperienza e il particolare modo di procedere nella costruzione delle nozioni con opportune operazioni mentali giustifica la sorprendente applicabilità della matematica ad ogni ambito di studio.

Inizierò questo percorso affrontando le nozioni basilari della teoria degli insiemi.

Nelle osservazioni umane hanno un ruolo importante oggetti e azioni. Tutti sappiamo cosa si intende per oggetto (o ente o cosa, parole che qui sono considerate sinonimi), nel senso che, se ci viene rivolta una frase contenente queste parole, sappiamo come reagire, eventualmente chiedendo ulteriori precisazioni su quale oggetto. Ma se si dovesse spiegare ad un'altra persona cosa si intende per oggetto (o ente o cosa), o, almeno, come ci si è formati questa nozione, ci si troverebbe in serio imbarazzo. Qui si vuole affrontare direttamente questo imbarazzo chiedendosi cosa sono gli oggetti, le cose. Non si ritiene opportuno dare una definizione esplicita del significato del termine oggetto, definizione che dovrebbe usare termini dal significato noto ancora più elementari di quello che si vuole definire, e che non si sanno individuare: così il termine oggetto (ente, cosa) viene considerato come primitivo. Ciò però non risolve il problema di indicare il significato del termine, significato da precisarsi non attraverso una definizione esplicita.

Sicuramente, quando si parla di un certo ente gli si attribuisce un essere sé stesso. La nozione di essere sé stesso proviene dalla esperienza che ciascun uomo ha della propria identità: nonostante l'esperienza ci proponga continui mutamenti, anche di noi stessi, sperimentiamo pure che siamo sempre noi ad avere queste diverse sensazioni, e ci formiamo l'idea della nostra identità.

L'idea che abbiamo della nostra identità comporta certe conseguenze. Ne vogliamo evidenziare alcune, senza pretesa di esaustività. La nostra identità non sta in nostre parti (se ci tagliamo i capelli non perdiamo la nostra identità) quindi l'identità non è scindibile in parti che la costituiscono. Ancora, la nostra identità è anche criterio di diversità dal resto. E poi la nostra identità ci permette di essere soggetto di azioni e relazioni.

Per interpretare al meglio le esperienze che viviamo della realtà esterna all'individuo (cioè le esperienze che l'individuo non è in grado modificare oltre un certo limite mediante azioni volontarie), è utile ipotizzare che anche altre persone, pure mutando e presentandosi in modi spesso diversi, siano sempre la stessa persone, cioè abbiano una loro identità, come noi l'abbiamo. Nessuno sperimenta l'identità di un altro, ma la ipotizza, con le caratteristiche sopra individuate, e questa ipotesi rende conto adeguatamente delle manifestazioni delle altre persone.

Troviamo conveniente attribuire identità anche a complessi di sensazioni che non riteniamo persone: un certo utensile è sempre lo stesso, anche se può essere più o meno usurato, o rimpiazzato da un altro dello stesso tipo. Spesso si attribuisce l'identità a complessi di sensazioni che hanno chiare delimitazioni, ma non è sempre così: si attribuisce identità anche ad una montagna, senza saper individuarne esattamente i confini, accettando così una certa vaghezza in ciò a cui viene attribuita l'identità. Ancora, troviamo conveniente attribuire identità anche a nozioni costruite dalla nostra attività mentale: si parla di una nozione piuttosto che di un'altra con le caratteristiche dell'individualità sopra evidenziate.

Si noti anche che sperimentiamo situazioni a cui non attribuiamo identità, ad esempio acqua, pane e aria. La lingua inglese, più dell'italiana, distingue, anche nel comportamento sintattico, i sostantivi che si riferiscono a complessi di sensazioni a cui attribuiamo o meno l'identità (i primi vengono classificati come countable, i secondi come uncountable). Di fatto diciamo dammi dell'acqua e non dammi l'acqua (si usa anche questa seconda espressione impropria, intendendo però l'acqua di un certo recipiente). Ciò non toglie che si possa anche considerare il concetto di acqua, a cui si attribuisce un'identità.

Useremo il termine <u>elemento</u> per indicare qualcosa a cui attribuiamo identità, indipendentemente dalla specificità dell'elemento stesso, cioè astraendo dalle sue specifiche caratteristiche diverse dall'avere identità, con le conseguenze indicate che comporta l'avere una identità.

Spesso ci capita di fissare la nostra attenzione su alcuni elementi, di considerare alcuni elementi, per i motivi più diversi.

Si dice <u>classe</u> o <u>collezione</u> una totalità di elementi su cui si è scelto di fissare la propria attenzione (le due parole vengono qui considerate sinonimi, ma non sinonimi alla parole insieme che indica una nozione che considereremo più avanti).

I singoli elementi considerati vengono detti <u>elementi della</u> classe. Ad esempio la lettera a è un elemento della classe delle lettere dell'alfabeto, mentre il sole non è un elemento della stessa classe. Nel considerare un elemento non ci interessa come viene caratterizzato o di quali proprietà gode, cioè astraiamo da tutte le sue caratteristiche, fuorché da quella di potere essere distinto da un elemento diverso.

Usiamo dare nomi sia ai singoli elementi di una classe sia alla classe: così se con a si indica un elemento e con S si indica una classe, possiamo dire che a è un elemento di S. Si dice anche che a appartiene ad S.

Per indicare l'appartenenza di un elemento ad una classe si usa il simbolo $\in$. Così si può scrivere: $a \in S$.

Per indicare che un elemento non appartiene ad una classe si userà il simbolo $\notin$.

Ogni classe è determinata dai suoi elementi, qualunque sia il modo mediante il quale vengano descritti (questa caratteristica del concetto di classe è detta <u>estensionalità</u>: infatti per individuare una classe guardiamo a quali elementi si estende e non al modo come questi vengono descritti). Perciò due diverse descrizioni di classi indicano la stessa classe se la classe indicata dalla prima descrizione e quella indicata dalla seconda descrizione hanno gli stessi elementi. Si usa dire che due classi sono la stessa se hanno gli stessi elementi. Ad esempio, la classe i cui elementi sono i numeri 2,4,6 è la classe i cui elementi sono 4,6,2,6, è la classe i cui elementi sono 2,4 e la somma di questi due, ed è anche la classe i cui elementi sono i numeri naturali pari strettamente compresi tra 1 e 7.

Spesso si assume, com'è naturale, che per sapere quale è la classe che si sta considerando sia necessario sapere prima in qualche modo i suoi elementi. Anche questa è una proprietà molto importante della nozione di classe che viene chiamata <u>fondatezza</u>: infatti attraverso la conoscenza dei suoi elementi vogliamo dare fondamento alla classe considerata. Si noti, però, che non si richiede nessuna effettività sul modo di sapere chi sono gli elementi, né si pongono limiti perché la conoscenza degli elementi abbia almeno una certa precisione, limiti che potrebbero riflettere i limiti umani nel conoscere. Si richiede solo una precedenza, rispetto al farsi un'idea della collezione a cui appartengono, nel sapere chi sono gli elementi, senza precisare cosa voglia dire conoscere e come si conosca. Così la formulazione della fondatezza rimane molto vaga per l'imprecisione su cosa significa conoscere. Senza volere risolvere questo problema ci si potrebbe accontentare di precisare come superare detta vaghezza almeno in quei casi che risulteranno importanti per lo sviluppo dell'argomento che si vuole studiare: ciò non sarà fatto qui. Si noti che, anche se l'idea che le collezioni debbano essere fondate è ritenuta generalmente una caratteristica della stessa nozione di collezione, che ne permette una più agile trattazione e le dà una base in qualche modo di costruzione a successivi livelli, tuttavia non tutti concordano che la fondatezza debba essere un aspetto essenziale della nozione di collezione: naturalmente così facendo si attestano su di una differente nozione di collezione.

Se si possono elencare gli elementi che stiamo considerando, allora si userà la seguente notazione per indicare la classe a cui appartengono esattamente quegli elementi: si inizia con la parentesi graffa aperta seguita dai nomi degli elementi dell'elenco separati da virgole, e si termina con la parentesi graffa chiusa. Così se a,b,c,d,e sono i nomi di cinque elementi che si vogliono considerare, la classe a cui appartengono esattamente quegli elementi può essere indicata con la seguente scrittura: $\{a,b,c,d,e\}$.

Se invece gli elementi che si vogliono considerare sono tutti quelli che godono di una certa proprietà, allora la notazione che si userà per indicare la classe a cui appartengono esattamente quegli elementi sarà la seguente: si inizia con la parentesi graffa aperta seguita da un simbolo che indica un qualsiasi elemento che apparterrà alla classe (x, ad esempio) e dal segno di interpunzione : (che si leggerà tale che); poi scriveremo la proprietà che caratterizza gli elementi che vogliamo considerare attribuendola al simbolo x; e terminiamo con la parentesi graffa chiusa. (A volte nella letteratura al posto del segno d'interpunzione : si trova il segno |). Così per indicare la classe i cui elementi sono i numeri naturali pari possiamo scrivere così:

{x: x è un numero naturale pari}.

