

Università degli Studi di Padova



Dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei”

Corso di Laurea Magistrale in Fisica

**APPUNTI DEL CORSO
“ISTITUZIONI DI ASTROFISICA E COSMOLOGIA”**

DI

LEONARDO PACCIANI

Anno accademico 2015-2016

Questo materiale è rilasciato sotto la licenza *Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale*



Ciò significa che questo materiale può essere liberamente modificato e ridistribuito, a patto di citare la fonte, rilasciarlo sempre sotto questa licenza e di non usarlo per scopi commerciali.

Dicembre 2015

Introduzione

Questo documento è la trascrizione dei miei appunti del corso *Istituzioni di Astrofisica e Cosmologia*, tenuto dal prof. Sabino Matarrese per il primo anno del Corso di Laurea Magistrale in Fisica presso il dipartimento di Fisica e Astronomia “Galileo Galilei” dell’Università degli Studi di Padova nell’anno accademico 2015-2016.

Come tale, non è un documento con molte pretese di completezza o di forma. Solo per fare un esempio, per non perdere troppo tempo e energie ho disegnato a mano le figure presenti nel documento. Date le mie *limitatissime* capacità grafiche, molte non sono venute un granché; spero solo che siano perlomeno comprensibili.

Ho deciso di rilasciare questi appunti insieme al loro codice sorgente \LaTeX , di modo che chiunque possa eventualmente modificarli a seconda delle proprie esigenze. Il materiale (compresi gli appunti di altri corsi) si trova tutto sul sito <http://spiro.fisica.unipd.it/~pacciani>.

La licenza sotto la quale questo documento è rilasciato è la *Creative Commons Attribuzione - Non commerciale - Condividi allo stesso modo 4.0 Internazionale*. In sintesi, ciò significa che questo documento (incluso il suo codice sorgente) può essere modificato e ridistribuito liberamente, a condizione che sia sempre citata la fonte del documento originale, che sia rilasciato sempre sotto questa licenza e che non venga utilizzato per scopi commerciali o di lucro.

Non è escluso che ci possano essere degli errori, qua e là, anche se ho cercato di essere il più meticoloso possibile nel scovarli. In caso, mi scuso anticipatamente.

Ringrazio anche tutti coloro che mi hanno aiutato a correggere questo documento segnalandomi errori e sviste.

Padova, Dicembre 2015
Leonardo Pacciani

Indice

I	Cosmologia	v
1	Cosmografia	1
1.1	Il principio cosmologico	1
1.2	Struttura geometrica dell'universo	2
1.3	La misura della curvatura dell'universo	4
1.3.1	La misura di ρ : il problema della materia oscura	5
1.3.2	Conclusioni	8
1.4	L'energia oscura	9
1.5	La legge di Hubble	10
1.5.1	Alcuni risultati	13
2	Modelli di Friedmann	15
2.1	Deduzione newtoniana delle equazioni di Friedmann	15
2.2	L'equazione di stato	17
2.3	La costante cosmologica	18
2.4	Soluzione delle equazioni di Friedmann	21
2.4.1	Modelli di Einstein-de Sitter	21
2.4.2	Modelli curvi	23
3	Storia termica dell'universo	27
3.1	Termodinamica dell'universo primordiale	27
3.1.1	Densità numerica, densità d'energia e pressione	27
3.1.2	Entropia	31
3.1.3	Disaccoppiamento e relazione temperatura-tempo	32
3.2	I problemi dello hot Big Bang e il modello inflazionario	34
3.2.1	Il problema dell'orizzonte	35
3.2.2	Il problema della piattezza	39
3.3	La bariogenesi	42
3.4	La formazione dei primi elementi	43
3.4.1	La ricombinazione dell'idrogeno	43
3.5	Equivalenza radiazione-materia	46
3.6	Disaccoppiamento di specie particellari	47
3.7	Studio dell'abbondanza di materia oscura	48
3.8	La nucleosintesi primordiale	52
II	Astrofisica	55
4	Evoluzione stellare	57
4.1	La formazione delle stelle	57
4.2	Instabilità gravitazionale di Jeans	61
4.3	Formazione di una protostella	68
4.3.1	Nane brune e massa minima di una stella	70

5	Il Sole e le stelle	71
5.1	Il Sole	71
5.1.1	Diffusione radiativa	71
5.2	Reazioni termonucleari nelle stelle: catena $p-p$	74
5.3	Le fasi evolutive di una stella	75
5.4	Diagramma di Hertzsprung-Russel	77
5.5	La massa massima per una stella	78
5.6	Il legame fra massa minima e massima di una stella: M_* e M_{CH}	82
5.7	Fasi finali dell'evoluzione di una stella	87
5.7.1	Stella di neutroni	87
5.7.2	Buco nero	89

Parte I
Cosmologia

Capitolo 1

Cosmografia

1.1 Il principio cosmologico

Agli inizi del Novecento vennero intrapresi i primi passi verso l'elaborazione di una teoria scientifica che descrivesse le proprietà dell'universo nel suo complesso. In assenza di solide basi empiriche su cui poggiare, vennero introdotti dei principi-guida (come in genere si fa in questi casi) per permettere la formulazione di queste teorie.

Attraverso principi di simmetria è possibile ridurre i gradi di libertà di un sistema, e rendere in questo modo più semplice una sua modellizzazione.

Nel caso della cosmologia ciò è stato effettuato con l'introduzione del **PRINCIPIO COSMOLOGICO**:

*Ogni osservatore **comovente** osserva l'universo attorno a sé, a tempo fissato (nel proprio sistema di riferimento), come **omogeneo** e **isotropo**.*

ove:

- Per **comovente** si intende solidale con la sorgente della geometria dell'universo¹. “Operativamente”, ciò significa che un osservatore comovente rileva la radiazione cosmica di fondo come isotropa, entro qualche parte per milione.
Negli anni '70 si osservò una dipolarità nella radiazione cosmica di fondo: questa risultava più “calda” da una parte e più “fredda” dall'altra, entro qualche parte su mille. Ciò significa che la Terra *non* è un sistema di riferimento comovente (e la dipolarità è dovuta sostanzialmente al moto della Terra attorno al Sole). Anche rimuovendo tutte le non inerzialità possibili (dovute ai moti della Terra, del Sole e della Via Lattea), si osserva comunque che il Gruppo Locale (l'ammasso di galassie al quale appartiene la Via Lattea) si muove rispetto a un osservatore comovente con una velocità di circa 600 km/sec.
- Gli aggettivi **omogeneo** e **isotropo** sono riferiti alla distribuzione di massa-energia su *grande scala*, ossia osservando l'universo “con poca risoluzione spaziale”².

Definiamo poi *tempo cosmico* il tempo in un sistema di riferimento comovente.

Facciamo adesso un paio di commenti sul principio cosmologico:

- Si tratta di un principio astratto, che per certi versi può sembrare irrealistico, ma tutt'ora usato perché estremamente utile; è simile, in un certo senso, al principio d'inerzia galileiano: il principio in sé è molto semplice, ma per poter descrivere più efficacemente la realtà è necessario introdurre delle “complicazioni” (la presenza di attrito nel caso galileiano, piccole anisotropie e disomogeneità nel caso cosmologico). È utile perché permette di semplificare moltissimo le equazioni che regolano la dinamica dell'universo.

¹Con questa frase intendiamo dire che è solidale al “fluido cosmico”. Facendo riferimento alle *equazioni di Friedmann*, che verranno introdotte più avanti (1.3), il termine ρ è la densità di materia-energia associata al fluido cosmico, ed è questa che genera la geometria dello spaziotempo.

²Se si vuole dare una cifra, ad oggi si ritiene che l'universo sia omogeneo e isotropo se osservato su scale di distanza dell'ordine del centinaio di Mpc.

- Si basa su due assunzioni, una giustificata da evidenze osservative e l'altra di tipo più "filosofico":
 - L'ipotesi di *isotropia* dell'universo è suffragata da diverse osservazioni sperimentali (quali l'isotropia della radiazione cosmica di fondo, o dell'abbondanza di elementi come il deuterio e l'elio).
 - L'ipotesi di *omogeneità*, invece, è una "forzatura" che dobbiamo introdurre e che non è possibile verificare sperimentalmente per via delle nostre limitatissime capacità di esplorazione diretta dell'universo. A priori, infatti, nulla ci garantisce che le leggi fisiche a noi attualmente note siano valide in *tutto* l'universo così come le conosciamo. Si tratta di un'astrazione di tipo "filosofico", che a priori non è vera, ma ci dà un enorme vantaggio pratico. La validità di quest'assunzione, ovviamente, è da ricercarsi nell'accordo delle sue conseguenze con le osservazioni sperimentali.

1.2 Struttura geometrica dell'universo

Ovviamente, l'universo è composto da uno spaziotempo quadridimensionale, e come noto un tale spaziotempo ha al massimo 10 gradi di libertà.

Il gruppo di simmetria studiato in cosmologia è uno spaziotempo quadridimensionale con uno spazio tridimensionale a 6 gradi di libertà, ed è massimamente simmetrico (ove con quest'espressione si intende che possiede il massimo numero di simmetrie consentite).

Ci proponiamo adesso di indagare le proprietà geometriche dell'universo. Queste saranno racchiuse nell'espressione della metrica spaziotemporale.

Come noto, la metrica dello spaziotempo di Minkowski è $ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2$, ove $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ in coordinate cartesiane, mentre in coordinate sferiche:

$$dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\Omega^2 \quad \text{con} \quad d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$$

(e ovviamente $0 \leq \rho < +\infty$, $0 \leq \theta < \pi$ e $0 \leq \varphi < 2\pi$).

Si può dimostrare che la forma più generale possibile della metrica spaziotemporale di un universo nel quale vale il principio cosmologico è:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

detta *metrica di Robertson-Walker*, ove r è una variabile adimensionale ($r = \rho/a$; lo si vede anche dal termine $1 - kr^2$, dato che k è una costante), mentre a è una funzione del tempo cosmico (spesso ne sottintenderemo la dipendenza) detta *fattore di scala* (che rappresenta la possibile espansione o contrazione dell'universo).

La costante adimensionale k invece può convenzionalmente assumere i valori³ -1 , 0 o $+1$. Questa scelta è dovuta al fatto che l'insieme degli spazi descritti da questa metrica si divide in tre classi: quelli a curvatura positiva, nulla o negativa. In base a questo k assume, rispettivamente, i valori $+1$, 0 o -1 ; insomma, i valori di k corrispondono alle tre possibili "classi di equivalenza" di geometrie dell'universo.

Come si vede sostituendo $k = 0$, il caso di universo a curvatura nulla restituisce esattamente la metrica di Minkowski. In realtà un universo non potrà mai avere curvatura *esattamente* pari a zero, in quanto questo caso è rappresentato da un insieme di misura nulla (un punto) all'interno dell'insieme dei possibili valori della curvatura dell'universo (la retta reale); per questo, la probabilità che un universo sia perfettamente piatto è zero.

Per capire meglio le differenze strutturali fra i diversi tipi di universo (a curvatura positiva, nulla o negativa) è più comodo considerare il caso di una superficie bidimensionale⁴.

Una superficie bidimensionale a curvatura nulla ($k = 0$) è il classico piano cartesiano, per il quale:

$$dl^2 = a^2(dr^2 + r^2 d\varphi^2)$$

³Nota: se $k \neq +1$ allora $0 \leq r < +\infty$, altrimenti se $k = 1$ si ha $0 \leq r < 1$.

⁴Lo facciamo semplicemente perché siamo in grado di immergere visivamente una superficie bidimensionale in uno spazio tridimensionale, mentre le nostre capacità astrattive non ci consentono di visualizzare uno spazio tridimensionale all'interno di uno quadridimensionale.

Una superficie bidimensionale a curvatura (costante) positiva ($k = 1$) è invece una sfera, per la quale:

$$dl^2 = a^2(\sin^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)$$

(ove ovviamente $a = R$, con R raggio della sfera).

Infine, una superficie bidimensionale a curvatura (costante) negativa ($k = -1$) è un'iperboloide, per il quale:

$$dl^2 = a^2(\sinh^2 \theta d\varphi^2 + d\theta^2)$$

(ove stavolta $a = R$ è il modulo del raggio di curvatura, che è immaginario essendo la curvatura negativa).

Notiamo poi che mentre il piano cartesiano e l'iperboloide sono aperti (infiniti), la sfera ha superficie finita e non ha bordo. In modo analogo, si può vedere che uno spazio tridimensionale a curvatura costante positiva (un'ipersfera) è chiuso (ha volume finito) e non ha bordo, mentre se la sua curvatura è negativa o nulla è infinito (non chiuso).

Con un semplice cambio di variabili è possibile trovare in questi casi l'espressione della metrica di Robertson-Walker.

Considerando il caso $k = +1$, infatti, definendo $r := \sin \theta$ si ottiene:

$$dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\varphi^2 \right)$$

mentre per $k = -1$ ponendo $r := \sinh \theta$ si ha:

$$dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\varphi^2 \right)$$

Nel caso tridimensionale, quindi, basterà sostituire $d\varphi^2$ con $d\Omega^2$:

$$\begin{array}{ll} dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1-r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) & dl^2 = a^2 \left(\frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \\ (k = +1) & (k = -1) \end{array}$$

(notare che se $k = +1$ si ha $0 \leq r < 1$, mentre se $k = -1$ allora $0 \leq r < +\infty$). Volendo, definendo la variabile:

$$\chi = \begin{cases} \arcsin r & k = +1 \\ \operatorname{arcsinh} r & k = -1 \end{cases}$$

queste si possono riscrivere (esprimendo r in funzione di χ) come:

$$\begin{array}{ll} dl^2 = a^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2) & dl^2 = a^2 (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2) \\ (k = +1) & (k = -1) \end{array}$$

con $0 \leq \chi < \pi$ se $k = +1$ e $0 \leq \chi < +\infty$ se $k = -1$.

Insomma, per ricapitolare la metrica di Robertson-Walker per uno spaziotempo quadridimensionale si può scrivere come:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) = \begin{cases} c^2 dt^2 - a^2 (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2) & k = +1, r = \sin \chi \\ c^2 dt^2 - a^2 (dr^2 + r^2 d\Omega^2) & k = 0 \\ c^2 dt^2 - a^2 (d\chi^2 + \sinh^2 \chi d\Omega^2) & k = -1, r = \sinh \chi \end{cases}$$

Volendo, è possibile semplificare ulteriormente la metrica di Robertson-Walker definendo un tempo fittizio, detto *tempo conforme*:

$$dt = a(\eta) d\eta \quad \Rightarrow \quad d\eta = \frac{dt}{a(t)}$$

di modo che:

$$ds^2 = a(\eta)^2 \left[c^2 d\eta^2 - \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right) \right]$$

e quindi il “riscaldamento” effettuato dal fattore a coinvolge anche il tempo.

