Programma di Analisi 2 '00-'01

NOTA: si richiede espressamente la conoscenza delle dimostrazioni dei teoremi relativi ai paragrafi asteriscati

Successioni e serie di funzioni

Convergenza puntuale ed uniforme di successioni di funzioni. La convergenza uniforme implica quella puntuale*. Continuità del limite uniforme di successioni di funzioni continue*. Passaggio al limite sotto il segno di integrale in ipotesi di convergenza uniforme*. Convergenza uniforme delle derivate e derivabilità del limite*.

Criterio di Weierstraß o della convergenza totale per l'uniforme convergenza di una serie di funzioni*. Criterio di Cauchy per la convergenza uniforme di una serie di funzioni.

Teoremi di convergenza delle serie di potenze*. Raggio di convergenza, sua caratterizzazione. Proprietà delle serie di potenze nell'intervallo di convergenza: continuità, teorema di Abel. Derivabilità e integrabilità termine a termine*.

Funzioni analitiche, convergenza della serie di Taylor associata. Analiticità di e^x, $\sin x$, $\log(1+x)$, $\arctan x$.... Esponenziale complesso, formule di Eulero ($e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$), coordinate polari.

Spazi metrici

Funzione distanza. Definizione di spazio metrico. Palle. Distanza indotta da una norma su uno spazio vettoriale. Norma L^1, L^2, L^∞ su $\mathbb{R}^n$ e su $\mathbf{C}^0([a,b])$.

Limiti di successioni in spazi metrici. Funzioni continue tra spazi metrici, esempi in $\mathbb{R}^n$ e $\mathbf{C}^0([a,b])$ (funzione integrale*). Successioni di Cauchy, spazi metrici completi. Completezza di $\mathbb{R}^n$ e di $\mathbf{C}^0([a,b])$ *.

Principio delle contrazioni in uno spazio metrico completo (teorema di punto fisso di Banach, iterazioni di Picard)*. Prime applicazioni: algoritmo di Erone per il calcolo di radici, metodo di Newton o delle tangenti per il calcolo degli zeri di una funzione.

Equazioni differenziali

Generalità sulle equazioni differenziali ordinarie: equazioni e sistemi di ordine n in forma normale, riconducibilità a sistemi del primo ordine in forma normale, problema di Cauchy, problemi ben posti (esistenza, unicità, dipendenza continua dai dati iniziali).

Teorema di Cauchy-Lipschitz di esistenza e unicità di soluzioni di problemi di Cauchy come applicazione del principio delle contrazioni*.

Integrazione di equazioni a variabili separabili. Integrazione dell' equazione di Bernoulli. Metodo della conservazione dell'energia per l'integrazione di $\ddot{y} = -V'(y)$; discussione qualitativa nello spazio delle fasi; soluzioni stazionarie, relazione con i punti critici di V.

Equazioni differenziali lineari. Esistenza e unicità globale del Problema di Cauchy associato. Lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione omogenea, determinazione di una base nel caso a coefficienti costanti. Determinazione di una soluzione particolare dell'equazione non omogenea: metodo degli annichilatori, metodo della variazione dei parametri.

Sistemi di n equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. Particolari metodi di risoluzione: riducibilità ad un'equazione di ordine n; diagonalizzabilità del sistema omogeneo. Esponenziale di matrici. Discussione qualitativa nel piano delle fasi, stabilità delle soluzioni di equilibrio.

Funzioni di più variabili

Sottoinsiemi aperti, chiusi, limitati, connessi per archi, convessi di $\mathbb{R}^n$. Continuità, teorema di Weierstraß. Norma di un'applicazione lineare , continuità delle applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Funzioni differenziabili. Unicità del differenziale. Differenziale di un'applicazione lineare. Teorema del differenziale composto. Continuità delle funzioni differenziabili. Derivate direzionali e parziali, rappresentazione del differenziale attraverso il gradiente. Ortogonalità del gradiente rispetto agli insiemi di livello, direzione di massima pendenza. Matrice Jacobiana. Funzioni a valori vettoriali, curve e superfici. Vettori tangenti ad una superficie parametrica in $\mathbb{R}^3$, vettore normale. Coordinate sferiche e cilindriche in $\mathbb{R}^3$.

Relazione tra derivabilità parziale e differenziabilità, teorema del differenziale totale*. Derivate successive, teorema di Schwartz. Matrice Hessiana. Formula di Taylor, applicazione allo studio dei punti critici di una funzione regolare.

Teorema delle funzioni implicite ed inverse come ulteriore applicazione del principio delle contrazioni*. Derivate di funzioni implicite. Massimi e minimi vincolati, teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

Integrali multipli, curvilinei, superficiali

Definizione di integrale di una funzione di più variabili definita su di un rettangolo o su un dominio compatto a frontiera regolare. Integrabilità delle funzioni continue, integrazione iterata, formula di cambiamento di variabili. Volume dei solidi di rotazione, teorema di Pappo. Definizione di integrale curvilineo e di superficie e loro significato fisico. Lunghezza di una curva, area di una superficie. Rotore e divergenza di un campo vettoriale. Forme differenziali esatte e chiuse, lemma di Poincaré. Teorema di Stokes per forme, e suoi corollari per campi di vettori: teorema di Gauß-Green nel piano, teorema della divergenza e teorema di Stokes classico.

Riferimenti bibliografici

[1] T.M. Apostol *"Calcolo. Vol. terzo Analisi 2"*. Bollati Boringhieri

[2] E. Giusti *"Analisi Matematica 2"*. Bollati Boringhieri