Si noti che non tutte le collezioni possono essere indicate con una delle notazioni introdotte e i casi precedenti non esauriscono i tipi di collezioni. Esemplificazioni di ciò potranno essere viste in seguito.

2. SOTTOCLASSI, CLASSE VUOTA E COMPLEMENTAZIONE DI UNA CLASSE

Le nozioni sulle classi, che richiamiamo brevemente, sono molto note. Tuttavia vorrei spendere un po' di tempo a ricordarle per fare vedere come esse siano relative già alla nozione di classe, senza fare riferimento agli insiemi: infatti esse si basano sugli elementi appartenenti a delle classi.

Capita che, dopo avere considerato una classe, si voglia fissare la propria attenzione soltanto su alcuni elementi di quella classe.

Una classe, diciamola X, i cui elementi sono anche elementi di un'altra classe, diciamola Y, è detta <u>sottoclasse</u> dell'altra e si usa la scrittura $X \subseteq Y$. Cioè $X \subseteq Y$ se per ogni elemento a se $a \in X$ allora $a \in Y$. Se X è un sottoclasse di Y si dirà anche che X è <u>contenuto</u>, o <u>incluso</u>, in Y e che Y <u>contiene</u>, o <u>include</u>, X, ed useremo anche la notazione $Y \supseteq X$.

Si osservi che ogni classe è sottoclasse di sé stessa.

Esercizio. Si dimostri l'affermazione precedente.

Se una classe X è contenuta in una classe Y, ed anche la classe Y è contenuta nella classe X, allora gli elementi della classe X sono esattamente gli elementi della classe Y e le due classi coincidono, X=Y. Ad esempio sia X la classe dei numeri naturali multipli di 10, X={x: x è un numero naturale e x è multiplo di 10}, e Y sia la classe dei numeri naturali la cui scrittura decimale termina con la cifra 0. Allora $X \subseteq Y$ perché la scrittura decimale di ogni numero naturale multiplo di dieci termina con la cifra 0, e dunque ogni elemento di X è anche elemento di Y. Inoltre $Y \subseteq X$ perché ogni numero naturale la cui scrittura termina per 0 è un multiplo di 10, e così ogni elemento di Y è anche elemento di X. Ma allora gli elementi di X sono esattamente gli elementi di Y e le due classi X e Y sono uguali, coincidono, X=Y.

Può capitare che fissiamo la nostra attenzione su nessun elemento. Ad esempio potremmo considerare i mesi che hanno meno di venti giorni: evidentemente stiamo fissando la nostra attenzione su niente. Un altro esempio può essere il seguente: consideriamo {x: x è un numero reale e $x^2=-1$}.

Si dirà classe <u>vuota</u> una classe che non ha elementi, e la si indicherà con il simbolo $\emptyset$.

Poiché una classe è determinata dai suoi elementi e due classi sono la stessa se hanno gli stessi elementi, la classe vuota è unica.

Si osservi che la classe vuota è sottoclasse di ogni classe.

Esercizio. Mostrare che, se $X \subseteq Y$ per ogni classe Y, allora $X=\emptyset$.

Si può anche fissare l'attenzione su un solo elemento. Ad esempio si potrebbero considerare i mesi che hanno ventotto giorni in un anno non bisestile. Ci sono dunque classi con un solo elemento, ad esempio questa: {febbraio}.

Si noti che un elemento e la classe che ha quell'elemento come unico suo elemento sono due cose ben distinte, e questa diversità viene ben rispecchiata dalla notazione: se a è il nome dell'elemento, la classe che ha per unico elemento a si indica con {a} (spesso chiamato singoletto di a) che non è a, la notazione dell'elemento.

A volte si vogliono considerare tutti gli elementi diversi da quelli appartenenti ad una certa classe X. Si ottiene così una nuova classe che viene chiamata <u>complementare</u> della classe X. Essa è la classe $\{x: x \notin X\}$. Si indicherà con -X (nella letteratura si trovano anche altre notazioni) la classe complementare di X, $-X=\{x: x \notin X\}$. Ad esempio, se X è la classe i cui elementi sono le lettere dell'alfabeto, la classe complementare di X è la classe i cui elementi non sono lettere dell'alfabeto: -X={x: x non è una lettera dell'alfabeto}. Si noti che io, non essendo una lettera dell'alfabeto, appartengo alla classe -X.

Quella appena considerata è un'operazione tra classi, e precisamente l'operazione che ad una classe associa la sua classe complementare.

3. OPERAZIONI TRA CLASSI

A volte capita di volere fissare la propria attenzione sugli elementi che appartengono sia ad una classe X che ad un'altra classe Y. Date le classi X e Y, la classe che si ottiene considerando gli elementi che appartengono sia alla classe X che alla classe Y è detta <u>intersezione</u> delle due classi, e si indica così: $X\cap Y$. Cioè $X\cap Y = \{x: x\in X \text{ e } x\in Y\}$.

E' facile vedere che, dalla definizione di intersezione, segue che $X\cap Y=Y\cap X$.

Esercizio. Si dimostri questa affermazione.

Quella considerata è un altra operazione tra classi e precisamente quella che a due classi associa la loro intersezione.

Si noti che $X\cap Y$ è una sottoclasse sia della classe X che della classe Y.

Due classi la cui intersezione è la classe vuota si dicono <u>disgiunte</u>, cioè se $X\cap Y = \emptyset$ allora diremo che X e Y sono classi disgiunte.

L'operazione di intersezione tra classi può essere ripetuta: ad esempio, date tre classi X, Y, Z, si può considerare la classe $(X\cap Y)\cap Z$. Questa è la classe $\{x: x\in X\cap Y \text{ e } x\in Z\}$, cioè la classe $\{x: x\in X \text{ e } x\in Y \text{ e } x\in Z\}$, che è anche la stessa classe di $\{x: x\in X \text{ e } x\in Y\cap Z\}$, cioè $(X\cap Y)\cap Z= X\cap(Y\cap Z)$ (proprietà associativa dell'intersezione tra classi). Si vede così che l'ordine in cui vengono eseguite le successive intersezioni è irrilevante per il risultato. Perciò, invece di $(X\cap Y)\cap Z$, possiamo scrivere $X\cap Y\cap Z$ senza cadere in ambiguità. Più in generale, se $X_1, X_2,\ldots,X_n$ sono n classi, è ben precisato cosa vuole dire considerare la classe $X_1\cap X_2\cap\ldots\cap X_n$ che è anche la classe $\{x: x\in X_1 \text{ e } x\in X_2 \text{ e } \ldots \text{ e } x\in X_n\}$.

Un'altra operazione tra classi è l'<u>unione</u>. Date una classe X ed una classe Y, la classe unione delle classi X e Y è la classe i cui elementi sono o elementi della classe X o elementi della classe Y. Indicheremo l'unione delle due classi X e Y così: $X\cup Y$. Cioè $X\cup Y=\{x: x\in X \text{ oppure } x\in Y\}$.

E' facile vedere che, dalla definizione di unione, segue che $X\cup Y=Y\cup X$.

Esercizio. Si dimostri questa affermazione.

Si osservi che, qualunque sia X, l'unione della classe X con la classe -X, complementare di X, fa ottenere la particolare classe {x: x è un elemento} cui appartengono tutti gli elementi. Questa classe viene chiamata classe universale e la indichiamo con U. Brevemente si può scrivere $X \cup -X = U$.

L'operazione di unione tra classi può essere ripetuta: ad esempio, date tre classi X, Y, Z, si può considerare la classe $(X \cup Y) \cup Z$. Questa è la classe $\{x: x \in X \cup Y$ oppure $x \in Z\}$, cioè la classe $\{x: x \in X$ oppure $x \in Y$ oppure $x \in Z\}$, che è anche la stessa classe di $\{x: x \in X$ oppure $x \in Y \cup Z\}$, cioè $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$. Si vede così che l'ordine in cui vengono eseguite le successive unioni è irrilevante per il risultato (proprietà associativa dell'unione tra classi). Perciò, invece di $(X \cup Y) \cup Z$, possiamo scrivere $X \cup Y \cup Z$ senza cadere in ambiguità. Più in generale, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono n classi, è ben precisato cosa vuole dire considerare la classe $X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n$ che è anche la classe $\{x: x \in X_1$ oppure $x \in X_2$ oppure ... oppure $x \in X_n\}$.

Dopo aver applicato una operazione ad alcune classi, è possibile applicare ancora la stessa operazione o altre alle classi risultato delle precedenti operazioni. A tale proposito osserviamo come certe combinazione di operazioni diano lo stesso risultato di altre. Più precisamente vogliamo notare un legame tra le operazioni di unione e intersezione espresso dalle seguenti equazioni: $(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$ e $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$.

Esercizio. Sfruttando le definizioni di unione e intersezione, si dimostrino queste equazioni.

Una ulteriore operazione tra classi che considereremo è la differenza di classi. Date una classe X e una classe Y, la classe differenza X - Y è la classe i cui elementi appartengono a X ma non a Y: $X - Y = \{x: x \in X$ e $x \notin Y\}$. La classe X - Y è anche detta la classe complementare di Y in X.