Ora, le dilatazioni *non* sono una simmetria dello spaziotempo ordinario. Pertanto, questa metrica è utile nella descrizione della dinamica di particelle che non hanno una “lunghezza caratteristica”, come ad esempio la lunghezza d’onda Compton (in questo modo, infatti, la particella non ha nessun “metro” che può usare per “accorgersi” dell’espansione dell’universo).

È per il fatto che i fotoni non hanno una tale lunghezza caratteristica che la radiazione cosmica di fondo ci appare termica pur non essendolo: si trattava infatti di radiazione effettivamente termica fino a quando materia e radiazione erano accoppiate (i fotoni interagivano continuamente con gli elettroni tramite scattering Compton). Al momento dell’ultimo scattering, ossia al disaccoppiamento materia-radiazione, la radiazione cosmica di fondo ha cessato di essere termica in senso letterale (in quanto non dovuta più a un processo di tipo termico), pur “sembrandolo”: ridefinendo infatti opportunamente la temperatura è possibile descriverla come radiazione termica⁵.

1.3 La misura della curvatura dell’universo

Ci chiediamo: esiste un qualche modo per determinare se $k = 0$ oppure no? Insomma, come possiamo determinare se l’universo è piatto o meno, o più in generale come possiamo determinare il segno della curvatura dell’universo?

Più avanti dimostreremo che in un universo in cui vale il principio cosmologico valgono le *equazioni di Friedmann*⁶:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho a^2 - kc^2 \quad \ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3} a \left(\rho + 3\frac{P}{c^2} \right) \quad \dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right)$$

ove le derivate sono fatte rispetto al tempo cosmico, G è la costante di gravitazione universale, ρ è la densità di materia-energia e P la cosiddetta *pressione isotropa*. Queste ultime due sono funzioni del solo tempo per via del principio cosmologico.

Potremmo dunque sfruttare la prima equazione, misurando \dot{a}^2 e $\frac{8\pi G}{3} \rho a^2$ e determinandone la differenza per confrontarla con 0.

Definendo il *parametro di Hubble*⁷ come:

$$H(t) \equiv \frac{\dot{a}}{a}$$

allora se l’universo fosse piatto si avrebbe:

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho_c(t) \quad \Rightarrow \quad \rho_c(t) = \frac{3H^2(t)}{8\pi G}$$

⁵In altre parole: pur non essendo più dovuta a un processo di tipo termico, è possibile definire una “temperatura” per la radiazione cosmica di fondo, di modo da poterla descrivere con le leggi del corpo nero. Vedi comunque il capitolo 3.

⁶Notiamo come nelle equazioni di Friedmann la curvatura abbia un ruolo importante, che invece non ha nell’espressione della metrica di Robertson-Walker. In particolare, come faremo vedere più avanti è possibile ricavare le equazioni di Friedmann anche in contesto newtoniano, nel quale si determina che:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} a^2 - k_N$$

ove k_N è una generica costante; si pone poi $k_N = kc^2$ in quanto si determina che k_N dev’essere proporzionale a un’energia per unità di massa. Pertanto il termine contenente k_N permane anche in ambito non relativistico. Sostituendo invece nella metrica di Robertson-Walker si ha che nella parte spaziale è presente un termine $(1 - k_N r^2/c^2)^{-1}$, che tende a 1 nel limite classico. Insomma, l’effetto di curvatura spaziale dell’universo è rilevante dal punto di vista dinamico, ma non da quello geometrico.

⁷ $H_0 = H(t_0)$, con t_0 tempo attuale è detta *costante di Hubble*, e vale:

$$H_0 := 100h \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}} = 70 \frac{\text{km/s}}{\text{Mpc}}$$

ove $h = 0.7$, e il “parsec” (pc) è la distanza alla quale l’asse maggiore dell’orbita terrestre è sotteso da un secondo d’arco, e risulta pari a circa 3 anni luce.

ove ρ_c è la densità di materia-energia che si ha con $k = 0$, detta *densità critica*.

Ora, noi possiamo misurare ρ e H per determinare ρ_c e quindi possiamo confrontare ρ con ρ_c . In particolare, definendo:

$$\Omega(t) = \frac{\rho(t)}{\rho_c(t)}$$

si avrà $\Omega > 1$ se $k = +1$, $\Omega = 1$ se $k = 0$ e $\Omega < 1$ se $k = -1$. Si ha anche:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} \Rightarrow 1 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\rho}{H^2} - \frac{kc^2}{a^2 H^2} \Rightarrow \Omega(t) - 1 = \frac{kc^2}{a^2(t)H^2(t)} \Rightarrow \text{sgn}(\Omega - 1) = \text{sgn } k$$

e pertanto il segno della curvatura dell'universo è effettivamente uguale al segno di $\Omega - 1$, ossia è determinabile confrontando i valori di Ω e 1.

Una nota: H è funzione del tempo, mentre k è costante; ciò significa che se, ad esempio, si determinasse che $\Omega > 1$ oggi, allora $\Omega > 1$ sempre⁸.

1.3.1 La misura di ρ : il problema della materia oscura

Abbiamo quindi capito che per determinare la struttura geometrica dell'universo dobbiamo misurare la densità di materia-energia ρ , tenendo conto di tutti i possibili contributi.

Cominciamo col cercare di determinare ρ_{0g} , ossia la densità attuale di materia-energia dovuta alle galassie (ossia alla materia visibile). Per farlo dobbiamo cercare di "aggirare" il problema della difficile osservabilità delle galassie poco luminose; definiamo dunque la *densità di luminosità media* \mathcal{L}_g di modo che:

$$\rho_{0g} = \mathcal{L}_g \left\langle \frac{M}{L} \right\rangle$$

ove $\langle M/L \rangle$ è il rapporto medio massa-luminosità, che in genere si misura in M_\odot/L_\odot , ove:

$$M_\odot = 1.99 \cdot 10^{33} \text{ g} \quad L_\odot = 3.9 \cdot 10^{33} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} = 3.9 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Ora, per definizione \mathcal{L}_g è data da:

$$\mathcal{L}_g = \int_0^{+\infty} L \Phi(L) dL$$

ove $\Phi(L)$ è la *funzione di luminosità*, che rappresenta il numero di oggetti per unità di volume e per unità di luminosità con luminosità compresa fra L e $L + dL$ (insomma, è una funzione con un significato analogo a una densità di probabilità, e \mathcal{L}_g ha un significato analogo a un valor medio).

Abbiamo dunque "spostato" il problema alla determinazione di una buona forma di $\Phi(L)$. La migliore espressione di questa funzione è la *funzione di Schechter*:

$$\Phi(L) = \frac{\Phi_*}{L_*} \left(\frac{L}{L_*} \right)^{-\alpha} \exp \left(-\frac{L}{L_*} \right)$$

ove:

$$\Phi_* \simeq 10^{-2} h^3 \text{ Mpc}^{-3} \quad L_* \simeq 10^{10} h^{-2} L_\odot \quad \alpha \simeq 1$$

Insomma, la giustificazione di questa forma della funzione di luminosità e del valore dei parametri è data dal fatto che in questo modo $\Phi(L)$ ha un buon accordo con i dati osservativi.

Questa funzione ha un crollo esponenziale a partire all'incirca da L_* , ma diverge per $L \rightarrow 0$: la funzione di Schechter prevede un numero infinito di galassie con luminosità nulla. Ovviamente questo non è vero, e non costituisce comunque un grosso problema perché la vera quantità d'interesse è \mathcal{L}_g , che è comunque un integrale

⁸Ossia, il segno della curvatura dell'universo non può mai cambiare: se l'universo aveva in principio curvatura positiva allora avrà sempre curvatura positiva, e analogamente se la curvatura iniziale è negativa.

convergente (\mathcal{L}_g è “poco sensibile” alla presenza di galassie con bassa luminosità). Usando la funzione di Schechter per determinare \mathcal{L}_g risulta⁹:

$$\mathcal{L}_g = \Phi_* L_* \Gamma(2 - \alpha) \simeq (2.0 \pm 0.7) \cdot 10^{18} h L_\odot \text{ Mpc}^{-3}$$

Abbiamo dunque superato empiricamente il primo problema.

Dobbiamo però ancora determinare $\langle M/L \rangle$; il vero problema è stimare M (L è più facile da misurare). Insomma, ci resta da determinare la massa delle galassie.

Ora, le galassie possono sostanzialmente essere divise in due categorie: quelle a spirale (caratterizzate dal fatto che le stelle orbitano attorno al centro della galassia stessa¹⁰) e quelle ellittiche (dove invece le stelle si muovono disordinatamente). Vediamo come nei due casi si possa determinare la massa della galassia.

Le galassie a spirale

Supponiamo di osservare una galassia a spirale “di taglio”: le sue varie parti avranno allora un diverso redshift per via della rotazione attorno al centro della galassia (oltre al redshift dovuto al movimento complessivo della galassia). Possiamo dunque costruire la *curva di velocità* della galassia, ossia determinare $v(R)$, ove R è la distanza dal centro della galassia stessa.

Considerando il moto di una stella a distanza R dal centro della galassia, detta $M(R)$ la massa della galassia contenuta entro una sfera di raggio R si avrà:

$$\frac{GM(R)}{R^2} = \frac{v^2(R)}{R} \quad \Rightarrow \quad \frac{GM(R)}{R} = v^2(R) \quad \Rightarrow \quad v(R) = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}$$

(ed è lecito usare la meccanica newtoniana in questo caso perché sicuramente su queste scale gli effetti della relatività generale non sono rilevanti). Misurando poi il redshift di elementi periferici alla galassia (nubi di gas, polveri ecc.) possiamo determinare $v(R)$ anche dove non sono più presenti stelle.

Ci aspettiamo che all'interno della galassia $v(R)$ cresca linearmente con R (perché $M(R) \propto R^3$, se la densità della galassia è costante) fino al raggio della galassia, dopodiché la massa saturerà e ci aspettiamo che fuori dalla galassia $M(R)$ decresca come $1/\sqrt{R}$ (*ramo kepleriano*):

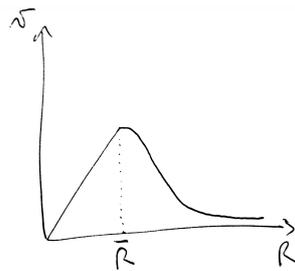


Figura 1.1: Andamento atteso di $v(R)$

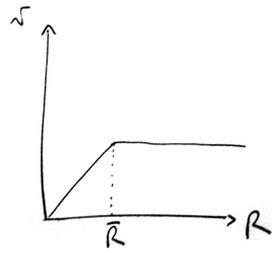
Insomma, determinato in questo modo il raggio della galassia possiamo ricavare la sua massa.

Negli anni '80 si è cominciato a fare misure nello spettro radio sull'idrogeno presente nelle galassie. Ciò che risultò fu del tutto inaspettato:

⁹Tenere a mente la definizione di funzione Gamma di Eulero:

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$$

¹⁰Una piccola nota: il moto rotatorio delle galassie a spirale non è dovuto a vorticosità intrinseche dell'universo, ma al *tidal torque*, ossia effetti mareali che causano l'innesco del moto rotatorio.

Figura 1.2: Andamento osservato di $v(R)$

ove il ramo costante dura fino a circa 10 volte il raggio della galassia. C'è dunque una componente delle galassie che, pur non emettendo elettromagneticamente, ha massa.

Come possiamo spiegare quest'evidenza sperimentale?

Storicamente si svilupparono due scuole di pensiero.

Secondo la prima, c'è un qualche tipo di materia non visibile tale da non far saturare M quando e come ci aspettiamo: è la *materia oscura*. Insomma, non tutto quello che osserviamo è quello che c'è nelle galassie. Dal grafico dei risultati sperimentali poi si deduce che oltre il raggio della galassia visibile la massa cresce con R , ossia $\rho \propto 1/R^2$ (detto *profilo di densità isotermico*).

Sembra insomma che tutte le galassie a spirale siano circondate da un "alone" di materia, grande circa 10 volte la galassia stessa, e che possiamo individuare solo gravitazionalmente.

Pertanto, il valore di $\langle M/L \rangle$ che si ottiene in questo modo è circa 10 volte più grande di quello stimabile sulla base della sola materia ordinaria. Risulta infatti:

$$\left\langle \frac{M}{L} \right\rangle_{\text{ord}} \simeq 30h \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}} \qquad \left\langle \frac{M}{L} \right\rangle_{\text{tot}} \simeq 300h \frac{M_{\odot}}{L_{\odot}}$$

La seconda scuola di pensiero sosteneva che la legge di Newton non potesse essere valida su queste scale e andasse pertanto corretta (per questo prese il nome di MOND, *modified newtonian dynamics*). Fu dunque elaborata una nuova teoria relativistica (TEVES, *tensor vector scalar*) che nel limite classico doveva restituire la nuova legge da applicare. Tuttavia, i risultati di questa teoria non si accordavano con le osservazioni, a meno di includere materia oscura.

Le galassie ellittiche

Le galassie ellittiche sono invece caratterizzate dal moto disordinato delle stelle che le compongono.

Per determinarne la massa possiamo sfruttare degli strumenti di meccanica statistica. Supponiamo infatti che queste galassie siano in equilibrio dinamico; allora possiamo applicare il teorema del viriale (nella sua versione non relativistica):

$$2T + U = 0$$

ove T è l'energia cinetica totale e U quella potenziale.

Per la parte cinetica, possiamo sfruttare l'effetto Doppler per determinare la velocità radiale media $\langle v_r \rangle$ delle stelle della galassia, ossia la velocità media delle stelle lungo la linea di vista (in questo caso infatti l'effetto Doppler determinerà un allargamento delle linee spettrali). Supponendo che il moto nella galassia sia isotropo, il contributo relativo a questa velocità misurata sarà pari a un terzo del totale. Insomma:

$$T = \frac{3}{2} M \langle v_r \rangle^2$$

Per quello che riguarda la parte potenziale, invece:

$$U = -\frac{GM^2}{R}$$

con R dimensioni della galassia. Applicando il teorema del viriale:

$$3M \langle v_r \rangle^2 = \frac{GM^2}{R} \quad \Rightarrow \quad M = 3 \frac{R}{G} \langle v_r \rangle^2$$

e quindi possiamo stimare la massa della galassia sulla base delle misure di R e $\langle v_r \rangle^2$.

Questo stesso identico procedimento può essere applicato anche agli ammassi di galassie (ossia gruppi di galassie gravitazionalmente legate fra loro).

Anche in questo caso risulta che nell'ammasso c'è un eccesso di materia (nel senso che la massa misurata risulta maggiore di quella prevista, calcolata come la semplice somma delle masse delle galassie presenti al suo interno), compatibile con quello trovato nel caso delle galassie a spirale.

Insomma, dalle osservazioni sperimentali risulta che nell'universo è presente anche la *materia oscura*, in misura circa 10 volte maggiore a quella osservabile.

Questa materia oscura è spesso detta “fredda”, nel senso di “non relativistica”.