Osserviamo che gli elementi che appartengono ad una classe X e non appartengono ad un'altra classe Y sono gli elementi che appartengono sia alla classe X che alla classe complementare della classe Y. Perciò, $X - Y = X \cap (-Y)$.

Si noti che X-Y è una sottoclasse della classe X.

La nozione di contenuto tra classi può essere caratterizzata mediante ciascuna delle operazioni di intersezione, unione o differenza tra insiemi. Infatti valgono le seguenti equivalenze: $X \subseteq Y$ se e solo se $X \cap Y = X$ se e solo se $X \cup Y = Y$ se e solo se $X - Y = \emptyset$.

Esercizio. Si dimostri quanto appena affermato.

4. LA NOZIONE DI INSIEME

Spesso consideriamo una classe come una cosa singola. Ad esempio siamo abituati a considerare una squadra sportiva come una cosa singola e quando diciamo che la squadra ha vinto evidentemente ci riferiamo a tutta la squadra come un solo ente e non ai giocatori suoi elementi: qualche giocatore può aver giocato molto male, ma ugualmente la squadra ha vinto.

Una volta che una classe è considerata come cosa singola, essa può essere anche utilizzata come elemento di un'altra classe o come soggetto di affermazioni. Per rimanere nell'esempio precedente possiamo considerare un torneo tra squadre, cioè la classe di tutte le squadre che partecipano ad una certa competizione. Si noti che gli elementi della classe torneo sono le squadre che sono a loro volta classi i cui elementi sono i giocatori della squadra.

Le classi che possono essere e che vengono considerate come cosa singola, come elemento, sono chiamate insiemi.

Si noti che solo le classi che possono essere considerate come cose singole, come elementi, cioè le classi che sono insiemi, possono appartenere ad altre classi perché solo gli elementi possono appartenere ad una classe in base alla idea di classe presentata fin dall'inizio.

Questa distinzione tra classi ed insiemi, che è stata sottolineata, è importante perché ci sono classi che non possono essere considerate come cose singole, come elementi, sicché non possono appartenere ad una classe (proprio perché non sono elementi). Tali classi che non sono elementi saranno dette classi proprie.

Ecco un esempio di una classe che non può essere considerata come una cosa singola, come un insieme, perché altrimenti la teoria degli insiemi che si sta cercando di proporre conterrebbe delle contraddizioni. Si consideri la classe universale a cui appartiene ogni elemento, cioè {x: x è un elemento}. La classe universale non è una cosa singola, un elemento perché se lo fosse apparterrebbe a sé stessa (tutti gli elementi appartengono alla classe universale!); ma, dalla proprietà di fondatezza delle classi, segue che nessuna classe che è un elemento (cioè nessun insieme) può appartenere a sé stessa, cioè per ogni insieme X si ha che $X \notin X$. Infatti, se non fosse così, ci sarebbe almeno un insieme C che apparterrebbe a sé stesso, $C \in C$, ma allora non si potrebbero conoscere tutti gli elementi di quella classe C prima della classe stessa, perché un elemento, C, è proprio la stessa classe, e ciò contraddirebbe la fondatezza. Si noti che per le classi proprie il problema dell'appartenenza a sé stesse non si può neppure proporre, perché, non essendo elementi, non ha senso domandarsi se appartengono a qualcosa.

Si può mostrare che ci sono classi che non possono essere considerate come una cosa singola anche senza fare ricorso alla fondatezza. Ad esempio, si consideri la classe di tutti gli insiemi che non appartengono a sé stessi, cioè la classe $R=\{X: X \notin X\}$ (per la fondatezza sappiamo che questa è proprio la classe universale, ma ora possiamo procedere anche senza sapere che è la classe universale). <u>Se questa classe fosse un insieme</u>, ci possiamo domandare se $R \in R$ o se $R \notin R$. Vediamo che non può essere vera né un'ipotesi né l'altra. Infatti se R appartenesse a R allora sarebbe un elemento di R e goderebbe della proprietà che caratterizza gli elementi di R, cioè non apparterrebbe a sé stesso, cioè se $R \in R$ allora $R \notin R$, sicché è impossibile che $R \in R$. Supponiamo ora che R non appartenga a R, cioè $R \notin R$; ma questa è proprio la caratteristica degli elementi che appartengono ad R, sicché $R \in R$. Così abbiamo visto che se $R \notin R$ allora $R \in R$, sicché è pure impossibile che $R \notin R$. Avendo raggiunto una posizione inaccettabile in entrambi i casi, dal momento che questi esauriscono le possibilità, dobbiamo concludere che R non può essere un insieme, perché questa era la condizione per poter arrivare alla contraddizione. (Abbiamo indicato con R questa classe perché fu inizialmente utilizzata da Russell nel suo famoso paradosso tendente a dimostrare appunto che non si può assumere che ogni classe sia un insieme.)

5. ATOMI, INSIEMI E CLASSI PROPRIE

Abbiamo visto che le classi sono costituite da elementi, cioè ciò che può appartenere ad una classe è un elemento. Inoltre certe classi, che abbiamo chiamato insiemi, sono anche elementi e quindi possono appartenere ad altre classi (il torneo ha come elementi le squadre che sono insiemi): ci sono cioè classi di insiemi (classi i cui elementi sono insiemi) i quali a loro volta possono avere alcuni elementi che sono insiemi, e così via. Ma non tutte le classi sono elementi, insiemi, ci sono anche le classi proprie. E gli elementi sono tutti classi?

No, ci sono elementi che non sono classi: eccone alcuni esempi. La persona che sta leggendo queste note è un qualcosa, un elemento, ma non un insieme, non è l'operazione mentale astratta di considerare alcune cose, la persona è un individuo ben concreto; d'altra parte chi sarebbero i suoi elementi? Non le molecole delle cellule che la costituiscono: per avere una persona non bastano questi elementi fisici, ma essi devono essere ben organizzati in un modo ben preciso che non è colto dalla nozione di classe. Invece quella persona può essere elemento di una classe, ad esempio, della classe dei lettori di queste note.

Come altro esempio si consideri la bontà: non ha elementi, non è una classe, ma può essere elemento, ad esempio, della classe delle virtù.

Ancora si consideri il numero naturale 2. Esso non ha elementi, non è una classe, ma può appartenere a molte classi, ad esempio alla classe dei multipli di due minori di 25.

Chiameremo <u>atomi</u> gli elementi che non sono classi, e che quindi non hanno elementi. Si noti che sono diversi dalla classe vuota anche se pure questa non ha elementi, poiché è solo per le classi che vale il criterio di uguaglianza: due classi sono uguali se e solo se hanno gli stessi elementi. Gli atomi invece si distinguono tra loro per essere una cosa piuttosto che un'altra.

Abbiamo così incontrato insiemi, classi proprie ed atomi. Si noti che 1) niente può appartenere ad un atomo, ma un atomo può appartenere sia ad un insieme che ad una classe propria; 2) solo o insiemi o atomi possono appartenere ad insiemi, e questi possono appartenere sia ad insiemi che a classi proprie (però un insieme non può mai appartenere a sé stesso, per la fondatezza, ma eventualmente ad un altro opportuno); 3) solo o atomi o insiemi possono appartenere a classi proprie, ma queste non possono appartenere ad alcunché. Detto altrimenti, se $a \in b$ allora a può essere o un atomo o un insieme, non una classe propria, mentre b può essere un insieme o una classe propria ma non un atomo; comunque deve essere $a \neq b$.

In molte esposizioni non si considerano gli atomi sostituendoli con particolari insiemi scelti in modo che abbiano lo stesso comportamento degli atomi che sostituiscono. Ad esempi, al posto del numero 2 si considera l'insieme $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$, che è un insieme costituito da due particolari elementi, e che, in un certo contesto, ha un comportamento come il numero 2 e può essere utilizzato al posto di questo. Poiché, come già osservato, alla matematica (e non solo alla matematica) non interessa la natura specifica degli elementi, ma il loro comportamento, se i particolari insiemi che vengono considerati al posto degli atomi hanno lo stesso comportamento di questi, la sostituzione è accettabile.

6. QUALI CLASSI SONO ANCHE INSIEMI?

Poiché gli insiemi sono classi, per essi vale tutto quanto detto fino ad ora sulle classi per quanto riguarda la notazione, i simboli introdotti, e le operazioni tra di essi.

E' nostro interesse avere a disposizione il maggiore numero possibile di elementi, pertanto decidiamo che una classe sarà un insieme ogni qual volta questa assunzione non porti a contraddizioni come nel caso della classe universale.

Ma, come stabilire quando l'assumere che una certa classe sia un insieme porta o meno a contraddizioni? La condizione data non è certo operativa. Peggio, gli studi di logica matematica hanno mostrato che non si può decidere in generale quali siano le affermazioni che seguono da certe assunzioni, e pertanto è impossibile indicare esattamente quali sono tutte le classi che pensate come insiemi non portano a contraddizione. Così la soluzione del problema di individuare quali classi sono anche insiemi, che è stata proposta e pareva tanto conveniente, si rivela non praticabile.

Si adotterà allora un atteggiamento più modesto: invece di determinare tutte le collezioni che possono essere considerate insiemi, si cercherà di riconoscerne esplicitamente almeno alcune che è opportuno considerare come insiemi per poter sviluppare la matematica a partire da essi, sperando che la scelta di considerare tali collezioni come insiemi non porti a contraddizioni.

Così si cercherà di indicare dei metodi espliciti e controllabili per determinare classi per le quali non si vede come si potrebbe pervenire ad una contraddizione considerandole come elementi. In tal modo forse non si otterranno tutte le classi che possono essere considerate come insiemi, ma delle classi ben riconoscibili che, con buona fiducia, possono essere ritenute insiemi.

Il metodo esplicito che si vuole proporre parte dalla considerazione di certe specifiche classi, che possono essere dette iniziali, per le quali non si vede come si possa arrivare a contraddizione una volta considerate come elementi. Lo stesso metodo, poi, considera certe specifiche operazioni da classi a classi che è ragionevole supporre che preservino l'essere insieme, cioè tali che, se applicate ad insiemi, danno delle classi per le quali ancora non si vede come si possa arrivare a contraddizione se vengono considerate come elementi. Il metodo ci proporrà poi di considerare come insiemi tutte le classi che possono essere ottenute dalle classi iniziali ripetendo opportunamente applicazioni di operazioni che preservano l'essere insieme.

L'esplicitazione delle scelte del metodo proposto viene generalmente eseguita proponendo degli assiomi per gli insiemi, cioè affermazioni che dovranno essere soddisfatte dagli oggetti che si intendono chiamare insiemi. Inoltre bisognerà cercare di giustificare quelle affermazioni.

Esemplifichiamo subito quanto detto proponendo i primi assiomi e le loro giustificazioni.

Un classe verrà detta <u>finita</u> se è finito il numero dei suoi elementi.

Di fatto siamo abituati a considerare le classi finite come elementi: già dall'esempio delle squadre sportive che partecipano ad un torneo si può rilevare come le squadre siano collezioni che vengono considerate anche insiemi. Anche se non si ha (e non si può avere) alcuna dimostrazione che ciò non porti a contraddizione, tuttavia la sensazione di potere quasi toccare con mano le classi finite, di poterle costruire effettivamente (assumendo che non ci siano limiti di tempo e di spazio per le classi finite ma con un enorme numero di elementi), ci dà la convinzione che assumere che esse siano insiemi non dovrebbe portare ad alcuna contraddizione.

Pertanto, rispettando il criterio stabilito per accettare quali classi possono essere considerate come insiemi, conveniamo che <u>ogni classe finita sia un insieme</u> appunto perché non si vede come questa scelta possa portare a contraddizioni. Così un nostro primo assioma potrebbe essere formulato nel modo seguente: ogni classe finita è un insieme.

Per quanto intuitivamente chiara, la nozione di finitezza di una classe non è ben precisata. Si può evitare questa difficoltà limitandosi ulteriormente a convenire che particolari classi finite, quelle con due elementi, siano insiemi. Ecco allora definitivamente il nostro primo assioma (detto assioma della coppia): <u>ogni classe con tanti elementi come la classe i cui elementi sono solo i simboli a e b è un insieme</u>. Come si vedrà tra molto poco, questa assunzione non è limitativa rispetto a quella proposta precedentemente.

Rispettando lo stesso criterio, dal momento che non si vede alcuna contraddizione che possa scaturire dalla scelta che faremo, conveniamo che (cioè prendiamo per assiomi, da chiamarsi assioma del sottinsieme, che) una sottoclasse di un insieme, e che (assioma dell'unione) il risultato di un'unione tra insiemi (che di sicuro sono classi) siano anche insiemi.
Si osservi che ogni classe con un solo elemento è un insieme o perché la classe {x}, per l'estensionalità, può anche essere pensata come {x,x} che è un insieme per l'assunzione fatta sulle coppie, o perché la classe {x} è una sottoclasse dell'insieme (per quanto già accettato) {x,y}, qualunque sia y, e dunque essa pure è un insieme.
Si osservi anche che l'intersezione tra insiemi è un insieme essendo sottoclasse di ciascuno (basterebbe di almeno uno) dei due insiemi dati.
Inoltre ora c'è una ulteriore motivazione per cui la classe universale non può essere un insieme. Infatti contiene la classe di Russell che non è un insieme, indipendentemente dal principio di fondatezza, e, se fosse un insieme, anche la classe di Russell dovrebbe esserlo portando ad una contraddizione.
Grazie alle ultime assunzioni fatte, possiamo già mostrare che l'assumere solo che le classi con due elementi sono insiemi (e non che tutte le classi finite siano insiemi) non è limitativo. Infatti iterando unioni di insiemi cui appartiene un solo elemento si arriva a mostrare che classi con un numero finito arbitrario di elementi sono insiemi, dando così un significato preciso alla finitezza delle collezioni relativamente alla finitezza del processo di iterazione di unioni.

7. GLI ASSIOMI DI RIMPIAZZAMENTO E DELLA POTENZA PER GLI INSIEMI

Poiché si ha l'impressione che le classi proprie, quelle che non possono essere considerate come elementi, siano quelle con troppi elementi come la classe universale, conveniamo che le classi che hanno tanti elementi quanti quelli di un'altra classe che sappiamo essere un insieme siano anche insiemi. Diremo che una classe ha tanti elementi quanti quelli di un'altra classe quando si può descrivere un modo di fare corrispondere ad ogni elemento della prima classe un unico elemento della seconda classe in tal guisa che ad elementi distinti corrispondano elementi distinti, e, così facendo, ottenere tutti gli elementi della seconda classe al variare dell'elemento della prima classe a cui corrispondono.

Le classi intersezione di insiemi o differenza di insiemi saranno insiemi perché, come abbiamo già osservato, sono sottoclassi di alcuni degli insiemi dati.
Invece, il complementare di un insieme non è un insieme perché se, per assurdo, lo fosse allora anche l'unione tra l'insieme e il suo complementare sarebbe un insieme per quanto convenuto sull'unione; ma l'unione di un insieme con il suo complementare è la classe universale che non è un insieme, come abbiamo già visto.
In quello che faremo, però, non useremo la complementazione, oppure, se lo faremo, useremo tutte le opportune cautele e lo diremo esplicitamente. Attenzione però che a volte si considera la differenza tra insiemi e l'insieme da cui si toglie l'altro può non essere menzionato esplicitamente (perché ovvio dal contesto) e potrebbe sembrare che si consideri la complementazione, anche se non è così. Ad esempio, quando si parla di numeri naturali e si vuole considerare l'insieme dei non pari, in effetti non intendiamo la classe complemento dell'insieme dei numeri pari (a cui appartengono anche tutte le cose che non sono numeri naturali), bensì l'insieme dei numeri naturali meno l'insieme dei numeri pari, cioè la differenza tra questi due insiemi, che è un insieme.

Poiché si è deciso che le sottoclassi di un insieme sono insiemi (le chiameremo sottinsiemi), possiamo considerare anche la classe di tutti i sottinsiemi di un insieme dato X, cioè $\{s: s\subseteq X\}$. Conveniamo che anche questa classe sia un insieme ancora perché non si vedono controindicazioni a questa scelta. L'insieme dei sottinsiemi sarà chiamato l'insieme potenza dell'insieme X e sarà indicato con P(X), che si legge P di X. Ad esempio, se $X=\{a,b\}$ allora $P(X)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$. Si noti che, se X è un insieme finito con n elementi allora anche P(X) è un insieme finito che ha, invece, 2^n elementi.
Si noti anche che, se da una parte è relativamente facile riconoscere che un certo insieme dato è un sottinsieme di un altro insieme ben precisato, dall'altra, in generale, non è altrettanto facile riconoscere quali sono tutti i sottinsiemi di un insieme dato: ci sono metodi per indicare certi sottinsiemi a partire da collezioni di sottinsiemi, e si dovrebbe prima conoscere la classe dei sottin-

siemi per precisare quali sono alcuni sottinsiemi di un insieme dato. Questo fenomeno va sotto il nome di impredicatività della classe dei sottinsiemi di un insieme. Ciò sembrerebbe violare l'assunzione di fondatezza richiesta per il concetto di classe (e di insieme) che si sta proponendo. Ma non è così, bensì si tratta di accettare una precisazione della nozione di conoscere (nozione che abbiamo già osservato essere molto vaga) affermante che dato un insieme immediatamente si possono conoscere i suoi sottinsiemi.

In questa esposizione decidiamo di accettare tale posizione, pur sapendo che è un'assunzione molto impegnativa, e che si possono avere interessanti sviluppi della nozione di insieme anche rifiutando questa assunzione, o limitandosi a considerare solo classi i cui elementi siano sottinsiemi di un insieme ben precisabili (in un modo tutto da puntualizzare in esposizioni dedicate a ciò).