Ad oggi non sappiamo di cosa sia composta la materia oscura, ma sono state fatte delle proposte (come il *neutralino* o l'*assione invisibile*), anche se non molto convincenti.

Storicamente, all'inizio si pensò che dovesse essere composta da neutrini massivi, che avrebbero dovuto avere una massa di circa 30 eV, ma ciò non è possibile perché oggi sappiamo che la loro massa è al massimo dell'ordine del decimo di eV ($m_\nu < 0.2$ eV).

1.3.2 Conclusioni

Ad oggi, il valore di ρ_c è:

$$\rho_{0c} = 1.88h^2 \cdot 10^{-29} \text{ g cm}^{-3}$$

che è compatibile col valore osservato della densità d'energia totale.

Tenendo conto della sola materia barionica, si ha $\Omega_b \approx 0.03$. Tenendo invece conto del contributo a ρ dovuto anche alla materia oscura, risulta che questa è circa il 30% della densità critica, ossia:

$$\Omega_{0M} \simeq 0.27$$

(ove il pedice M sta per “materia”, sia oscura che barionica).

Ora, possiamo domandarci cosa possa essere la materia oscura.

Potrebbe trattarsi ad esempio di materia ordinaria, in forma di buchi neri o nane brune (stelle troppo piccole per innescare il processo di bruciamento dell'idrogeno, che pertanto non emettono luce). Quest'ipotesi però non può essere valida, in quanto si può mostrare che il contributo della materia ordinaria a Ω non può superare il valore $\Omega_{b,\max} \approx 0.02h^{-2}$, in quanto altrimenti le abbondanze osservate degli elementi nell'universo sarebbero diverse. Infatti, il modello della nucleosintesi primordiale¹¹ degli elementi impone il vincolo:

$$0.016 < \Omega_b h^2 < 0.024$$

Non riusciamo pertanto a capire perché l'universo oggi ci appaia, con buona approssimazione, piatto.

C'è tuttavia da considerare il fatto (sul quale torneremo ampiamente in seguito) che l'espansione dell'universo è accelerata. Abbiamo visto, dalle equazioni di Friedmann, che:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{P}{c^2} \right)$$

In ambito puramente newtoniano (ossia in assenza di P), dunque, l'universo tenderebbe a contrarsi per via dell'attrazione gravitazionale fra le sue parti (l'accelerazione \ddot{a} del fattore di scala risulta negativa). Considerando invece anche il termine relativistico, se P è sufficientemente negativa allora \ddot{a} può risultare positivo, e dunque l'espansione dell'universo può essere accelerata. Vedremo più avanti che ciò che accade è proprio questo; l'energia che contribuisce a quest'effetto è detta *energia oscura*, e come vedremo è l'attuale componente dominante dell'universo.

¹¹Vedi 3.8.

1.4 L'energia oscura

Le evidenze sperimentali dell'accelerazione dell'espansione dell'universo derivano dall'osservazione degli spettri di supernovae, con tecniche che legano la *distanza di luminosità* (che poi definiremo) al redshift. In particolare, furono usate supernovae di tipo Ia in quanto hanno luminosità particolarmente stabile, ed è possibile stimarne la luminosità intrinseca¹².

Da misure di questo tipo si è giunti alla conclusione che l'espansione dell'universo è effettivamente accelerata. Pertanto, il termine $\rho + 3P/c^2$ nell'equazione di Friedmann dev'essere negativo; poiché ρ dev'essere per forza positiva (non si può avere una densità di materia-energia negativa), la pressione isotropa P deve essere negativa (nel qual caso si parla di *tensione*), e in particolare tale che:

$$P < -\frac{1}{3}\rho c^2$$

Questa energia oscura inoltre non può "ammassarsi", dev'essere estremamente omogenea¹³.

Ad oggi non esistono prove dirette dell'esistenza dell'energia oscura, ma solo delle prove indirette, ossia prove dell'esistenza di qualcosa che "si comporta come" l'energia oscura. Ad esempio:

- Dalle analisi delle anisotropie della radiazione cosmica di fondo risulta che ci deve essere una densità di energia oscura pari a circa il 70% del totale.
- Dal modo in cui si ammassano le galassie si deduce che circa il 70% dell'energia dell'universo è energia oscura.

Se poniamo $w = P/(\rho c^2)$, affinché l'universo abbia espansione accelerata si deve avere $w < -1/3$. Dalle osservazioni sperimentali attuali risulta che $w \simeq -1$, ossia $P \simeq -\rho c^2$.

Si potrebbe obiettare, a questo punto, che nel computo della densità di energia non stiamo tenendo conto di eventuali contributi dovuti a radiazione e neutrini.

Per quello che riguarda la radiazione, il calcolo della relativa densità d'energia è semplice perché la radiazione cosmica di fondo è il miglior corpo nero che si conosca, di temperatura pari a $T_{0\gamma} = 2.725 \pm 0.001$ K. Pertanto, l'attuale densità di energia dovuta ai fotoni è, dalle leggi del corpo nero:

$$\rho_{0\gamma} = \frac{\sigma_{\sim} T_{0\gamma}^4}{c^2} = 4.8 \cdot 10^{-34} \text{ g cm}^{-3}$$

ove:

$$\sigma_{\sim} = \frac{\pi^2 k_B^4}{15 \hbar^3 c^2} \quad \sigma_{SB} = \sigma_{\sim} \frac{c}{4}$$

ove σ_{SB} è la costante di Stefan-Boltzmann. Pertanto, $\Omega_{0\gamma} = 2.3 \cdot 10^{-5} h^2$, assolutamente trascurabile.

Per quello che riguarda i neutrini, se non avessero massa il conto sarebbe esattamente identico a quello dei fotoni, a parte il fatto che si deve tener conto che i neutrini sono fermioni e non bosoni (risulta, come vedremo in 3.1.3, $T_{0\nu} = (4/11)^{(1/3)} T_{0\gamma}$). In realtà i neutrini sono massivi, e quindi il termine dominante nel calcolo della loro densità d'energia sarà quello dovuto alla loro massa. Risulta comunque che il loro contributo al valore della densità di energia totale è trascurabile.

Insomma, per concludere, calcolando Ω in base ai contributi della materia (sia barionica che oscura), trascurando come appena visto quelli della radiazione e dei neutrini, si ottiene $\Omega_{0M} \simeq 0.3$. Le prove sperimentali che abbiamo citato poco fa, però, portano a concludere che:

$$\Omega_{\text{TOT}} \simeq 1$$

¹²In questi casi infatti è necessario usare oggetti astronomici, detti *candele standard*, dei quali possiamo in qualche modo determinare la luminosità intrinseca, e confrontarla con quella osservata per determinarne la distanza, nei modi che introdurremo fra poco. Un altro esempio di candele standard utilizzate sono le stelle Cefeidi.

Inizialmente si era provato a usare delle galassie come candele standard, ma si scoprì poi che ciò porta all'introduzione di notevoli errori sistematici perché evolvendo la loro luminosità intrinseca subisce variazioni.

¹³Se non lo fosse, infatti, i suoi effetti sarebbero inclusi nel contributo a ρ dovuto alla materia oscura.

Il contributo mancante è quello che associamo all'azione dell'energia oscura, ossia in base a queste misure e al fatto che $\Omega_{0M} \simeq 0.3$ deduciamo che:

$$\Omega_{DE} \simeq 0.7$$

1.5 La legge di Hubble

Negli anni '30, Hubble scoprì una relazione fra la distanza che separa una galassia da noi e il suo redshift. Per determinare le distanze astronomiche si può usare il metodo della parallasse, che però è affidabile solo per piccole distanze. Per distanze maggiori, si usano delle stelle di riferimento (le già citate *candele standard*) in modo da ricavarne la distanza misurandone la luminosità apparente. Le misure di Hubble portarono a:

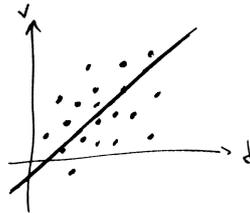


Figura 1.3: Risultati delle misure di Hubble

$$v = H_0 d$$

ove il valore di H_0 si ricavava con un fit lineare.

In realtà i dati di Hubble non erano buoni, e il fit non era affidabile. Comunque, come già detto, oggi sappiamo che $H_0 = 70(\text{km/s})/\text{Mpc}$.

Vogliamo adesso ricavare questa legge sulla base dei modelli di Robertson-Walker.

Dunque:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$$

Potremmo definire la distanza fra noi e un oggetto che emette luce (una galassia ad esempio) come:

$$d(t) = a(t) \underbrace{\int_0^r \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{1 - k\tilde{r}^2}}}_{f(r)}$$

detta *distanza propria*, ove θ e φ sono fissati perché l'universo è omogeneo e isotropo (e l'oggetto si muove in direzione radiale). Inoltre:

$$f(r) = \begin{cases} \arcsin r & k = 1 \\ r & k = 0 \simeq r + O(r^3) \\ \operatorname{arcsinh} r & k = -1 \end{cases}$$

ove l'espansione in serie di Taylor vale in tutti e tre i casi.

Allora si avrebbe:

$$\dot{d}(t) = \dot{a}(t) f(r) = \frac{\dot{a}}{a} d(t)$$

e quindi in effetti ci sarebbe una proporzionalità diretta fra la velocità dell'oggetto e la sua distanza.

In realtà stiamo bluffando: la distanza propria è infatti calcolata *a tempo costante*, e si tratta dunque di una pura astrazione matematica (insomma, la legge di Hubble sarebbe vera esattamente se i fotoni si propagassero istantaneamente).

Quello che ci proponiamo di fare adesso è ricavare una relazione del tipo della legge di Hubble, ossia una relazione che leghi la distanza di un oggetto al suo redshift, che fra poco definiremo¹⁴; vogliamo usare il redshift z in quanto una volta noto, la velocità in direzione radiale della galassia sarà pari a cz ¹⁵. Vogliamo fare questo, inoltre, tenendo conto anche di effetti relativistici e senza supporre nulla sulla composizione dell'universo. Vedremo che nella relazione risultante la dipendenza da z non è lineare, ma comprende anche termini di ordine superiore.

Partiamo innanzitutto dalla definizione del *redshift* z di un oggetto che emette luce. Questo è definito come:

$$z = \frac{\lambda_0 - \lambda_e}{\lambda_e} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = z + 1$$

ove λ_0 è la lunghezza d'onda del fotone osservato, mentre λ_e quella del fotone emesso dall'oggetto.

Assumiamo poi (più avanti lo dimostreremo) che:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + z \equiv \frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{a_0}{a_e}$$

ove a_0 e a_e sono, rispettivamente, i valori del fattore di scala nel momento di osservazione ed emissione del fotone.

Adesso, se lo spaziotempo fosse quello di Minkowski (ossia se l'universo fosse piatto) l'intensità luminosa decadrebbe come $1/r^2$ allontanandosi dalla sorgente di luce (ove r è ovviamente la distanza da essa). Questo però in generale non è vero in uno spaziotempo curvo.

Definiamo la *distanza di luminosità* come la distanza che "ripristina" la validità della legge dell'inverso del quadrato della distanza, ossia:

$$d_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi\ell}}$$

ove L è la luminosità intrinseca dell'oggetto e ℓ quella apparente. In questo modo, effettivamente, $\ell \propto d_L^{-2}$. Dobbiamo ora trovare un modo per collegare d_L a r e al rapporto a_0/a_e .

La luminosità osservata dell'oggetto sarà pari a:

$$\ell = \frac{L}{4\pi r^2 a_0^2} \left(\frac{a_e}{a_0} \right)^2$$

Giustificiamo quest'affermazione:

- Il primo fattore è la luminosità dell'oggetto visto da una distanza pari a ra_0 . In questo termine non compaiono termini contenenti k ; ciò potrebbe sembrare non lecito in quanto in un universo curvo la superficie di una sfera di raggio R non è pari a $4\pi R^2$. Questo termine è nonostante ciò corretto in quanto non stiamo considerando i fotoni che raggiungono tutta la superficie della sfera, ma solo quelli contenuti nella piccolissima porzione di questa sottesa dalla nostra osservazione (dai telescopi, ad esempio)¹⁶.
- Il secondo fattore tiene conto della perdita di energia del fotone dovuta all'espansione dell'universo. Infatti (tenendo a mente che ℓ è un'energia per unità di tempo e superficie) la frequenza (e quindi l'energia) del fotone osservato è minore di quella del fotone emesso, ed è riscalata di un fattore:

$$\frac{\nu_0}{\nu_e} = \frac{\lambda_e}{\lambda_0} = \frac{a_e}{a_0}$$

Inoltre, poiché aumenta il periodo dell'onda elettromagnetica associata al fotone, l'energia del fotone viene osservata in un intervallo di tempo più lungo, ossia scalato di un fattore:

$$\frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = \frac{\nu_e}{\nu_0} = \frac{a_0}{a_e}$$

e pertanto ℓ dev'essere ulteriormente riscalata di un fattore $(\Delta t_0/\Delta t_e)^{-1}$.

¹⁴Usiamo queste due grandezze perché entrambi misurabili senza troppe difficoltà.

¹⁵Infatti prendendo la relazione dell'effetto Doppler relativistico ed espandendo l'espressione di v in funzione di z , al primo ordine si trova proprio $v = cz$.

¹⁶Vedi eventualmente Weinberg, *Gravitation and Cosmology* per una giustificazione più approfondita.