8. ASSIOMA DELL'INFINITO

Per gli sviluppi matematici successivi, ed in particolare per una precisa introduzione dei numeri reali, è opportuno assumere che anche <u>la classe dei numeri naturali</u>, che indicheremo con N, <u>sia un insieme</u>. Questa forse è l'assunzione più gratuita e meno giustificata, essendo l'utilità per lo sviluppo della matematica la sola motivazione che ci spinge ad accettare questa ipotesi. Anche se questa motivazione ha poco a che vedere con il convincerci che da essa non possono derivare contraddizioni, di fatto finora non se ne sono trovate, e ciò ci permette di continuare ad accettare l'ipotesi che la classe dei numeri naturali sia un insieme.

Se uno fosse perplesso per il fatto che non si sono ancora definiti i numeri naturali in un ambiente insiemistico, l'assunzione che la classe dei numeri naturali è un insieme può essere sostituita con l'affermazione che la collezione N*, che tra poco preciseremo, è un insieme. Questa affermazione è equivalente alla prima, qualunque sia la nozione di numero naturale che verrà precisata, grazie all'assunzione che una classe che ha tanti elementi quanti quelli di un insieme è essa pure un insieme.

Per arrivare alla collezione N* iniziamo con il considerare particolari collezioni e precisamente $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$. Sappiamo già che $\varnothing$ è un insieme. Osserviamo che ciascuno di queste collezioni (diciamola X), fuorché $\varnothing$, può essere ottenuta dalla precedente (diciamola Z) facendo l'unione di Z con $\{Z\}$. Poiché, $\{Z\} \notin Z$ - dal momento che abbiamo convenuto per la fondatezza che una collezione non può essere elemento di sé stessa neppure quando è un insieme - si ha che la collezione $Z \cup \{Z\}$ ha tutti gli elementi della collezione Z e uno in più, che è la stessa collezione Z. Così ognuna di queste collezioni è la collezione delle precedenti, se queste possono essere considerate elementi. Ma ciò è vero per il seguente motivo. Se Z è un insieme allora lo sono anche $\{Z\}$ e $Z \cup \{Z\}$, per le assunzioni già fatte su come ottenere altri insiemi; così, poiché $\varnothing$ è un insieme, lo saranno via via anche tutti quelli che si otterranno ripetendo il passaggio dall'insieme allo stesso insieme unito al suo singolo. Questa costruzione può essere continuata oltre gli insiemi indicati prima, ottenendo così la successioni di tutti e soli gli insiemi ottenuti a partire da $\varnothing$ solo ripetendo l'operazione di passaggio da uno già ottenuto, Z, a $Z \cup \{Z\}$. N* è esattamente la collezione che ha per elementi gli elementi della successione indicata.

Si noti che ciascuno degli insiemi di N* ha un numero di elementi diverso dal numero di elementi di un altro elemento di N*, e che per ogni numero naturale c'è un elemento di N* che ha esattamente quel numero di elementi. Così gli elementi di N* sono tanti quanti i numeri naturali in qualsiasi senso ragionevole si introducano i numeri naturali, e l'avere affermato che la collezione N* è un insieme corrisponde all'affermare che la collezione dei numeri naturali (comunque ragionevolmente siano introdotti) è pure un insieme.

9. UNIONI E INTERSEZIONI SU CLASSI

Date le classi $X_1, X_2, ..., X_n$, si sa cosa si intende per $X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n$. Ora se $X_1, X_2, ..., X_n$ sono insiemi, possiamo considerare l'insieme $X = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$, e possiamo indicare l'insieme $X_1 \cap X_2 \cap ... \cap X_n$ con la scrittura $\cap\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ oppure con $\cap X$. L' insieme $\cap X$ può essere descritto anche così: $\{x\colon x \in Y$ per ogni elemento Y appartenente a $X\}$, oppure, equivalentemente, anche così: $\{x\colon x \in Y$ qualunque sia $Y \in X\}$. Questo modo di descrivere $\cap X$ non richiede che X sia un insieme né che abbia un numero finito di elementi (anche se va bene anche in questo caso, come abbiamo appena visto), può lasciare qualche perplessità solo nel caso che X sia l'insieme vuoto.

Possiamo osservare che se $X \subseteq X'$, con X e X' entrambi non vuoti, allora $\cap X \supseteq \cap X'$ (dimostrarlo per esercizio). Così, siccome $\varnothing \subseteq X$, per ogni insieme X, se si vuole mantenere il risultato dell'osservazione precedente, dovremmo affermare che $\cap\varnothing$ contiene le intersezione su ogni altro insieme, in particolare le intersezioni del tipo $\cap\{Y\}$, che danno proprio Y, e dunque contenere ogni insieme. Così sorge la proposta che $\cap\varnothing$ sia definita come la classe universale (che è una classe propria) che contiene ogni insieme. Ciò non contrasta con la definizione data di $\cap X$ nella forma $\{x: x \in Y$ per ogni elemento Y appartenente a $X\}$ in quanto questa può essere riscritta equivalentemente così: $\{x:$ per ogni Y, se $Y \in X$ allora $x \in Y\}$, e, con questa scrittura, con il modo usuale della matematica di interpretare una implicazione come vera se l'antecedente è falso, si dice che, se $X=\varnothing$ (e allora l'antecedente è falso perché niente appartiene a $\varnothing$), ogni elemento x può appartenere a $\cap\varnothing$. Inoltre lo sviluppo degli studi sugli insiemi ha mostrato che l'assumere che $\cap\varnothing$ sia la classe universale non porta a difficoltà, ma solo a rendere uniforme dell'enunciazione di molti risultati non costringendo alla considerazione di casi particolari.

Pertanto estendendo le definizioni precedenti, in modo opportuno, per ogni classe X di insiemi definiremo $\cap X$ come $\{x:$ per ogni elemento Y appartenente a X, $x \in Y\}$. Se X non è l'insieme vuoto, chiaramente $\cap X \subseteq Y$ per ogni $Y \in X$, e, quindi, in tal caso, anche $\cap X$ è un insieme.

Analogamente, avevamo definito $X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n$ ed, ancora, se $X_1, X_2, ..., X_n$ sono insiemi, possiamo considerare l'insieme $X = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$,e possiamo indicare l'insieme $X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_n$ con la scrittura $\cup\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ oppure con $\cup X$. L'insieme $\cup X$ può essere descritto anche così: $\{x:$ esiste un elemento Y appartenente a X tale che $x \in Y\}$, oppure, equivalentemente, anche così: $\{x: x \in Y$ per qualche $Y \in X\}$. Questo modo di descrivere $\cup X$ non richiede che la classe X sia un insieme finito (anche se va bene anche in questo caso, come abbiamo appena visto), e neppure che sia un insieme, può lasciare qualche perplessità solo se che X è l'insieme vuoto.

Possiamo osservare che se $X \subseteq X'$, con X e X' entrambi non vuoti, allora $\cup X \subseteq \cup X'$ (dimostrarlo per esercizio). Così, siccome $\varnothing \subseteq X$, per ogni classe X, se si vuole mantenere il risultato dell'osservazione precedente, dovremmo affermare che $\cup\varnothing$ è contenuta in ogni unione, in particolare nelle unioni del tipo $\cup\{Y\}$, che danno proprio Y, e dunque è contenuta in ogni insieme. Così sorge la proposta che $\cup\varnothing$ sia definita come l'insieme vuoto che è contenuto in ogni insieme. Ciò non contrasta con la definizione data di $\cup X$ nella forma $\{x:$ esiste un elemento Y appartenente a X tale che $x \in Y\}$ poiché con questa scrittura, si dice che, se $X=\varnothing$, nessun elemento x può appartenere a $\cup\varnothing$. Inoltre lo sviluppo degli studi sugli insiemi ha mostrato che l'assumere che $\cup\varnothing$ sia l'insieme vuoto non porta a difficoltà ma solo a rendere uniforme l'enunciazione di molti risultati non costringendo alla considerazione di casi particolari.

Pertanto, estendendo le definizioni precedenti in modo opportuno, qualunque sia la classe X di insiemi si definirà $\cup X$ come $\{x:$ esiste un elemento Y appartenente a X tale che $x \in Y\}$. Nel caso particolare che X sia la classe universale $\underline{U}$, $\cup\underline{U}$ è la classe $\{x:$ esiste un elemento Y di $\underline{U}$ tale che $x \in Y\}$, cioè $\{x:$ esiste un insieme Y tale che $x \in Y\}$; così, poiché per ogni elemento x si ha che $\{x\}$ è un insieme, ogni elemento x appartiene a $\cup\underline{U}$ e $\cup\underline{U} = \underline{U}$, che è una classe propria. Così, in generale non si può dire se $\cup X$ è un insieme o una classe propria, tuttavia, in analogia con quanto convenuto per l'unione di insiemi, <u>se X è un insieme conveniamo che $\cup X$ sia un insieme</u>. Sostanzialmente l'idea è che un insieme sia un qualcosa di controllabile, e si vuol affermare che una unione controllabile di cose controllabili è ancora controllabile. $\cup X$ viene detto l'insieme unione sull'insieme X.