Pertanto, indicando d'ora in poi a_e con a , si avrà:

$$d_L = \frac{a_0^2}{a} r = a_0(1+z)r$$

Espandiamo adesso il fattore di scala in serie di Taylor fino al second'ordine attorno a t_0 ¹⁷:

$$a(t) = a_0 + \dot{a}|_{t_0}(t-t_0) + \frac{1}{2}\ddot{a}|_{t_0}(t-t_0)^2 + O(\Delta t^3) = a_0 \left[1 + H_0(t-t_0) + \frac{1}{2} \frac{\ddot{a}}{a|_{t_0}} (t-t_0)^2 + O(\Delta t^3) \right]$$

ove ovviamente $H_0 = \frac{\dot{a}}{a}|_{t_0}$ è la costante di Hubble e $\Delta t = t - t_0$. Definiamo ora il *parametro di decelerazione*:

$$q_0 = - \left[\frac{\ddot{a}}{a} \left(\frac{a}{\dot{a}} \right)^2 \right]_{|t_0} = - \frac{\ddot{a}(t_0)a(t_0)}{\dot{a}(t_0)^2}$$

(che come si vede è una quantità adimensionale), di modo che:

$$a(t) = a_0 \left[1 + H_0 \Delta t - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 \Delta t^2 + \dots \right]$$

Tenendo ora a mente che $(1 + \varepsilon x + \varepsilon^2 y)^{-1} \simeq 1 - \varepsilon x - \varepsilon^2 y + \varepsilon^2 x^2$, allora:

$$\frac{a_0}{a} = \left(1 + H_0 \Delta t - \frac{q_0}{2} H_0^2 \Delta t^2 + \dots \right)^{-1} \simeq 1 - H_0 \Delta t + \frac{q_0}{2} H_0^2 \Delta t^2 + H_0^2 \Delta t^2 + \dots$$

Poiché $a_0/a = 1 + z$:

$$z \simeq H_0(t_0 - t) + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2 (t_0 - t)^2 + \dots = (t_0 - t) \left[H_0 + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0^2 (t_0 - t) + \dots \right]$$

Adesso, portando la parentesi quadra all'altro membro e sostituendovi già la relazione $z \simeq (t_0 - t)H_0 + \dots$ al primo ordine:

$$t_0 - t = z \left[H_0 + \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) H_0 z \right]^{-1} = H_0^{-1} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) z^2 + \dots \right]$$

Abbiamo trovato dunque una relazione fra $\Delta t = t - t_0$ e z . Vogliamo ora legare il tutto a r , e lo si fa integrando il moto del fotone emesso (a θ e φ fissati per lo stesso motivo di prima):

$$\begin{aligned} ds^2 = 0 &\quad \Rightarrow \quad c^2 dt^2 = a(t)^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2} \quad \Rightarrow \quad c dt = \pm a(t) \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow \quad \int_t^{t_0} \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})} = \pm \int_r^0 \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{1 - k\tilde{r}^2}} \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio la scelta degli estremi di integrazione è legata al fatto che all'istante $t = t_e$ il fotone ha coordinata radiale r e all'istante t_0 ha coordinata radiale nulla. Poiché l'integrale è negativo, se l'oggetto emette nel passato dobbiamo scegliere il segno negativo. Pertanto:

$$\int_t^{t_0} \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})} = \int_0^r \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{1 - k\tilde{r}^2}} = f(r) \simeq r + O(r^3)$$

Sostituiamo ora nel primo integrale l'espressione di $a(t)$ che abbiamo determinato prima fino al primo ordine (perché integrando in t il risultato sarà un'espressione al second'ordine):

$$\frac{c}{a_0} \int_t^{t_0} d\tilde{t} [1 - H_0(\tilde{t} - t_0)] \simeq r + \dots$$

e quindi:

$$r \simeq \frac{c}{a_0} \left[t_0 - t + \frac{1}{2} H_0 (t_0 - t)^2 + \dots \right]$$

¹⁷In tutto questo calcolo esponderemo sempre fino al secondo ordine, per non complicare troppo i conti.

Sostituendo $t_0 - t$ in funzione di z si ha:

$$r = \frac{c}{a_0} \left\{ \frac{1}{H_0} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2} \right) z^2 + \dots \right] + \frac{1}{2} H_0 \frac{z^2}{H_0^2} \right\} = \frac{c}{a_0 H_0} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2} - \frac{1}{2} \right) z^2 \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r = \frac{c}{a_0 H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots \right]$$

Pertanto tenendo conto che $d_L = a_0^2 r / a = a_0 (1 + z) r$, si ha:

$$d_L = a_0 (1 + z) \frac{c}{a_0 H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots \right] = \frac{c}{H_0} \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right]$$

Adesso, isolando cz e sostituendo nell'altro membro la relazione al primo ordine $z \simeq H_0 d_L / c$:

$$cz = H_0 d_L - \frac{c}{2} (1 - q_0) \frac{H_0^2 d_L^2}{c^2} \Rightarrow cz = H_0 \left[d_L + \frac{1}{2} (q_0 - 1) \frac{H_0}{c} d_L^2 + \dots \right]$$

Quello che osserviamo è una sorta di effetto Doppler; in realtà però non esiste un sistema di riferimento fissato (come nel caso "classico" dell'effetto Doppler): è lo spazio stesso che si espande. Insomma, l'effetto di redshift osservato non è presente solo perché gli oggetti si allontanano, ma perché lo spazio stesso fra gli oggetti aumenta a seguito dell'espansione dell'universo.

Poiché sono state osservate galassie con valori di redshift molto alti (anche $z = 10$) e cz è la loro velocità nella direzione radiale, queste risultano allontanarsi da noi con velocità superluminali. Questo però non va contro le leggi della fisica: la relatività infatti prevede che nessun oggetto possa muoversi *nello spazio* a velocità maggiori di quella della luce, ma non dice nulla sull'eventuale velocità dovuta all'espansione *dello spazio*.

1.5.1 Alcuni risultati

Introduciamo un'altra distanza, detta *distanza di diametro angolare*. Detta $D_{\text{pr}}(t)$ la distanza propria di un oggetto all'emissione di un fotone, e con $\Delta\theta$ l'angolo sotto cui è sotteso l'oggetto rispetto a noi, allora $D_{\text{pr}}(t) = ar\Delta\theta$, e la distanza di diametro angolare è definita come:

$$d_A \equiv \frac{D_{\text{pr}}}{\Delta\theta} = a(t)r$$

Considerando oggetti sempre più lontani, il loro valore di r sarà via via maggiore (in quanto, appunto, più lontani) mentre quello di a decrescente (più lontano un oggetto è da noi più "vecchio" è, e pertanto più piccolo sarà il suo valore di $a(t)$, dato che l'universo è in espansione).

Dimostriamo ora un risultato che abbiamo sfruttato nella determinazione dell'espressione della legge di Hubble fino al second'ordine, ossia $\lambda_0/\lambda = a_0/a$.

Consideriamo un fotone, o meglio un pacchetto d'onda, emesso da una sorgente a distanza comovente r da noi. Ponendo $ds^2 = 0$ nella metrica di Robertson-Walker e integrando:

$$\int_t^{t_0} \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})} = \int_0^r \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{1 - k\tilde{r}^2}} = f(r)$$

Il pacchetto verrà emesso dall'istante t a $t' = t + \delta t$ (ossia il pacchetto ha durata δt all'emissione), mentre noi lo osserviamo dall'istante t_0 a $t'_0 = t_0 + \delta t_0$. Vogliamo vedere come sono legati δt e δt_0 (che essendo legati alle lunghezze d'onda del pacchetto ci restituiranno la relazione cercata¹⁸).

Poiché la sorgente è ferma¹⁹ in r , allora:

$$f(r) = \int_t^{t_0} \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})} = \int_{t'}^{t'_0} \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})}$$

¹⁸Nota: se la metrica fosse quella di Minkowski e gli osservatori fermi, $\delta t = \delta t_0$.

¹⁹Ovviamente la distanza dalla sorgente cambierà comunque nel tempo a causa dell'espansione dell'universo.

Quindi:

$$\begin{aligned} \int_t^{t_0} \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})} &= \int_{t+\delta t}^{t_0+\delta t_0} \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})} = \int_{t+\delta t}^t \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})} + \int_t^{t_0} \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})} + \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_{t+\delta t}^t \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})} + \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})} &= 0 \quad \Rightarrow \int_t^{t+\delta t} \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})} = \int_{t_0}^{t_0+\delta t_0} \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})} \end{aligned}$$

Usiamo ora il teorema della media, sostituendo all'integrale l'integrando moltiplicato per la larghezza dell'intervallo:

$$\frac{c\delta t}{a(t)} = \frac{c\delta t_0}{a(t_0)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\delta t}{\delta t_0} = \frac{a(t)}{a(t_0)}$$

Poiché $\lambda \propto \delta t$, allora si ha proprio:

$$\frac{\lambda_0}{\lambda} = \frac{a_0}{a}$$

Capitolo 2

Modelli di Friedmann

Se fino ad ora abbiamo dato una descrizione sostanzialmente *statica* dell'universo, adesso ne vogliamo dare una *dinamica* per studiarne l'evoluzione. A questo proposito ciò che faremo sarà ricavare (in contesto newtoniano) e studiare le *equazioni di Friedmann*.

2.1 Deduzione newtoniana delle equazioni di Friedmann

Per dedurre in ambito newtoniano le equazioni di Friedmann ci sarà molto utile un corollario del *teorema di Birkhoff*. Quest'ultimo asserisce che se un corpo è composto da materia distribuita uniformemente con simmetria sferica, allora fuori di esso la metrica dello spaziotempo è quella di Schwarzschild. Il corollario di nostro interesse asserisce invece che se all'interno di questo corpo è presente una cavità che rispetta la simmetria del sistema, all'interno di essa la metrica sarà quella di Minkowski¹.

Questi risultati sono la versione relativistica del teorema di Gauss applicato al campo gravitazionale e al teorema del guscio sferico.

Supponiamo dunque di avere un universo uniformemente riempito di materia (non relativistica) con densità ρ , e di creare una "cavità" sferica al suo interno di raggio ℓ (e pertanto la massa "tolta" è $m = \frac{4\pi}{3}\ell^3\rho$). All'interno di questa cavità, per il corollario prima citato, la metrica dello spaziotempo sarà quella di Minkowski².

Riponendo ora la massa m nella cavità, per essere effettivamente in ambito newtoniano devono valere le condizioni di *campo debole*, ossia:

$$\frac{Gm}{\ell c^2} \ll 1$$

Questa disequazione può essere interpretata in molti modi, fra i quali ad esempio:

$$\tau_{\text{fall}} \propto (G\ell)^{-1/2} \gg \frac{\ell}{c} \quad \ell \gg r_S = \frac{2mG}{c^2}$$

In altre parole, il tempo di caduta di una particella di massa unitaria deve essere molto maggiore del tempo che la luce impiega ad attraversare la cavità, o ancora le dimensioni della cavità devono essere molto maggiori del raggio di Schwarzschild³ della massa m .

Quello che vogliamo fare è studiare il moto di una particella di test (ossia di massa unitaria) sulla superficie della cavità sotto l'effetto del campo gravitazionale della massa m . Si avrà (essendo in ambito newtoniano sfruttiamo il teorema di Gauss):

$$\frac{d^2\ell}{dt^2} = \ddot{\ell} = -\frac{Gm}{\ell^2}$$

Moltiplicando ad ambo i membri per $\dot{\ell}$:

$$\dot{\ell}\ddot{\ell} = -\frac{Gm}{\ell^2}\dot{\ell} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{\ell}^2) = \frac{d}{dt}\frac{Gm}{\ell}$$

¹Nota: il teorema richiede che la distribuzione sia uniforme, *non statica*.

²Il nostro obiettivo è porci nelle condizioni di poter usare la fisica newtoniana (ossia porre le condizioni di campo debole). In genere, però, questo lo si fa in un universo vuoto; nel nostro caso abbiamo bisogno che la metrica sia quella di Minkowski, e poi (come vedremo nel passaggio successivo) andremo a "perturbare" questa situazione reinserendo la massa.

³Il raggio di Schwarzschild è quel raggio che il corpo deve avere affinché la sua velocità di fuga sia pari a quella della luce.

Dunque⁴:

$$\frac{1}{2}\dot{\ell}^2 - \frac{Gm}{\ell} = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}\dot{\ell}^2 - \frac{4\pi}{3}G\ell^2\rho = \text{cost.}$$

che altro non è che la condizione della conservazione dell'energia totale della particella.

Ponendo $\ell(t) = a(t)r$ (è una nostra scelta)⁵:

$$\frac{1}{2}\dot{a}^2 r^2 - \frac{4\pi G}{3}a^2 r^2 \rho = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad \dot{a}^2 - \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 = \frac{2 \cdot \text{cost.}}{r^2} \equiv -kc^2$$

ove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che la costante è proporzionale all'energia della particella, ossia all'energia per unità di massa dato che la particella è di test. Quindi:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - kc^2$$

che è proprio la prima equazione di Friedmann.

Per quanto riguarda la seconda:

$$\ddot{\ell} = -\frac{Gm}{\ell^2} = -\frac{4\pi}{3}G\rho\ell \quad \Rightarrow \quad \ddot{a} = -\frac{4\pi}{3}G\rho a$$

e notiamo che manca il termine con P (si tratta infatti di un contributo prettamente relativistico, che ovviamente non compare in ambito newtoniano).

Per ricavare la terza sfruttiamo il fatto che m è costante (ponendo sempre $\ell = ar$):

$$0 = \dot{m} = \frac{4\pi}{3} \frac{d}{dt}(\rho\ell^3) \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho}\ell^3 + 3\dot{\ell}\ell^2\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = -3\frac{\dot{\ell}}{\ell}\rho = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho$$

e ovviamente anche in questo caso manca il termine relativistico contenente P .

Riconsideriamo un attimo la prima equazione. Nel ricavarla abbiamo visto che (chiamiamo μ la massa della particella):

$$\frac{\dot{\ell}^2}{2} - \frac{4m}{\ell} = \frac{E}{\mu} \propto -kc^2$$

Se dunque $k = 1$, l'energia totale è negativa, e l'universo collassa su se stesso dopo un eventuale espansione iniziale (così come un sasso lanciato con velocità minore di quella di fuga della Terra ha energia negativa e prima o poi ricade al suolo); se invece $k = -1$ l'energia è positiva, e l'universo si espande (il sasso sfugge al campo gravitazionale della Terra).

Come abbiamo già detto, questo è il vincolo della conservazione dell'energia della particella: poiché la prima equazione di Friedmann ne è una conseguenza, ciò significa che l'equazione stessa è un vincolo. Ciò lo si può dedurre anche dal fatto che la prima equazione di Friedmann non è un'equazione dinamica, non contenendo derivate seconde rispetto al tempo.

In realtà in ambito non relativistico possiamo ricavare la terza equazione di Friedmann anche con il termine relativo a P . Supponendo infatti che il fluido cosmico sia perfetto (ossia un fluido senza anisotropie di nessun tipo, quindi senza gradienti di pressione o temperatura), questo dovrà essere soggetto a trasformazioni adiabatiche, pertanto:

$$dE + PdV = 0 \quad V \propto a^3 \quad E \propto \rho c^2 a^3 \quad \Rightarrow \quad d(\rho c^2 a^3) + Pda^3 = 0$$

che è un'equazione formalmente identica alla terza equazione di Friedmann⁶.

⁴Notare che in tutto questo ragionamento la massa è considerata costante.

⁵In generale si può porre $\ell(t) = a(t)r$ con r coordinata comovente adimensionale per la validità del principio cosmologico; r può essere sempre scelta piccola a piacere di modo che ad ogni istante valga la condizione di campo debole.

⁶Infatti:

$$\begin{aligned} d(\rho c^2 a^3) + Pda^3 &= c^2 a^3 d\rho + \rho c^2 da^3 + Pda^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^3 d\rho + \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) da^3 = 0 \quad \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \dot{\rho} a^3 + \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) 3a^2 \dot{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{P}{c^2}\right) \end{aligned}$$

Insomma, col vincolo della conservazione dell'energia e la richiesta di adiabaticità si ottengono la prima e la terza equazione, e la seconda è conseguenza della validità di queste. Di queste tre equazioni, quindi, solo due sono indipendenti.

Ora, in realtà queste equazioni dovrebbero essere ricavate dalle equazioni di Einstein (quelle che regolano la relatività generale), e lo si fa imponendo le simmetrie del sistema (il principio cosmologico) a queste equazioni; in questo modo si ottengono effettivamente le prime due equazioni di Friedmann. La terza, invece, "sta per conto suo" in quanto deriva dalle identità di Bianchi. Dalla prima infatti, derivando rispetto al tempo:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - kc^2 \quad \Rightarrow \quad 2\dot{a}\ddot{a} - \frac{8\pi G}{3}\dot{\rho}a^2 - \frac{16\pi G}{3}\rho\dot{a}a = 0$$

Sostituendo $\dot{\rho}$ dalla terza:

$$2\dot{a}\ddot{a} + 8\pi G\dot{a}a \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) - \frac{16\pi G}{3}\rho\dot{a}a = 0$$

Dividendo per $2\dot{a}$:

$$\begin{aligned} \ddot{a} + 4\pi G\dot{a}a \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right) - \frac{8\pi G}{3}\rho a = 0 & \Rightarrow \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}3\rho + \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{4\pi G}{3}3\frac{P}{c^2} \quad \Rightarrow \\ & \Rightarrow \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{P}{c^2} \right) \end{aligned}$$

che è proprio la seconda equazione di Friedmann.

2.2 L'equazione di stato

Ci proponiamo adesso di risolvere le equazioni di Friedmann, ossia determinare delle espressioni esplicite per le funzioni $a(t)$, $\rho(t)$ e $P(t)$.

Abbiamo visto che solo due di queste equazioni sono indipendenti; poiché le nostre incognite sono tre, abbiamo bisogno di introdurre un'altra equazione per poterle risolvere.

Il grado di libertà che ancora dobbiamo specificare è il tipo di fluido che stiamo considerando, insomma dobbiamo ancora specificare l'equazione di stato del fluido cosmico.

Un fluido perfetto è caratterizzato soltanto da densità di energia e pressione isotropa. Dobbiamo quindi assumere che:

$$P = P(\rho)$$

Un fluido di questo tipo è detto *barotropico*.

Per comodità (ma lo si fa anche perché in molti casi concreti accade), possiamo supporre che questa relazione sia lineare:

$$P = w\rho c^2$$

ove w è una costante adimensionale.

Notiamo che dare l'equazione di stato di un fluido significa fornirne informazioni a livello microscopico (ciò vale solo se il fluido è omogeneo, cosa vera perché vale il principio cosmologico).

Sostituendo dunque nella terza equazione di Friedmann:

$$\dot{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}\rho \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} \quad \Rightarrow \quad \rho \propto a^{-3(1+w)}$$

Insomma, l'equazione di stato impone come la densità d'energia vari al variare del fattore di scala. Pertanto, sostituendo nella prima equazione di Friedmann potremmo risolvere l'equazione per a , ma in genere non è possibile farlo analiticamente.

Consideriamo ora un po' di casi particolari, a seconda del valore di w :

$w = 0$: In questo caso $P = 0$, ossia la pressione è effettivamente nulla o comunque trascurabile rispetto alla densità di energia; questo è il caso di un universo composto da particelle non relativistiche (infatti P è il termine delle equazioni di Friedmann nel quale viene “inglobato” tutto ciò che non è dovuto alla gravità). Allora $\rho \propto a^{-3}$, e pertanto la massa (o meglio il numero di particelle) è conservata.

$w = 1/3$: In questo caso $P = \rho c^2/3$ è detta “pressione di radiazione”, perché questo è il caso relativo ad un universo composto da sola radiazione. Definendo la *velocità del suono adiabatica* come:

$$C_s^2 = \frac{dP}{d\rho} = wc^2$$

nel caso $w = 1/3$ si ha $C_s = c/\sqrt{3}$. P è dunque la pressione esercitata da particelle ultrarelativistiche. Considerando ρ si ha $\rho \propto a^{-4}$ (infatti la densità di fotoni è proporzionale a a^{-3} , mentre l’energia di un singolo fotone è proporzionale alla sua frequenza, ossia ad a^{-1}): nel caso di un universo composto di sola radiazione l’energia non è conservata (infatti ρa^3 non è costante)

$w = 1$: In questo caso $P = \rho c^2$ e $C_s = c$, ed è il caso rappresentativo della “materia incompressibile” (che ha pochissimo interesse in cosmologia).

In questo caso $\rho \propto a^{-6}$.

$w = -1$: Allora $P = -\rho c^2$, e C_s non ha significato (è immaginaria pura). Si tratta del caso relativo a un universo composto di energia oscura (poiché ha pressione negativa, il fluido cosmico è un *fluido esotico*).

In questo caso ρ è costante.

L’universo reale però non è composto da un solo fluido, ma è costituito da più componenti (materia, radiazione ecc.), e quindi ci aspettiamo che ci sia interazione fra questi fluidi.

In prima approssimazione, però, ogni fluido obbedisce alla propria equazione di stato e ha la propria densità d’energia; i vari contributi, però, cambiano nel tempo in modo diverso, come abbiamo appena visto, e in particolare l’unico che domina a grandi tempi (ossia a grandi valori di a) è quello relativo all’energia oscura (perché è l’unico a non decadere). Insomma, se facciamo un grafico delle densità di energia delle varie componenti dell’universo in funzione di a otteniamo:

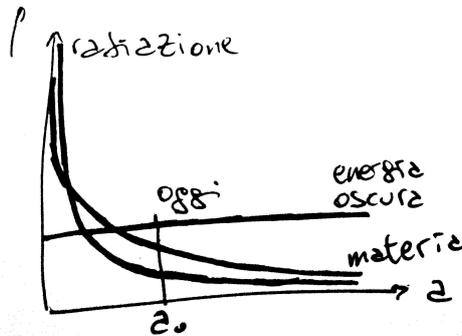


Figura 2.1: Andamento della densità delle varie componenti dell’universo in funzione di a

Possiamo dunque immaginare che l’universo nel corso della sua evoluzione sia andato incontro a varie fasi, durante ognuna delle quali la sua composizione è stata dominata da una componente particolare.

In tutto questo ragionamento abbiamo trascurato il ruolo della curvatura spaziale; poiché il suo contributo decade lentamente (nella prima equazione di Friedmann infatti k compare insieme ad a^{-2}), tenderà a dominare molto “tardi”, e soprattutto sarà stata irrilevante in epoche primordiali (perché di qualche ordine di grandezza inferiore ai contributi relativi a materia e radiazione, ad esempio).

2.3 La costante cosmologica

Storicamente la ricerca di una soluzione delle equazioni di Friedmann venne fortemente influenzata dalle esigenze “filosofiche” sottostanti alle equazioni stesse. In particolare, Einstein voleva trovare delle soluzioni *statiche*

delle equazioni di Friedmann, perché era mosso dalla “necessità” che l’universo fosse statico. Insomma, considerando il caso $P = 0$ (Einstein infatti ragionava in termini di materia ordinaria, per la quale come abbiamo già visto la pressione è trascurabile) è possibile trovare una soluzione delle equazioni con $a(t) = \text{cost.}$? Imponendo $\dot{a} = \ddot{a} = 0$ nella prima e nella seconda equazione di Friedmann:

$$\frac{8\pi G}{3}\rho = \frac{kc^2}{a^2} \quad \rho = 0$$

Giungiamo dunque subito ad una situazione paradossale.

Dato che la sua “esigenza filosofica” di descrivere un universo statico era molto forte, Einstein propose di modificare le sue equazioni in modo da ottenere soluzioni statiche (sensate) delle equazioni di Friedmann.

Le equazioni di Einstein, che regolano la relatività generale, sono:

$$G_{ab} = 8\pi GT_{ab}$$

ove T_{ab} è il tensore energia-impulso, mentre G_{ab} è il tensore simmetrico:

$$G_{ab} = R_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}R$$

ove, a sua volta, R_{ab} è il tensore di Ricci, g_{ab} è la metrica dello spaziotempo e R è lo scalare di Ricci⁷. È da queste (imponendo le giuste simmetrie) che si ricavano le equazioni di Friedmann.

Se vogliamo modificare queste equazioni non abbiamo molta scelta sulle aggiunte che si possono fare: per consistenza dovremo usare oggetti tensoriali, simmetrici e in accordo con le identità di Bianchi.

Einstein modificò l’espressione di G_{ab} in:

$$G_{ab} - \Lambda g_{ab} = 8\pi GT_{ab}$$

ove Λ è una costante, detta *costante cosmologica*.

Una nota: Einstein propose il nuovo termine “a sinistra”, dalla parte “geometrica” dell’equazione; oggi invece si tende a scrivere l’equazione come:

$$G_{ab} = 8\pi G\tilde{T}_{ab} \quad \tilde{T}_{ab} = T_{ab} + \frac{\Lambda}{8\pi G}g_{ab}$$

perché oggi si ritiene che la costante cosmologica possa aver a che fare con la sorgente del campo gravitazionale (e dunque la “inglobiamo” nel tensore energia-impulso).

Consideriamo ora T_{ab} : per un fluido perfetto, questo dipenderà solo dalla densità d’energia e dalla pressione. In una situazione fortemente simmetrica come la nostra⁸ gli unici suoi elementi non nulli saranno $T_{00} = \rho$ e $T^i_i = -P$. Pertanto, denotando con $\tilde{\rho}$ e \tilde{P} la densità d’energia e la pressione che discendono da \tilde{T}_{ab} ⁹:

$$\tilde{\rho} = \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} \quad \tilde{P} = P - \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} = -\frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$$

Insomma, introducendo Λ abbiamo “shiftato” i valori di ρ e P ; in altre parole, possiamo dire che abbiamo “cambiato” il fluido perfetto considerato.

Riscriviamo dunque le equazioni di Friedmann sostituendo ρ con $\tilde{\rho}$ e P con \tilde{P} ; facendolo nella prima equazione (e imponendo che l’universo sia statico):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\tilde{\rho} - \frac{kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \stackrel{!}{=} 0$$

⁷Esistono poi delle equazioni “aggiuntive”:

$$T^a_{b;a} = 0 \quad G^a_{b;a} = 0$$

La prima è un’equazione di continuità, mentre la seconda è l’identità di Bianchi. Notare che il punto e virgola rappresenta la derivata covariante.

⁸Ricordiamoci che per noi varrà sempre il principio cosmologico!

⁹Nota: Λ deve effettivamente essere una costante per non violare la trasformazione per coordinate generalizzate.

Nella seconda, invece:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\tilde{\rho} + 3\frac{\tilde{P}}{c^2} \right) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \rho + \frac{\Lambda c^2}{8\pi G} - \frac{3\Lambda c^2}{8\pi G} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{\Lambda c^2}{4\pi G}$$

Sostituendo questo risultato nella prima equazione:

$$\frac{8\pi G}{3} \frac{\Lambda c^2}{4\pi G} + \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{kc^2}{a^2} \quad \Rightarrow \quad \Lambda = \frac{k}{a^2}$$

Sostituendo nella terza equazione, invece, i due “nuovi contributi” a ρ e P si elidono, lasciando l’equazione inalterata.

Introducendo quindi una costante cosmologica Λ , si possono trovare soluzioni statiche delle equazioni di Friedmann.

A questo punto, però, Friedmann stesso studiò le piccole perturbazioni attorno a questa soluzione¹⁰, determinando che queste crescono nel tempo: la soluzione statica proposta da Einstein, dunque, non è stabile. Venne pertanto abbandonata rapidamente l’idea di un universo statico, e effettivamente qualche tempo dopo, negli anni ’30, le osservazioni di Hubble avvalorarono l’ipotesi che l’universo in realtà è dinamico, e in espansione.

Einstein ritenne che l’introduzione di Λ fosse stato il più grande errore della sua vita; in realtà, pur con una giustificazione sbagliata, l’introduzione della costante cosmologica è ciò che consente di avere una pressione isotropa P negativa. Insomma, Λ non va inserita con l’obiettivo di “staticizzare” l’universo, ma al contrario per poterne spiegare l’espansione accelerata.

Riscriviamo le equazioni di Friedmann contenenti la costante cosmologica:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2} \quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{P}{c^2} \right) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad \dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{P}{c^2} \right)$$

Per comprendere meglio il ruolo di Λ possiamo provare a fare una supposizione estrema, ossia supporre che nelle equazioni ci siano solo i termini che la contengono (mandando a zero gli altri); insomma, vogliamo provare a considerare un universo senza materia ordinaria né oscura per vedere come la presenza di Λ ne influenzi le proprietà.

Le soluzioni delle equazioni in questa situazione sono dette di *de Sitter* se $\Lambda > 0$ o *anti-de Sitter* se $\Lambda < 0$.

Consideriamo anche $k = 0$ perché sappiamo che la curvatura attuale dell’universo è trascurabile. Allora dalla prima equazione:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{\Lambda c^2}{3} \quad \Rightarrow \quad H = \frac{\dot{a}}{a} = c\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad a(t) = a_0 \exp \left[c\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}(t - t_0) \right]$$

ossia $a(t) \propto e^{Ht}$. Notiamo che le soluzioni di de Sitter portano ad un parametro di Hubble costante nel tempo; per questo questa soluzione è detta *stazionaria*. Si tratta del modello che fino a qualche tempo fa competé con quello del Big Bang; si tratta comunque di un modello interessante anche oggi proprio perché nell’universo verifichiamo effettivamente qualcosa con effetti simili a quelli della costante cosmologica che guida l’espansione accelerata dell’universo¹¹.

Ora, il caso in cui è presente la sola costante cosmologica corrisponde all’equazione di stato per il fluido cosmico con $w = -1$. In questo caso $\dot{\rho} = -3H(\rho + P) = 0$ e pertanto $\rho = \text{cost.}$, mentre in tutti gli altri casi $\rho \propto a^{-3(1+w)}$, ossia ρ decresce nel tempo. Pertanto, essendo la componente relativa alla costante cosmologica l’unica a non diminuire nel tempo, sarà quella che dominerà asintoticamente la composizione dell’universo. Insomma, se una costante cosmologica effettivamente esiste questa tenderà ad essere la componente sempre più dominante dell’universo; in altre parole, se in un universo c’è energia oscura questo è destinato ad esserne riempito.

¹⁰L’universo infatti non è perfettamente omogeneo, quindi delle (sperabilmente) piccole perturbazioni ci saranno sempre.

¹¹Nota: questo caso è fondamentalmente identico a quello relativo all’energia oscura, esaminato in 2.2, cioè con $w = -1$ nell’equazione di stato; poiché come abbiamo detto in questo caso ρ è costante, un modello stazionario come questo prevede che nell’espansione dell’universo si crei materia.

2.4 Soluzione delle equazioni di Friedmann

2.4.1 Modelli di Einstein-de Sitter

Vogliamo ora risolvere le equazioni di Friedmann, ossia trovare un'espressione esplicita di $a(t)$, $\rho(t)$ e $P(t)$, tenendo conto dell'equazione di stato $P = w\rho c^2$.