10. FONDATEZZA FORMALIZZATA E ASSIOMA DELLA SCELTA

Si è già osservato che, nonostante la vaghezza nella formulazione della fondatezza, da questa si può concludere che un insieme non può appartenere a se stesso. Ma si può ottenere di più: si può anche affermare che non esistono cicli di appartenenza, cioè non esistono insiemi $a_1, a_2, ..., a_n$ tali che il primo appartenga al secondo, il secondo al terzo, ... , il penultimo all'ultimo e questo al primo, $a_1 \in a_2 \in ... \in a_n \in a_1$. Infatti, se così fosse, non si potrebbe conoscere a_1 se prima non si conoscesse a_n e non si potrebbe conoscere a_n se prima non si conoscesse a_{n-1}, ... , e non si potrebbe conoscere a_2 se prima non si conoscesse a_1, sicché infine non si potrebbe conoscere a_1 senza conoscere a_1 stesso, ma ciò viola la fondatezza. Inoltre non vorremmo avere catene infinite discendenti di appartenenza, cioè successioni infinite di insiemi $a_0,a_1,...,a_n,a_{n+1},..$ tali che $...\in a_{n+1}\in a_n\in ...\in a_1\in a_0$, ancora perché così non si saprebbe quali sono gli elementi della collezione a_0.

Le conseguenze viste della vaga proprietà di fondatezza sono conseguenze anche della seguente proprietà: ogni insieme non vuoto (più in generale, classe non vuota) X ha un elemento, a, che è disgiunto da (cioè ha intersezione vuota con) ogni altro elemento y dell'insieme (della classe). Questa può essere formulata anche così: per ogni X diverso dall'insieme vuoto esiste un a tale che $a\in X$ e per ogni y, se $y\in X$ e $y\neq a$, allora $a\cap y=\emptyset$. Tra gli elementi dell'insieme (classe) X un tale insieme a può essere considerato come minimale rispetto all'appartenenza. Assumeremo questa proprietà come versione non vaga della fondatezza, chiamiamola <u>fondatezza formalizzata</u>. Si può utilizzare la fondatezza formalizzata al posto della fondatezza vaga per caratterizzare le nozioni di classe e di insieme che stiamo cercando di presentare.

Ma anche accettando la fondatezza formalizzata, non si sono risolti tutti i problemi relativi a "cosa si debba intendere per conoscere un elemento". Potremmo non curarci troppo di questi problemi, se non avessero effetto sulla possibilità di accettare o meno insiemi che si dimostrano importanti nello studio della matematica, possibilità lasciata impregiudicata dalle altre assunzioni fatte sulle nozioni di classe e di insieme. Così, invece di precisare in generale cosa si debba intendere per conoscere un elemento, cerchiamo piuttosto di esaminare i casi che ci interessano e, per essi, decidere come comportarsi.

Già prima di arrivare al problema di determinare quali soluzioni sono insiemi, ci si può chiedere cos'è una collezione. Qui ci sono due problematiche che si incrociano: da una parte l'avere una precisa nozione di cosa si intende per collezione, dall'altra sapere riconoscere se una certa cosa è effettivamente una collezione. Anche se le problematiche sono diverse, è evidente che sono collegate: infatti si potrebbe dubitare della precisione della nozione se non è in grado di riconoscerne le istanze. Si potrebbe classificare il primo come problema ontologico e il secondo come problema epistemologico, e i due problemi esistono e sono distinti perché l'uomo può avere chiare le caratteristiche di un concetto senza saperne riconoscere operativamente le istanziazioni. Nel caso in esame si può affermare che dal punto di vista ontologico non ci sono grandi difficoltà: considerare una collezione vuole dire, sostanzialmente, fissare l'attenzione su degli elementi nel loro complesso. Molto più delicato è il problema epistemologico. Si è accettato di ritenere uguali due collezioni quando hanno gli stessi elementi. Ciò vuol anche dire che si accetta che per riconoscere una specifica collezione bisogna sapere, in qualche modo, quali sono i suoi elementi, e, se non si conoscono gli elementi, non si può dire di considerare una certa collezione, di cui rimane dubbia l'esistenza. Si apre, così, il problema di precisare quale è la conoscenza richiesta nell'affermare che un elemento appartiene ad una collezione, al fine di potere precisare che si sta considerando una certa collezione, e dunque asserirne l'esistenza. Il problema diviene: quanto bene devono essere conosciuti e precisati gli elementi per potere dire che la loro collezione esiste? E' facile proporre collezioni, ad esempio formate da un numero finito di elementi ben individuati, per le quali non è assolutamente problematico riconoscere quali sono gli elementi della collezione, e così precisare quale collezione si sta considerando e asserirne tranquillamente l'esistenza. Ma ci sono delle situazioni in cui si può essere perplessi se effettivamente si sappia determinare quali elementi appartengono ad una collezione, il che può fare dubitare sulle stessa esistenza della collezione che si vuol individuare. Si consideri, ad esempio, la collezione dei sottinsiemi dell'insieme dei numeri naturali: si sa che essa è più che numerabile, sicché non se ne possono nominare gli elementi neppure in un tempo illimitato (addirittura ci sono sottinsiemi dei naturali che possono essere individuati solo dopo avere considerato una infinità di altri sottinsiemi dei numeri naturali). Eppure esiste una precisa definizione di sottinsieme, sicché il concetto di sottinsieme è chiaro. Inoltre pensiamo di potere riconoscere se una data collezione (anche infinita) è un sottinsieme dei naturali, così ce la sentiamo di poter affermare di conoscere i sottinsiemi dei naturali e di poter asserire tranquillamente l'esistenza della loro collezione (ciò viene anche precisamente affermato come conseguenza degli assiomi dell'infinito e dell'insieme potenza nella teoria degli insiemi).

L'esempio appena considerato mostra come si sia disposti a concedere molto alla nozione di conoscenza degli elementi che serve per potere concludere con l'esistenza di una certa collezione.

Ma anche questa apertura non è sufficiente per precisare dove mettere il confine esatto tra ciò che si vuole ritenere come conoscibile e ciò che non lo è.

Un esempio paradigmatico di situazioni di questo tipo è il seguente. Data un insieme (lo si chiami famiglia per chiarezza) di insiemi non vuoti, ci si chiede se esiste una funzione, che chiameremo funzione di scelta, che ad ogni insieme della famiglia associa un elemento di quell'insieme. L'affermazione che esiste una tale funzione di scelta (e quindi anche il suo codominio) va sotto il nome di assioma della scelta. Non c'è assolutamente alcun problema nell'affermare l'esistenza di una tale funzione se la famiglia è finita, o se c'è un criterio esplicito per individuare un elemento in ciascun insieme della famiglia. In particolare se ciascuno degli insiemi non vuoti della famiglia è finito allora c'è un criterio uniforme per scegliere un elemento da ciascun insieme non vuoto (ad esempio scegliendo il primo in un buon ordinamento dell'insieme, buon ordinamento che sicuramente esiste per la finitezza dell'insieme), e la funzione scelta esiste. Se, dunque, con pochi elementi in ciascuno degli insiemi non vuoti si può definire una funzione di scelta che ad ogni insieme della famiglia associ un suo elemento, ciò dovrà essere ancora più facile quando la "scelta è maggiore", cioè quando gli elementi in ciascun insieme della famiglia sono in numero maggiore. Pure essendo del tutto naturale ritenere che, nel caso di maggiore ricchezza di ciascuno degli insiemi della famiglia, la funzione di scelta debba esistere a ragion maggiore, tuttavia in questo caso la troppa ricchezza può provocare delle difficoltà nell'individuazione dell'elemento da scegliere in ciascun insieme della famiglia. Cohen ha dimostrato che, nel caso generale, la possibilità di affermarne l'esistenza di una funzione di scelta non è deducibile dagli altri assiomi della teoria degli insiemi. Così si deve decidere se si vuole accettare l'esistenza della funzione di scelta, come sembra del tutto naturale, accettando nel contempo come buona una conoscenza dei suoi elementi anche molto vaga, oppure, proprio per non accettare conoscenze troppo imprecise per determinare una collezione, se si debba rifiutare l'esistenza della funzione di scelta. In genere in matematica si accetta l'assioma della scelta che afferma appunto l'esistenza di una funzione di scelta relativa ad un insieme di insiemi non vuoti: pure permanendo il dubbio se la conoscenza umana arrivi a determinare gli elementi di una particolare funzione di scelta, l'accettazione dell'assioma della scelta vuole dire accettare l'esistenza e l'utilizzabilità di una tale funzione indipendentemente dalle possibilità effettive di precisare i suoi elementi.

Il principio del buon ordinamento (che afferma che ogni insieme può essere bene ordinato) e il lemma di Zorn (asserente che un insieme parzialmente ordinato ha massimali se ogni suo sottinsieme totalmente ordinato ha maggioranti nell'insieme) sono equivalenti all'assioma della scelta, e anch'essi si trovano ad affrontare la stessa problematica. In effetti se ogni insieme può essere ben ordinato allora c'è un banale criterio uniforme per scegliere un elemento da un insieme non vuoto, basta scegliere, ad esempio, il primo. Ma rimane il problema di come bene ordinare un insieme: anche se è chiaro ciò che questa affermazione comporta, non è evidente come si possa realizzare un buon ordinamento se l'insieme da ben ordinare contiene talmente tanti elementi che sfuggono ad ogni controllo (se sono pochi o ben individuati non è difficile bene ordinarli). Il problema è dello stesso tipo di quanto visto prima per l'assioma della scelta, tant'è vero che proprio usando l'assioma della scelta si riesce a costruire un buon ordinamento di un qualsiasi insieme non vuoto: basta infatti considerare una funzione di scelta relativa all'insieme dei sottinsiemi dell'insieme da bene ordinare, essa sceglierà un elemento da ogni sottinsieme non vuoto dell'insieme da bene ordinare, così si considererà come primo elemento quello scelto da tutto l'insieme e come prossimo elemento di uno a cui si è già arrivati quello scelto dalla funzione di scelta dal sottinsieme costituito dall'intero insieme meno gli elementi già considerati nell'avvio di buon ordinamento.