Abbiamo già visto che sostituendo nella terza equazione si ha:

$$\dot{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a}\rho \quad \Rightarrow \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} \quad \Rightarrow \quad \rho(t) = \rho_* \left(\frac{a(t)}{a_*}\right)^{-3(1+w)}$$

La prima equazione di Friedmann è:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}$$

In tutti i casi in cui $w < -1/3$, il primo termine del secondo membro domina sul secondo (perché se $w < -1/3$ allora $-3(1+w) > -2$).

Oggi sappiamo che la curvatura dell'universo è trascurabile e quindi tale è anche il termine kc^2/a^2 (a maggior ragione ciò sarà stato vero nell'universo primordiale, come abbiamo già visto).

Trascurando dunque k e sostituendo ρ :

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3} \underbrace{\rho_* a_*^{3(1+w)}}_{\equiv A^2} a^{2-3(1+w)} = A^2 a^{2-3(1+w)} \quad \Rightarrow \quad \dot{a} = \pm A a^{-\frac{1+3w}{2}}$$

Separando le variabili:

$$a^{\frac{1+3w}{2}} da = \pm A dt$$

Scegliendo la soluzione positiva, in quanto l'universo osservativamente è in espansione, e integrando (tenendo conto di tutte le possibili costanti di integrazione), si ottiene:

$$a(t) = a_* \left[1 + \frac{3}{2}(1+w)H_*(t-t_*) \right]^{\frac{2}{3(1+w)}} \quad H_* = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}\rho_*}$$

Notiamo che se $k = 0$ il valore assoluto di a (ossia il valore di a_*) è irrilevante (sostituendo nella prima equazione di Friedmann con $k = 0$, infatti, il termine a_* si semplifica ovunque).

Sostituendo nell'espressione di ρ , e dunque P , si ha:

$$\rho(t) = \rho_* \left(\frac{a_*}{a}\right)^{3(1+w)} = \rho_* \left[1 + \frac{3}{2}(1+w)H_*(t-t_*) \right]^{-2} \quad P(t) = w\rho(t)c^2$$

A questo punto possiamo anche determinare $H(t) = \dot{a}(t)/a(t)$:

$$H(t) = H_* \left[1 + \frac{3}{2}(1+w)H_*(t-t_*) \right]^{-1}$$

Formalmente, dunque, il problema è risolto.

Analizzando l'espressione del fattore di scala, esisterà un tempo t_{BB} in cui il contenuto della parentesi si annulla; se la potenza è positiva allora in quell'istante anche a sarà nullo, mentre sia ρ che H tendono a infinito per $t \rightarrow t_{BB}$. Insomma, abbiamo una singolarità *fisica*: si tratta del *Big Bang*.

Il valore di t_{BB} è:

$$1 + \frac{3}{2}(1+w)H_*(t_{BB} - t_*) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{BB} = t_* - \frac{2}{3}H_*^{-1}(1+w)^{-1}$$

Definendo dunque un nuovo tempo:

$$t_{\text{new}} = t - t_{BB} = t - t_* + \frac{2}{3} \frac{H_*^{-1}}{1+w}$$

che chiameremo t d'ora in poi, a $t = 0$ si avrà la singolarità del Big Bang. In questo modo $a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}$. Sappiamo che $\rho \propto t^{-2}$, ma in dettaglio sostituendo tutte le costanti si ha:

$$\rho(t) = \frac{1}{6(1+w)^2\pi G} t^{-2}$$

e inoltre:

$$H(t) = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{2}{3(1+w)} t^{-1}$$

Vediamo ora cosa accade in un po' di casi particolari, ossia quando w assume determinati valori.

$w = 0$: Come sappiamo è il caso in cui l'universo è dominato da materia (ordinaria e oscura) non relativistica. Si ha:

$$a(t) \propto t^{2/3} \quad \rho = \frac{1}{6\pi G} t^{-2} \quad H(t) = \frac{2}{3} t^{-1}$$

Ora, in base all'ultima relazione possiamo cercare di determinare l'età dell'universo, dato che conosciamo il valore odierno della costante di Hubble H_0 :

$$t_0 = \frac{2}{3H_0}$$

Si trova che l'età dell'universo è di circa 10 miliardi di anni; tuttavia da altre osservazioni sperimentali sappiamo che in realtà l'età dell'universo è di circa 13.8 miliardi di anni. Si presentano dunque due aspetti:

- uno positivo, ossia il modello che stiamo costruendo funziona bene perché restituisce correttamente gli ordini di grandezza delle quantità in gioco
- uno negativo perché comunque la predizione non è corretta, e quindi c'è qualcosa che non stiamo tenendo in conto: o l'universo è effettivamente piatto o ci sono componenti che non stiamo considerando (ed è questo il caso, con l'energia oscura)

Da ciò possiamo anche capire come sicuramente oggi l'universo non sia dominato dalla materia.

$w = 1/3$: Nel caso della radiazione:

$$a(t) \propto t^{1/2} \quad \rho(t) = \frac{3}{32\pi G} t^{-2} \quad H(t) = \frac{1}{2} t^{-1}$$

$w = -1$: Nel caso dell'energia oscura, se sostituissimo direttamente $w = -1$ nell'espressione di a questo risulterebbe infinito. La forma di a però è simile a quella di un esponenziale. Ricordiamoci infatti che:

$$e^x = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon x)^{1/\varepsilon}$$

Pertanto:

$$a(t) = a_* \exp [H_*(t - t_*)] \propto e^{Ht}$$

Inoltre, ρ e P risultano costanti. Si ricade pertanto nell'ambito di modelli di de Sitter.

Tutti questi modelli che abbiamo visto, nei quali si ragiona in un universo piatto, sono detti di *Einstein-de Sitter*.

Considerando un attimo il redshift, nel caso $w = 0$ si ha¹²:

$$1 + z = \frac{a_0}{a} = \left(\frac{t_0}{t}\right)^{2/3} = \left(\frac{2}{3} H_0^{-1} t^{-1}\right)^{2/3}$$

e quindi dato il redshift di un fotone possiamo risalire all'epoca al quale è stato emesso.

In questo stesso caso il parametro di decelerazione è $q = 1/2$, e quindi come ci aspettiamo un universo dominato dalla materia è decelerato (e quindi collasserà).

¹²Tenendo a mente che $a(t) = a_0(t/t_0)^{2/3}$.

2.4.2 Modelli curvi

Vediamo ora cosa accade quando la curvatura dell'universo non è nulla. Vogliamo insomma determinare la soluzione delle equazioni di Friedmann nel caso in cui sia presente materia ($w = 0$) e curvatura, ma non energia oscura; lo facciamo perché in questo caso le equazioni sono risolubili analiticamente.

Le equazioni che vogliamo risolvere sono insomma (usiamo unità naturali):

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - k \quad \dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}\rho$$

dalla seconda abbiamo:

$$\rho(t) = \rho_0 \left(\frac{a(t)}{a_0}\right)^{-3} = \rho_0 a_0^3 a(t)^{-3}$$

e quindi sostituendo nella prima:

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a_0^3 a(t)^{-1} - k$$

La soluzione esplicita di quest'equazione non è nota, è nota solo la sua espressione parametrica, che ora determineremo.

Facciamo una piccola parentesi su come si risolvono le equazioni differenziali in forma parametrica.

Vogliamo risolvere $y = f(y')$ con f' continua; poniamo $y' \equiv p$ con p parametro e $p' \neq 0$. Riscrivendo l'equazione come $y = f(p)$ e differenziando (chiamando x la variabile indipendente):

$$y' = \frac{df}{dp}p' \quad \Rightarrow \quad p = \frac{df}{dp}p' \quad \Rightarrow \quad \frac{dx}{dp} = \frac{1}{p} \frac{df}{dp} \quad \Rightarrow \quad x = \int \frac{1}{p} \frac{df}{dp} dp$$

Pertanto la soluzione dell'equazione è:

$$\begin{cases} y = f(p) \\ x = \int \frac{1}{p} \frac{df}{dp} dp \end{cases}$$

che ovviamente è utile se sappiamo calcolare l'integrale che definisce x .

Tornando all'equazione che vogliamo risolvere, la riscriviamo come:

$$\dot{a}^2 = Aa^{-1} - k \quad \text{con} \quad A = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 a_0^3, \quad \text{e se } p \equiv \dot{a} \text{ allora} \quad a = \frac{A}{p^2 + k}$$

Dunque:

$$p = \dot{a} = -2App \frac{1}{(p^2 + k)^2} \quad \Rightarrow \quad 1 = -\frac{2A}{(p^2 + k)^2} \frac{dp}{dt} \quad \Rightarrow \quad t = -2A \int \frac{dp}{(p^2 + k)^2}$$

Modello chiuso

Se $k = 1$, allora (nel secondo passaggio si è effettuato il cambio di variabile $p = \tan \alpha$):

$$t = -2A \int \frac{dp}{(p^2 + 1)^2} = -2A \int \cos^2 \alpha d\alpha = -A(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha) + \text{cost.} = -\frac{A}{2}(2\alpha + \sin(2\alpha)) + \text{cost.}$$

Definendo poi $2\alpha = \pi - \theta$ allora:

$$t = \frac{A}{2}(\theta - \sin \theta)$$

ove abbiamo posto la costante d'integrazione di modo da annullare tutte le costanti residue.

Dunque:

$$p = \tan \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \cot \frac{\theta}{2}$$

e quindi:

$$a = \frac{A}{\tan^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) + 1} = A \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \right) = \frac{A}{2}(1 + \cos^2(\pi - \theta)) = \frac{A}{2}(1 - \cos \theta)$$

ove abbiamo sfruttato il fatto che $\cos^2 \theta = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\theta))$.

Pertanto, nel caso $k = 1$ si ha:

$$\begin{cases} a(\theta) = \frac{A}{2}(1 - \cos \theta) \\ t(\theta) = \frac{A}{2}(\theta - \sin \theta) \end{cases}$$

Riscriviamole in termini di parametri osservabili, come H_0 e Ω_0 ; si ha:

$$\Omega_0 = \frac{\rho_0}{\rho_{0c}} = \frac{8\pi G \rho_0}{3H_0^2} \quad \Omega_0 - 1 = \frac{kc^2}{a_0^2 H_0^2} = \frac{1}{a_0^2 H_0^2} \quad \Rightarrow \quad a_0^2 H_0^2 = \frac{1}{\Omega_0 - 1}$$

Quindi¹³:

$$\begin{cases} a(\theta) = \frac{a_0}{2} \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} (1 - \cos \theta) \\ t(\theta) = \frac{H_0^{-1}}{2} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} (\theta - \sin \theta) \end{cases}$$

Notiamo che fintanto che $0 \leq \theta < \theta_{\max} = \pi$ si ha $\dot{a} > 0$, per $\theta = \theta_{\max} = \pi$ si ha $\dot{a} = 0$ e che per $\pi \leq \theta < 2\pi$ si ha $\dot{a} < 0$. Ciò è espressione del fatto che in questo caso l'espansione dell'universo decelera, portando l'universo a collassare su se stesso.

Graficamente:

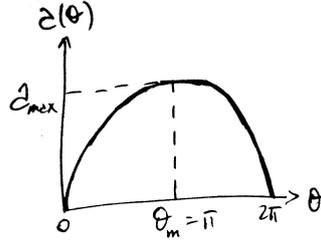


Figura 2.2: Andamento di $a(\theta)$

Il punto di turn-around si ha all'istante:

$$t(\theta_{\max}) = \frac{\pi}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}}$$

e la vita dell'universo è:

$$2t(\theta_{\max}) = \frac{\pi}{H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}}$$

Proviamo a confrontare le età di un universo piatto e uno chiuso, a parità del valore della costante di Hubble. Per quello piatto sappiamo che $t_0 = 2/(3H_0)$. Per determinare l'età di un universo di Friedmann chiuso, invece, ricaviamo θ dalla prima equazione ponendo $a(t) = a_0$:

$$2 = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} (1 - \cos \theta) \quad \Rightarrow \quad \theta = \arccos \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right)$$

e sostituendo nell'equazione per t (tenendo a mente che $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}$):

$$t_0 = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}} \left[\arccos \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right) - \frac{2}{\Omega_0} \sqrt{\Omega_0 - 1} \right] < \frac{2}{3H_0}$$

Pertanto, a parità del valore della costante di Hubble H_0 un universo chiuso è più giovane di uno piatto.

¹³Notando che:

$$\frac{8\pi G}{3} \rho_0 a_0^2 = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0 a_0^2 H_0^2 = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1} \quad \frac{8\pi G}{3} \rho_0 H_0 a_0^3 = \frac{8\pi G}{3H_0^2} \rho_0 H_0^3 a_0^3 = \frac{\Omega_0}{(\Omega_0 - 1)^{3/2}}$$

Modello aperto

Consideriamo ora il caso $k = -1$. L'unica differenza rispetto al caso precedente è che dobbiamo usare funzioni iperboliche al posto di quelle goniometriche. Chiamando ψ la nuova variabile indipendente (quella che prima era θ), si ha:

$$\begin{cases} a(\psi) = \frac{a_0}{2} \frac{\Omega_0}{1-\Omega_0} (\cosh \psi - 1) \\ t(\psi) = \frac{H_0^{-1}}{2} \frac{\Omega_0}{(1-\Omega_0)^{3/2}} (\sinh \psi - \psi) \end{cases}$$

Per quanto riguarda il confronto fra le età di un universo aperto e uno piatto a parità di H_0 , procedendo esattamente come nel caso chiuso (tenendo conto però stavolta che $\sinh(\operatorname{arccosh} x) = \sqrt{x^2 - 1}$):

$$\psi = \operatorname{arccosh} \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right) \quad \Rightarrow \quad t_0 = \frac{1}{2H_0} \frac{\Omega_0}{(1-\Omega_0)^{3/2}} \left[\operatorname{arccosh} \left(\frac{2}{\Omega_0} - 1 \right) - \frac{2}{\Omega_0} \sqrt{1-\Omega_0} \right] > \frac{2}{3H_0}$$

Pertanto, un universo aperto è più vecchio di uno piatto con lo stesso valore della costante di Hubble.

Risulta quindi che $t_0^{k=1} < t_0^{k=0} < t_0^{k=-1}$.