Analoga è la situazione per il lemma di Zorn. Il lemma di Zorn offre, in un certo modo, un metodo di approssimazione ad un certo traguardo (le approssimazioni possono essere sistemate in un insieme parzialmente ordinato secondo il criterio di avvicinamento al traguardo), affermando che così il traguardo può essere raggiunto (mediante l'elemento massimale di cui afferma l'esistenza) se le approssimazioni possono portare ad una approssimazione sempre più fine (ogni sottinsieme totalmente ordinato ha maggiorante). Di fatto è proprio sfruttando questa idea che si dimostra che dal lemma di Zorn segue l'assioma della scelta: se si sono fatte delle scelte coerenti su alcuni insiemi della famiglia si può estende l'insieme delle scelte fino ad includere un altro insieme della famiglia, se non sono stati considerati tutti; ciò porta ad un insieme massimale che deve essere una funzione di scelta avendo per dominio tutti gli insiemi della famiglia (altrimenti sarebbe ulteriormente incrementabile, contro la sua massimalità). D'altra parte dall'assioma di

scelta segue il lemma di Zorn perché tra i maggioranti di un elemento se ne può sempre scegliere uno e così proseguire fino a giungere ad un elemento che non ha maggioranti, cioè un elemento massimale. Così il lemma di Zorn è esattamente equivalente all'assioma della scelta. (Le dimostrazioni qui presentate sono solo tracce di dimostrazioni, esse vogliono cogliere le idee fondamentali delle stesse dimostrazioni. D'altra parte sono facilmente reperibili in vari testi che riportano gli elementi della teoria degli insiemi).
Ci limiteremo a questi casi particolari perché altri di interesse si riconducono a questo, anzi spesso sono equivalenti ad essi.

Le classi che considereremo saranno quasi sempre insiemi. D'ora in poi useremo per esse la parola insieme (e non classe), fuorché quando vorremo sottolineare la differenza tra classi e insiemi. Riassumendo, questa differenza tra classi e insiemi è la seguente: l'insieme vorrebbe essere una classe che può essere considerata come una cosa singola. Ma, a causa dell'impossibilità di precisare quali classi possono essere considerate come cosa singola, si è poi optato per una nozione matematica di insieme un po' diversa: così si è stabilito che un insieme sia una classe considerabile come elemento ottenibile mediante gli assiomi finora proposti. Questa pattuizione, anche se non identifica univocamente la nozione, è giustificata dal fatto che gli assiomi proposti sono proprio stati scelti in modo che conducano a classi, forse non tutte, che dovrebbe essere possibile considerare come cose singole senza che ciò porti a contraddizioni.

11. INSIEMI FINITI ORDINATI

Può accadere che si vogliano considerare degli elementi in un certo ordine. Ad esempio potremmo volere considerare le lettere dell'alfabeto nel loro ordine usuale. Così facendo otteniamo una classe ordinata. Nel caso che la classe sia finita, in analogia a quanto già visto, si può ritenere possa essere considerata come un elemento singolo, che chiameremo insieme ordinato finito. La notazione che useremo per indicare un insieme ordinato finito sarà la seguente: inizieremo con la parentesi tonda aperta, seguita dall'elenco ordinato degli elementi separati da virgole e termineremo con la parentesi tonda chiusa. Così l'insieme ordinato delle cifre nel loro ordine usuale è il seguente: (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9).
Si noti che, mentre l'insieme i cui elementi sono a e b può essere indicato indifferentemente sia con {a,b} che con {b,a}, l'insieme ordinato il cui primo elemento è a e il secondo è b si indica con (a,b). Se a≠b, la notazione (b,a) indica un altro insieme ordinato, quello il cui primo elemento è b e il secondo è a. Si osservi anche che {a,a}={a}, mentre (a)≠(a,a): (a) è l'insieme ordinato il cui solo elemento è a, mentre (a,a) è l'insieme ordinato formato da due elementi il cui primo elemento è a ed il secondo è ancora a. Chiamiamo <u>coppia ordinata</u> un insieme ordinato con due elementi.
Ancora, se i due coppie ordinate (a,b) e (c,d) sono uguali allora a=c e b=d, e viceversa; mentre se {a,b}={c,d} allora a=c oppure a=d, ed inoltre b=c oppure b=d.
Così se x e y sono numeri incogniti, ma sappiamo che (2,5)=(y,x) allora possiamo concludere che x=5 e y=2; mentre se sappiamo solo che {2,5}={x,y} possiamo solo dire che x è o 2 o 5, e y è l'altro dei due elementi 2, 5.
Osservazione. Per indicare gli insiemi ordinati abbiamo usato le parentesi tonde. Le parentesi tonde sono usate anche per indicare quali operazioni devono essere eseguite prima di altre. Non si devono confondere i due usi delle parentesi tonde. In genere è il contesto a chiarire in quale modo vanno interpretate le parentesi tonde.

Spesso per indicare delle situazioni concrete non è sufficiente un solo numero. Ad esempio se io possiedo una casa, una caramella e due vestiti, è ben vero che possiedo quattro cose, ma è diverso da chi possiede quattro caramelle, nessuna casa e nessun vestito. Se vogliamo fare un confronto corretto, è opportuno tenere separato il numero delle case dal numero delle caramelle e dal numero dei vestiti che uno possiede: così quello che io possiedo può essere rappresentato da una terna ordinata il cui primo numero indica il numero delle case che possiedo, il secondo numero indica il numero delle caramelle che possiedo e il terzo numero indica il numero dei vestiti che possiedo: cioè quello che possiedo può essere rappresentato da (1,1,2) (ovviamente stiamo considerando solo case, caramelle e vestiti e non tutte le altre cose che uno potrebbe possedere). Si noti che la terna ordinata (2,1,1) rappresenta una situazione ben diversa.

Questa osservazione dovrebbe far intravedere l'importanza degli insiemi ordinati.

12. RAPPRESENTABILITA' DI INSIEMI FINITI ORDINATI MEDIANTE INSIEMI

Abbiamo introdotto gli insiemi finiti ordinati nell'intento di considerare degli elementi in un certo ordine, ed abbiamo osservato, in particolare per le coppie ordinate, che gli insiemi ordinati sono ben altra cosa rispetto agli insiemi con gli stessi elementi: in effetti nella nozione di insieme ordinato ci sono ulteriori informazioni rispetto a quelle fornite da un insieme, precisamente le informazioni sull'ordine in cui vengono considerati gli elementi. Ci si può domandare se queste ulteriori informazioni possono essere indicate mediante la considerazione di opportuni insiemi, o se, al contrario, la nozione di insieme è insufficiente per rappresentare l'ordine. Di fatto ci sono insiemi, costruiti a partire dagli elementi di un insieme ordinato attraverso alcune opportune operazioni, che si comportano proprio come l'insieme ordinato di partenza, cioè permettono di distinguere quali degli elementi che stiamo considerando vanno considerati prima e quali dopo.

Ad esempio l'insieme $\{\{x\},\{x,y\}\}$ ottenuto a partire dagli elementi x e y permette di convenire che l'elemento x è stato considerato prima dell'elemento y. Infatti, i ruoli di x e di y possono essere differenziati come si vede dal seguente risultato la cui dimostrazione e lasciata come esercizio di un certo impegno: $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{u\},\{u,v\}\}$ se e soltanto se x=u e y=v. Potendo distinguere tra gli elementi x e y nel modo detto possiamo ora convenire di prendere come primo elemento della coppia l'elemento di cui consideriamo l'insieme che contiene lui solo, e come secondo elemento della coppia l'altro elemento che compare nell'insieme coppia dei due elementi. Cosi identifichiamo la coppia ordinata (x,y) con l'insieme $\{\{x\},\{x,y\}\}$. Di fatto si è aggiunta all'insieme $\{x,y\}$, i cui elementi sono appunto x e y, l'informazione su quale elemento va considerato per primo.

Qualcosa di analogo si può fare anche con le terne, le quaderne e, in generale, le n-uple ordinate: basta dire che il primo elemento viene prima dei successivi. Ciò si può fare considerando la coppia ordinata il cui primo elemento è l'insieme il cui solo elemento è il primo dell'n-upla, e il secondo è costituito dall'insieme ordinato degli elementi che seguono il primo, sinteticamente: $(a_1,a_2,...,a_n)=(a_1,(a_2,...,a_{n-1},a_n))=\{\{a_1\},\{a_1,(a_2,...,a_n)\}$. Nell'ultima scrittura di questo insieme ordinato è ancora utilizzata la notazione degli insiemi ordinati, ma questa volta con n-1 elementi. Proseguendo con questo metodo possiamo eliminare la notazione degli insiemi ordinati con n-1 elementi introducendo quella di altri insiemi ordinati con n-2 elementi, e così via fino alle coppie ordinate ed infine senza utilizzare insiemi ordinati per rappresentare l'insieme ordinato di partenza.

Così, ad esempio,

$(a,b,c)=(a,(b,c))=\{\{a\},\{a,(b,c)\}\}= \{\{a\},\{a,\{\{b\},\{b,c\}\}\}\}$.

In questa riconduzione degli insiemi ordinati a particolari insiemi finora sono rimasti esclusi gli insiemi ordinati con un solo elemento, cioè del tipo (a), chiamiamoli un-uple ordinate. Poiché nel passare dalla rappresentazione insiemistica delle n-uple ordinate a quella delle (n+1)-uple ordinate aumenta di due il numero massimo di parentesi graffe all'interno delle quali si può trovare un elemento dell'insieme ordinato, e questo numero è due per la rappresentazione delle coppie ordinate, risulta opportuno rappresentare insiemisticamente l'insieme ordinato con un solo elemento, (a), mediante il solo elemento a. A posteriori questa scelta risulta essere consona con uno sviluppo della teoria senza dovere formulare eccezioni per casi particolari.

Poiché la matematica trascura la natura degli oggetti che considera per registrare, invece, il loro comportamento, può risultare opportuno pensare agli insiemi ordinati finiti proprio come gli insiemi non ordinati più complessi con i quali li abbiamo identificati, riducendo così il numero delle nozioni iniziali da introdurre, dovendo accettare come contropartita una maggiore complicazione tecnica e la necessità di giustificare l'identificazione introdotta osservando l'uguaglianza di comportamento (come si è fatto).

13. PRODOTTO CARTESIANO

Date due classi A e B non vuote, si può considerare la classe i cui elementi sono le coppie ordinate con primo elemento appartenente ad A e secondo elemento appartenente a B. La classe così ottenuta si chiama <u>prodotto cartesiano</u> di A per B e si indica nel modo seguente: $A\times B$. Sarà

$A\times B=\{(a,b): a\in A \text{ e } b\in B\}$. Le classi A e B vengono anche dette fattori del prodotto cartesiano, e precisamente A primo fattore e B secondo fattore.

Ad esempio, se $A=\{1,3,5\}$ e $B=\{2,3,7\}$, $(1,2)$ è una coppia ordinata il cui primo elemento appartiene ad A ed il secondo appartiene a B. Anche $(1,7)$ è una tale coppia ordinata. Invece la coppia ordinata $(2,5)$ non ha il primo elemento in A ed il secondo in B. Un elenco di tutte le coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad A ed il secondo appartiene a B è il seguente: $(1,2),(1,3),(1,7),(3,2),(3,3),(3,7),(5,2),(5,3),(5,7)$. Così la classe di tutte le coppie ordinate con primo elemento in A e secondo elemento in B, cioè $A\times B$, è $\{(1,2),(1,3),(1,7),(3,2),(3,3),(3,7),(5,2),(5,3),(5,7)\}$.

Si osservi che l'operazione prodotto cartesiano tra classi non è, in generale, una operazione commutativa, cioè, se A e B sono classi non vuote diverse, non è vero che $A\times B = B\times A$, e questo perché, detto x un elemento che appartiene ad una e non all'altra, le coppie ordinate, che hanno x come uno degli elementi e come altro elemento un elemento della classe a cui non appartiene x, appartengono a un prodotto cartesiano e non all'altro.

Inoltre l'operazione prodotto cartesiano non è associativa, cioè, se A, B e C sono classi non vuote, allora $(A\times B)\times C \neq A\times(B\times C)$. Infatti $(A\times B)\times C = \{(u,z): u\in A\times B \text{ e } z\in C\} = \{((x,y),z): x\in A,\ y\in B, \text{ e } z\in C\}$, mentre $A\times(B\times C) = \{(x,v): x\in A \text{ e } v\in B\times C\} = \{(x,(y,z)): x\in A,\ y\in B, \text{ e } z\in C\}$, e gli elementi $((x,y),z)$ appartenenti $(A\times B)\times C$ sono evidentemente diversi dagli elementi $(x,(y,z))$ appartenenti a $A\times(B\times C)$.

Una ulteriore osservazione molto importante è la seguente. Se le classi non vuote date A e B sono insiemi, allora si deve ritenere che anche la classe $A\times B$ sia un insieme. Infatti, identificando le coppie ordinate (a,b) con gli insiemi $\{\{z\},\{a,b\}\}$, si nota che $A\times B \subseteq P(P(A\cup B))$, e dunque $A\times B$ è un insieme in base alle assunzioni fatte sulla nozione di insieme.

Finora si è sempre supposto che le classi date da cui ottenere il prodotto cartesiano siano non vuote; si può estendere la nozione di prodotto cartesiano anche al caso che almeno una delle classi date sia vuota? Cosa succede in tale caso? Se uno almeno dei fattori è vuoto non ci sono coppie ordinate con un elemento appartenete a quella classe, sicché il prodotto cartesiano dovrebbe essere vuoto. Così estendiamo la definizione di prodotto cartesiano anche al caso in cui almeno uno dei fattori sia vuoto stabilendo che in tal caso il prodotto è l'insieme vuoto. Si osservi che se i fattori non sono vuoti allora anche il prodotto cartesiano è non vuoto.

Si osservi che, se la collezione A è contenuta nella collezione A' e la collezione B è contenuta nella collezione B' allora anche $A\times B$ sarà contenuta in $A'\times B'$ (dimostrazione lasciata al lettore per esercizio).

Come abbiamo considerato il prodotto cartesiano di due classi, si può considerare anche il prodotto cartesiano di tre o più classi non vuote. Siano A, B e C tre classi non vuote, il loro prodotto cartesiano, che si indica con $A\times B\times C$, è la classe di tutte le terne ordinate il cui primo elemento appartiene ad A, il cui secondo elemento appartiene a B e il cui terzo elemento appartiene a C. Poiché si è deciso di identificare le terne ordinate (a,b,c) con le coppie ordinate $((a,b),c)$, cioè le coppie ordinate che hanno come primo elemento la coppia ordinata dei primi due elementi della terna e come secondo elemento il terzo elemento della terna, segue immediatamente che $A\times B\times C = (A\times B)\times C$. Questa uguaglianza permette anche di concludere che, se A, B e C sono insiemi non vuoti, allora anche $A\times B\times C$ è un insieme perché il prodotto cartesiano di due insiemi non vuoti è un insieme (non vuoto), come abbiamo già notato. Inoltre anche ora si può estendere la definizione di prodotto cartesiano al caso che almeno uno dei tre fattori sia vuoto stabilendo che allora il prodotto è vuoto.

Se poi $A_1, A_2, ..., A_n$ sono n classi non vuote, il loro prodotto cartesiano, che si indica con $A_1\times A_2\times...\times A_n$, è la classe di tutte le n-uple ordinate il cui primo elemento appartiene ad A_1, il secondo appartiene ad A_2, ..., e l'n-esimo appartiene a A_n.

Analogamente a prima,

$A_1\times A_2\times...\times A_n = ((...(A_1\times A_2)\times...)\times A_n)$.

Ancora, dall'uguaglianza precedente segue che, se le classi date $A_1, A_2, ..., A_n$ sono insiemi non vuoti, allora anche $A_1\times A_2\times...\times A_n$ è un insieme (non vuoto). Segue anche che si può estendere la definizione al caso che almeno uno dei fattori sia l'insieme vuoto stabilendo che in tal caso il prodotto cartesiano è l'insieme vuoto.

Per evitare scomode eccezioni si può cercare di definire cosa si debba intendere per prodotto cartesiano con un solo fattore A. Sembra abbastanza naturale considerare l'insieme delle un-uple ordinate di elementi di A. Avendo scelto di identificare le un-uple ordinate con gli elementi che le costituiscono, consegue la scelta di definire il prodotto cartesiano il cui unico fattore è A come A stesso.

ESERCIZI

- Quale è il risultato delle seguenti operazioni tra insiemi?
1. -{x:x è un numero naturale pari};
2. $\{1,2,3\}\cap$ {x:x è un numero naturale dispari};
3. {x: x è un numero naturale pari}$\cup${x: x è un numero naturale dispari};
4. {x: x è un numero reale e $1<x<5$}-{x: x è un numero reale e $3<x\leq 4$}.
- I seguenti insiemi possono essere pensati come unione di altri insiemi, quali?
5. {x: è un numero naturale};
6. {2,3};
7. {y: y è un numero reale e $1<y<3$ oppure $5<y\leq 7$};
8. {x: x è un numero reale e $x<0$ oppure $x>3$}.
- I seguenti insiemi possono essere pensati come intersezioni di altri insiemi, quali?
9. {n: n è un numero naturale dispari e $2<n\leq 9$};
10. {a: a è un numero reale e $a>-1$ e $a\leq 5$}.