Considerazioni finali

Facendo un grafico di $a(t)$ nei tre possibili casi, risulta:

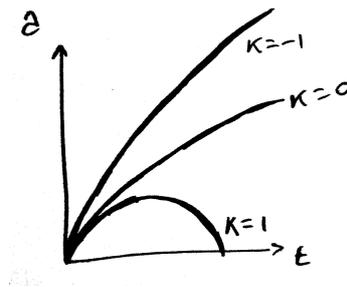


Figura 2.3: Andamento di a nel caso di universo chiuso, piatto e aperto

Questo, però, è quello che accade “a parità di partenza”, cioè supponendo che i tre tipi di universo evolvano dallo stesso punto iniziale. Noi invece misuriamo H_0 , e quindi siamo più interessati a confrontare i tre casi a parità di H_0 oggi (ossia a parità della tangente della curva a un dato t). In questo caso si ha:

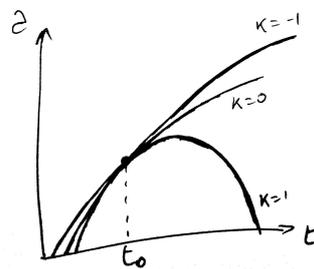


Figura 2.4: Andamento di a nei tre possibili casi a parità di H_0

Il fatto che l'universo risulti più vecchio del tempo di Hubble (che è H_0^{-1} , pari a circa 10 miliardi di anni) è evidenza del fatto che l'universo è aperto.

Dalla seconda equazione di Friedmann:

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3P)a = -\frac{4\pi G}{3}\rho(1 + 3w)a$$

e quindi affinché l'espansione dell'universo sia decelerata, come sappiamo, si deve avere $w > -1/3$. Facendo un grafico di a contro t nel caso di espansione decelerata:

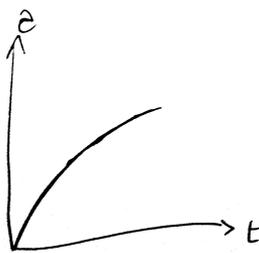


Figura 2.5: Andamento di a per un fluido ordinario

e l'andamento di a è questo indipendentemente dalla curvatura dell'universo. Se invece l'espansione dell'universo è accelerata:

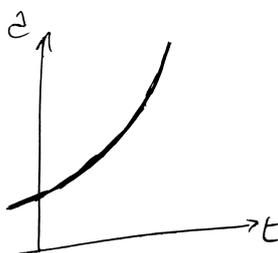


Figura 2.6: Andamento di a per un fluido esotico

e quindi non è detto che si raggiunga effettivamente la condizione $a = 0$.

Insomma, la singolarità iniziale è legata al fatto di avere un'equazione di stato con $w > -1/3$. Pertanto, per i fluidi ai quali siamo abituati la singolarità è *inevitabile*; per aggirarla c'è bisogno che nell'universo primordiale ci fosse una componente con una pressione sufficientemente negativa.

Ciò, come vedremo, porterà alla formulazione della teoria dell'*inflazione*, la quale permetterà appunto di evitare la singolarità iniziale.

Capitolo 3

Storia termica dell'universo

Lo studio della storia dell'universo al variare della sua temperatura è di estremo interesse. Infatti, storicamente per poter spiegare l'abbondanza osservata di alcuni elementi (come ${}^4\text{He}$) si suppose che questi esistessero già prima della formazione delle prime stelle (altrimenti non si potrebbe spiegare perché ${}^4\text{He}$, pur essendo continuamente bruciato nei processi che avvengono all'interno delle stelle, sia comunque uno degli elementi più abbondanti dell'universo): si tratta della teoria della *nucleosintesi primordiale*, la quale richiede che in principio l'universo avesse una temperatura molto alta; questa teoria ha anche previsto l'esistenza della radiazione cosmica di fondo.

Tuttavia, il termine "temperatura" a cosa è riferito?

È difficile infatti parlare di una temperatura attuale "dell'universo"; molto più semplice è invece definirla per epoche passate, ad esempio quando elettroni e fotoni interagivano continuamente tramite scattering Compton, e si trovavano dunque all'equilibrio termico. Insomma, ha senso parlare di temperatura (in quanto ha senso parlare di equilibrio termico) fra le varie componenti dell'universo fino a che queste interagiscono (dopodiché ogni componente avrà la sua temperatura, e si comporterà come un sistema termodinamico isolato dall'altro).

In un universo dominato da radiazione, si ha:

$$P = \frac{1}{3}\rho \quad \rho \propto a^{-4} \quad \rho \propto T^4 \quad \Rightarrow \quad T \propto a^{-1}$$

Inoltre $a \propto t^{1/2}$, e quindi $T \propto t^{-1/2}$: siamo dunque in grado di collegare la temperatura della radiazione ad una data epoca dell'universo (primordiale).

Ciò che ci proponiamo di fare è di descrivere, in funzione della temperatura T e del potenziale chimico μ , le densità numerica $n(T, \mu)$, d'energia $\rho(T, \mu)$ e la pressione $P(T, \mu)$ di un sistema di particelle (e lo potremo fare esattamente sulla base dell'ipotesi di equilibrio termico).

La componente radiativa dell'universo attuale è composta di soli fotoni, ed in epoche primordiali è stata sicuramente più rilevante di oggi.

3.1 Termodinamica dell'universo primordiale

3.1.1 Densità numerica, densità d'energia e pressione

Supponiamo dunque di essere nell'universo primordiale e di voler descrivere tutte le componenti dell'universo a quell'epoca, a patto ovviamente che le particelle considerate esistessero in quel momento.

Supponendo dunque che queste particelle siano in equilibrio termodinamico vogliamo caratterizzare le quantità termodinamiche dell'universo.

Cominciamo con la densità numerica di particelle. Si ha:

$$n(T, \mu) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int f(\vec{q}, T, \mu) d^3q$$

ove si sono usate unità naturali (ed è per questo che è presente il termine¹ $(2\pi)^3$), e:

\vec{q} sono i *momenti* delle particelle (non le loro posizioni)

g è il numero di stati di elicità di una specie particellare, ossia la molteplicità con cui la particella si presenta, a parità di caratteristiche (per i fotoni ad esempio è pari a 2, in quanto l'elicità in questo caso corrisponde agli stati di spin)

A rigore f dovrebbe essere una funzione definita sullo spazio delle fasi, ma poiché stiamo considerando un universo omogeneo e isotropo, abbiamo già mediato sulle posizioni; insomma, f è una densità di probabilità nello spazio dei momenti.

Per la densità d'energia si ha:

$$\rho(T, \mu) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int E(\vec{q}) f(\vec{q}, T, \mu) d^3q \quad E = \sqrt{q^2 + m^2}$$

mentre per la pressione²:

$$P(T, \mu) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{q^2}{3E(\vec{q})} f(\vec{q}, T, \mu) d^3q$$

ove l' $1/3$ è presente perché la pressione è isotropa (è una media sulle direzioni).

Ora, che forma ha f ?

Supponendo le particelle in equilibrio termodinamico, f sarà data dalla distribuzione relativa alla statistica della specie particellare considerata (fermionica o bosonica):

$$f(\vec{q}, T, \mu) = \left[\exp\left(\frac{E - \mu}{T}\right) \mp 1 \right]^{-1}$$

ove il $-$ vale per bosoni e il $+$ per fermioni.

La prima cosa che vogliamo fare è giustificare la trascurabilità del potenziale chimico μ .

Come sappiamo, il potenziale chimico di un sistema è il parametro che ne regola l'equilibrio dinamico. Pertanto, se si ha una reazione del tipo $i + j \leftrightarrow k + \ell$ (ove i, \dots, ℓ sono le particelle coinvolte) allora varrà la relazione $\mu_i + \mu_j = \mu_k + \mu_\ell$ (nota come *equazione di Saha*).

Dobbiamo dunque considerare tutti i tipi di reazione fra le particelle che ci aspettiamo esistessero nell'universo primordiale; per i fotoni, ad esempio, sappiamo che $\mu_\gamma = 0$, e se consideriamo processi di annichilazione del tipo $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ allora in generale possiamo dire che $\mu_{\text{part}} = -\mu_{\overline{\text{part}}}$.

Considerando i processi:

$$e^- + \mu^+ \rightarrow \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad e^- + p \rightarrow \nu_e + n \quad \mu^- + p \rightarrow \nu_\mu + n$$

dobbiamo quindi sfruttare l'equazione di Saha per "eliminare" i potenziali chimici di alcune specie particellari; alla fine resterà un numero di potenziali chimici indipendenti pari al numero di quantità globali conservate, come carica elettrica, numero barionico e numero leptonico.

Sfruttiamo a questo punto ciò che sappiamo fenomenologicamente:

- L'universo è globalmente neutro (non esistono infatti correnti o campi elettrici o magnetici globali nell'universo)

¹Infatti per la discretizzazione dello spazio delle fasi si introduce a denominatore un h^3 , che in unità naturali ($\hbar = 1$) è uguale a 2π .

²Non è semplice giustificare in modo soddisfacente questa forma per P . In realtà deriva dall'espressione del tensore energia-impulso per un sistema di particelle. In realtà questa forma per P la si potrebbe anche trovare dalla condizione di adiabaticità per un fluido perfetto:

$$dE + PdV = 0 \quad \Rightarrow \quad d(\rho a^3) + Pda^3 = 0$$

e conoscendo ρ possiamo determinare P .

- La quantità di barioni nell'universo è molto minore di quella dei fotoni (il rapporto è qualche parte su 10^{10})³, e quindi il numero barionico è scarso

Per quanto riguarda i leptoni, poi, considerando elettroni e positroni questi avranno lo stesso numero leptonico perché la carica totale dell'universo è nulla. Riguardo le altre particelle (come i muoni) non sappiamo ancora molto, ma sappiamo che se i loro numeri leptonici fossero alti questi avrebbero inciso pesantemente nella nucleosintesi primordiale.

Da ciò possiamo dedurre che il potenziale chimico di tutte queste particelle è trascurabile⁴.

Pertanto:

$$f(\vec{q}, T, \mu) = \left[e^{\frac{E}{T} \mp 1} \right]^{-1}$$

ossia:

$$n(T) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3q}{e^{(\sqrt{q^2+m^2})/T} \mp 1} \quad \rho(T) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int \frac{\sqrt{q^2+m^2}}{e^{(\sqrt{q^2+m^2})/T} \mp 1} d^3q$$

$$P(T) = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{1}{3} \int \frac{q^2}{\sqrt{q^2+m^2}} \frac{1}{e^{(\sqrt{q^2+m^2})/T} \mp 1} d^3q$$

Poiché tutti questi integrali non dipendono dalla direzione del momento (per via dell'isotropia dell'universo), per calcolarli conviene passare a coordinate polari nello spazio dei momenti, e pertanto si avrà (G è una generica funzione):

$$\int G(q) d^3q = \int_{4\pi} d\Omega \int_0^{+\infty} q^2 G(q) dq = 4\pi \int_0^{+\infty} q^2 G(q) dq$$

e quindi:

$$n(T) = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{q^2}{e^{(\sqrt{q^2+m^2})/T} \mp 1} dq \quad \rho(T) = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{q^2 \sqrt{q^2+m^2}}{e^{(\sqrt{q^2+m^2})/T} \mp 1} dq$$

$$P(T) = \frac{g}{6\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{q^4}{\sqrt{q^2+m^2}} \frac{1}{e^{(\sqrt{q^2+m^2})/T} \mp 1} dq$$

Concentriamoci ora su due casi particolari, ossia quello in cui le particelle sono relativistiche e quello in cui non lo sono:

$T \gg m$: Passando alla variabile $x = q/T$:

$$n(T) = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^{\sqrt{x^2+m^2/T^2} \mp 1} dx \quad \rho(T) = \frac{g}{2\pi^2} T^4 \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sqrt{x^2 + \frac{m^2}{T^2}}}{e^{\sqrt{x^2+m^2/T^2} \mp 1} dx$$

$$P(T) = \frac{g}{6\pi^2} T^4 \int_0^{+\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^2 + \frac{m^2}{T^2}} e^{\sqrt{x^2+m^2/T^2} \mp 1} dx$$

e poiché $m/T \ll 1$:

$$n(T) = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{e^x \mp 1} dx \quad \rho(T) = \frac{g}{2\pi^2} T^4 \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x \mp 1} dx \quad P(T) = \frac{g}{6\pi^2} T^4 \int_0^{+\infty} \frac{x^3}{e^x \mp 1} dx$$

Insomma:

$$n(T) \propto T^3 \quad \rho(T) \propto T^4 \quad P(T) = \frac{1}{3} \rho(T)$$

(ove la seconda espressione altro non è che la legge di Stefan-Boltzmann). Notiamo pertanto che il fatto che per particelle relativistiche (fotoni compresi) si abbia $P = \rho/3$ derivi dalle proprietà di equilibrio

³Nota: nonostante $n_\gamma \gg n_b$ si ha $\rho_b \gg \rho_\gamma$.

⁴La cosa non è per nulla immediata, e non la vediamo. Prendiamo insomma per assodato che i potenziali chimici sono trascurabili.

termico di un gas.

I risultati finali sono:

$$n(T) = \begin{cases} g \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & BE \\ \frac{3}{4} g \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T^3 & FD \end{cases} \quad \rho(T) = \begin{cases} g \frac{\pi^2}{30} T^4 & BE \\ \frac{7}{8} g \frac{\pi^2}{30} T^4 & FD \end{cases}$$

ove $\zeta(3) \approx 1.20206 \dots$, e $\sigma_{SB} = \pi^2/15$ in queste unità.

$T \ll m$: Applicando questo limite superficialmente si rischia di cadere in errore:

$$n(T) = \frac{g}{2\pi^2} T^3 \int_0^{+\infty} x^2 e^{-\frac{m}{T}} dx$$

e si incappa nella *catastrofe ultravioletta*.

Dobbiamo sviluppare l'espressione dell'energia relativistica fino all'ordine successivo:

$$\sqrt{q^2 + m^2} = m \sqrt{1 + \frac{q^2}{m^2}} \approx m + \frac{q^2}{2m}$$

Quindi (l'1 a denominatore si trascura perché è sicuramente molto minore dell'esponenziale):

$$\begin{aligned} n(T) &= \frac{g}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} q^2 e^{-\frac{m}{T}} e^{-\frac{q^2}{2mT}} dq = \frac{g}{2\pi^2} e^{-\frac{m}{T}} \int_0^{+\infty} q^2 e^{-\frac{q^2}{2mT}} dq = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{T}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow n(T) = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-\frac{m}{T}} \end{aligned}$$

Per quello che riguarda ρ , trascurando direttamente il termine di energia cinetica $q^2/2m$ al numeratore si trova⁵:

$$\rho(T) = mn(T)$$

Considerando anche il termine successivo nello sviluppo di E si trova anche il contributo a ρ dato dall'energia interna del sistema.

Nel caso di P la situazione è la stessa ma con una diversa potenza di x ; si trova:

$$P = n(T)T$$

che è l'equazione di stato dei gas ideali.

Considerando il caso non relativistico, nelle espressioni di n , ρ e P è presente (attraverso n) il "fattore di soppressione di Boltzmann" $e^{-m/T}$. Pertanto, in un sistema in cui sono presenti particelle ultrarelativistiche e non relativistiche, quest'ultime sono sopresse in numero rispetto alle altre per via di questo termine⁶. In prima approssimazione, dunque, ad alte temperature si tiene conto solo delle particelle relativistiche.

Poiché inoltre $P = n \frac{T}{m} m = \frac{T}{m} \rho$, nel caso non relativistico si ha $P = \frac{T}{m} \rho \ll \rho$: la pressione di particelle non relativistiche è trascurabile.

Se dunque abbiamo una miscela di particelle relativistiche e non, all'equilibrio termico la frazione di particelle non relativistiche viene soppressa fortemente in numero per via del termine di soppressione di Boltzmann. Supponiamo dunque di partire da una situazione in cui la temperatura è molto elevata e tutte le specie particellari sono relativistiche; la temperatura, abbassandosi, ad un certo punto eguaglierà la massa di una certa specie: a questo punto la specie passa da regime relativistico a non relativistico, e pertanto la sua densità numerica diminuisce fortemente; ciò può avvenire solo attraverso l'annichilazione fra particelle, e in questo modo viene

⁵Infatti risulta:

$$\rho(T) = \frac{g}{2\pi^2} \int_0^{+\infty} m q^2 e^{-\frac{m}{T}} e^{-\frac{q^2}{2mT}} dq = mn(T)$$

⁶Ma allora, ci si potrebbe chiedere, perché oggi $\rho_{\text{materia}} \gg \rho_{\gamma}$? Perché oggi materia e radiazione *non* sono in equilibrio termico.

prodotta radiazione, aumentando la temperatura.

La densità d'energia di questa miscela di particelle relativistiche sarà scrivibile nella forma⁷:

$$\rho(T) = \sum_{i=BE} g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=FD} g_i \frac{\pi^2}{30} T^4 \left(\frac{T_i}{T}\right)^4$$

ossia:

$$\rho(T) = g_*(T) \frac{\pi^2}{30} T^4 \quad \text{con} \quad g_*(T) = \sum_{i=BE} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{i=FD} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^4$$

ove abbiamo inserito i T_i per permettere alle varie specie particellari di avere temperature diverse. Come già detto abbiamo trascurato il contributo delle particelle non relativistiche per via del fattore di soppressione di Boltzmann.

Il termine g_* è detto *numero effettivo di gradi di libertà del sistema*. Questo tiene conto del fatto che al diminuire di T il contributo di particelle che non sono più relativistiche sparisce (in prima approssimazione, è una funzione a scalino).

3.1.2 Entropia

Cerchiamo ora di studiare l'entropia dell'universo.

Dalla termodinamica si ha (abbiamo già trascurato il contributo del potenziale chimico):

$$dS = \frac{1}{T} [d(\rho(T)V) + P(T)dV]$$

$$\frac{\partial S}{\partial V} = \frac{1}{T} (\rho(T) + P(T)) \quad \frac{\partial S}{\partial T} = \frac{V}{T} \frac{d\rho(T)}{dT}$$

Ora, affinché dS sia un differenziale esatto bisogna che:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}$$

e pertanto:

$$\frac{\partial}{\partial T} \left[\frac{1}{T} (\rho(T) + P(T)) \right] = \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{V}{T} \frac{d\rho(T)}{dT} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dT} = \frac{1}{T} (\rho(T) + P(T))$$

che è la *condizione di integrabilità*.

Consideriamo adesso la seguente scrittura equivalente⁸ della terza equazione di Friedmann:

$$a^3 \dot{P} = \frac{d}{dt} [a^3 (\rho + P)]$$

Questa, insieme alla condizione di integrabilità, porta alla determinazione di una quantità conservata:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{a^3}{T} (\rho(T) + P(T)) \right] = 0$$

Verifichiamolo:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{a^3}{T} (\rho + P) \right] = \frac{1}{T} \frac{d}{dt} [a^3 (\rho + P)] - a^3 (\rho + P) \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dt} = \frac{a^3}{T} \frac{dP}{dt} - a^3 (\rho + P) \frac{1}{T^2} \frac{dT}{dt}$$

⁷Dobbiamo infatti tener conto dei gradi di libertà intrinseci di una particella (stati di elicità).

⁸Infatti:

$$a^3 \dot{P} = 3\dot{a}a^2(\rho + P) + a^3 \dot{\rho} + a^3 \dot{P} \quad \Rightarrow \quad \dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + P)$$

ove nell'ultimo passaggio abbiamo sfruttato la scrittura equivalente della terza equazione di Friedmann. A questo punto, moltiplicando la condizione di integrabilità ad ambo i membri per a^3 si ha:

$$a^3 \frac{dP}{dT} = \frac{a^3}{T} (\rho + P)$$

e quindi:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{a^3}{T} (\rho + P) \right] = \frac{a^3}{T} \frac{dP}{dt} - \frac{a^3}{T} \frac{dP}{dT} \frac{dT}{dt} = 0$$

Cerchiamo ora di capire il significato di questa quantità conservata.

Sfruttando la condizione di integrabilità si vede subito che dS può essere scritto come:

$$dS = d \left[\frac{V}{T} (\rho(T) + P(T)) \right]$$

Pertanto l'entropia sarà uguale a:

$$S(V, T) = \frac{V}{T} (\rho(T) + P(T))$$

(ove abbiamo posto uguale a zero la costante d'integrazione).

Valutando dunque l'entropia in un volume a^3 si avrà:

$$S(a^3, T) = \frac{a^3}{T} (\rho(T) + P(T)) = \text{cost.} \quad \Rightarrow \quad S(a^3, T) = \text{cost.}$$

Pertanto l'entropia contenuta in un volume che si espande con l'universo è conservata; ciò ovviamente è vero fintanto che le varie specie particellari sono in equilibrio termico fra loro.

Ora, sostituendo ρ come l'abbiamo scritta in funzione di g_* (e tenendo conto che in questa situazione $P = \frac{1}{3}\rho$, visto che stiamo considerando particelle relativistiche):

$$S(a^3, T) = \frac{4}{3} g_* \frac{\pi^2}{30} T^3 a^3$$

In questo caso però si preferisce scriverla come:

$$S(a^3, T) = \frac{4}{3} g_{*S} \frac{\pi^2}{30} T^3 a^3 \quad g_{*S} = \sum_{i=BE} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=FD} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^3$$

Poiché $S(a^3, T) = \text{cost.}$, allora si avrà:

$$g_{*S}^{1/3} T a = \text{cost.}$$

ed è questa la *vera* relazione che deve essere rispettata.

3.1.3 Disaccoppiamento e relazione temperatura-tempo

Supponiamo che a una certa temperatura \tilde{T} si abbia il passaggio di una data specie particellare da relativistica a non relativistica (stiamo un po' "brutalizzando" il problema, supponendo che il passaggio fra i due regimi non sia graduale e avvenga non appena $T < \tilde{T}$); come abbiamo detto, allora, per via del fattore di soppressione di Boltzmann la densità numerica di queste particelle diminuisce fortemente, e queste inizieranno ad annichilire: ad esempio, elettroni e positroni diventano non relativistici quando la temperatura scende sotto 0.5 MeV, al di sotto della quale si iniziano ad avere processi del tipo $e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$.

Quando la temperatura dell'universo è arrivata a $T = T_\nu \approx 1$ MeV, è avvenuto il processo detto *disaccoppiamento* delle interazioni deboli, che coinvolgono particelle come i neutrini. In pratica per $T > T_\nu$ le interazioni deboli sono attive, ossia richiedono un tempo caratteristico minore dell'età dell'universo, mentre per $T < T_\nu$ questo non è più vero. In generale diciamo che due specie particellari sono *accoppiate* se il tempo caratteristico della loro interazione è sufficientemente breve affinché l'interazione avvenga in modo considerevole, ossia se il tempo caratteristico della loro interazione è minore dell'età dell'universo. Pertanto, dal momento in cui la

temperatura dell'universo è scesa sotto 1 MeV i neutrini non interagiscono più con le altre particelle.

Una volta che due specie particellari si disaccoppiano possiamo considerarle come serbatoi termici indipendenti, e le loro entropie sono separatamente conservate.

Una volta che elettroni e positroni si sono annichiliti, hanno prodotto radiazione aumentandone la temperatura (in realtà quello che avviene è un rallentamento del processo di raffreddamento, più che un vero e proprio riscaldamento); infatti poiché S è costante, se g_* diminuisce (ossia se una o più specie particellari diventano non relativistiche) allora T dovrà aumentare. Poiché i neutrini si erano già disaccoppiati quanto T era uguale a 0.5 MeV, non sono stati influenzati da questo processo e pertanto ad oggi risultano effettivamente più freddi della radiazione cosmica di fondo.

Il disaccoppiamento dei neutrini, poi, ha portato al “congelamento” del rapporto protoni/neutroni nell'universo: il decadimento del neutrone è infatti regolato da processi deboli (decadimento β), e una volta che i neutrini si sono disaccoppiati dal resto della materia queste interazioni diventano sostanzialmente irrilevanti. Pertanto, il rapporto neutroni/protoni dell'universo è rimasto costante in seguito al disaccoppiamento delle interazioni deboli.

Temperatura della radiazione dopo il disaccoppiamento

Impostiamo ora il passaggio attraverso \tilde{T} di un universo composto da elettroni, positroni e fotoni.

Posto $\tilde{t} = t(\tilde{T})$ l'istante della transizione, definiamo le quantità relative a tempi $t < \tilde{t}$ col pedice $>$, mentre per $t > \tilde{t}$ col pedice $<$.

Ciò che vogliamo fare è avvicinarci a \tilde{T} dal “basso” e dall’“alto” e porre le giuste condizioni di raccordo a \tilde{T} con la conservazione di S per determinare la differenza di temperatura della radiazione prima e dopo la transizione.

Dunque:

$$S = \frac{2\pi^2}{45} g_{*>} T_{>}^3 a_{>}^3 = \frac{2\pi^2}{45} g_{*<} T_{<}^3 a_{<}^3$$

Imponendo $a_{<} = a_{>}$ per $t = \tilde{t}$ (l'espansione dell'universo non può essere discontinua):

$$T_{<} = \left(\frac{g_{*>}}{g_{*<}} \right)^{1/3} T_{>}$$

Ora, $g_{*>}$ deve tenere conto della presenza dei fotoni, degli elettroni e dei positroni, pertanto⁹:

$$g_{*>} = 2 + \frac{7}{8} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{11}{2}$$

mentre $g_{*<}$ deve tener conto solo della presenza dei fotoni (sono le uniche particelle a rimanere relativistiche), quindi $g_{*<} = 2$. Pertanto:

$$T_{<} = \left(\frac{11}{4} \right)^{1/3} T_{>}$$

Pertanto, la temperatura della radiazione dopo che e^+ e e^- si sono annichiliti è più alta di un fattore $(11/4)^{1/3} \approx 1.4$ rispetto a prima della transizione. I neutrini, dunque, avranno una temperatura:

$$T_{0\nu} = \left(\frac{4}{11} \right)^{1/3} T_{0\gamma} \approx 1.9 \text{ K}$$

Se non fossero massivi, conoscendo $T_{0\nu}$ sapremmo tutto su di loro; in realtà però sono massivi, ma la loro temperatura è comunque utile per calcolarne la densità numerica, o in generale ricavarne altre informazioni.

Sperimentalmente abbiamo la certezza dell'esistenza di questo background di neutrini, che ha proprio la temperatura prevista.

⁹Spieghiamo il perché di quest'espressione: il primo 2 è il numero degli stati di elicità del fotone, il 7/8 è dovuto al fatto che elettroni e positroni sono fermioni, il 2 seguente è il numero di stati di elicità degli elettroni (uguale a quello dei positroni) e il 2 seguente serve proprio perché elettroni e positroni hanno lo stesso numero di stati di elicità (in questo modo si contano gli stati di elicità di tutte le particelle presenti).

Relazione temperatura-tempo

Vogliamo ora trovare una relazione che leghi la temperatura dell'universo al tempo. Sappiamo che:

$$\rho(T) = g_*(T) \frac{\pi^2}{30} T^4$$

e che, per un universo dominato da radiazione:

$$\rho \propto a^{-4} \quad a \propto t^{1/2}$$

Per sfruttare questa relazione dobbiamo fissare le costanti moltiplicative. Potremmo sfruttare i dati osservativi che abbiamo a disposizione, ma oggi l'universo non è dominato da radiazione e quindi la cosa diventerebbe piuttosto complicata.

Sfruttiamo la prima equazione di Friedmann:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad \Rightarrow \quad H = \frac{\dot{a}}{a} = \frac{1}{2t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4t^2} = \frac{8\pi G}{3} g_*(T) \frac{\pi^2}{30} T^4$$

In unità naturali, $G = m_P^{-2}$ ove m_P è la massa di Planck ($m_P = 1.2211 \cdot 10^{19}$ GeV). Quindi ($g_* \simeq 10^2$):

$$\frac{1}{4t^2} = \frac{8\pi^3}{90} g_*(T) \frac{T^4}{m_P^2} \quad \Rightarrow \quad t = 0.301 \cdot g_*^{-1/2} \frac{m_P}{T^2} \quad \Rightarrow \quad t \approx \left(\frac{T}{\text{MeV}} \right)^{-2} \text{ s}$$

ossia, quando l'universo aveva una temperatura di 1 MeV era vecchio di circa un secondo.

3.2 I problemi dello hot Big Bang e il modello inflazionario

Attorno agli anni '60, i cosmologi cercarono di ricostruire la storia termica dell'universo, con fenomeni fondamentali come quelli che abbiamo appena visto.

Si vide però che il modello standard usato aveva delle inconsistenze:

- La prima fu notata già dal '56. Considerando la metrica di Robertson-Walker:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\Omega^2 \right]$$

e in particolare il moto di fotoni, si ha:

$$ds^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{cdt}{a(t)} = \pm \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{t_0} \frac{cdt}{a(t)} = \int_0^r \frac{d\tilde{r}}{\sqrt{1 - k\tilde{r}^2}} = f(r)$$

Il problema è che questi integrali sono finiti, quando invece “preferiremmo” che divergessero.

Per capirlo, consideriamo un diagramma di Minkowski, bidimensionale per semplicità, in cui ci troviamo nell'origine:

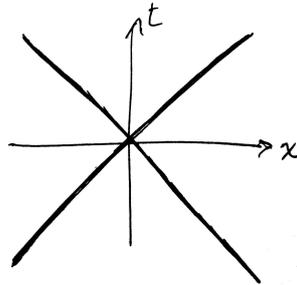


Figura 3.1: Diagramma di Minkowski considerato

In questo caso (assenza di Big Bang) possiamo ricevere segnali da punti infinitamente lontani a patto che questi siano partiti a $t = -\infty$, e possiamo influenzare con segnali punti infinitamente lontani a patto di

attendere un tempo infinito.

Supponiamo però che esista un inizio dei tempi, ossia che l'asse dei tempi sia "tagliato"; allora idealmente potremmo conoscere tutto della "base" del nostro cono passato (detta *orizzonte delle particelle*). Al passare del tempo, però, l'informazione che abbiamo a disposizione sull'universo a $t = 0$ aumenta perché la base del nostro cono passato si allarga:

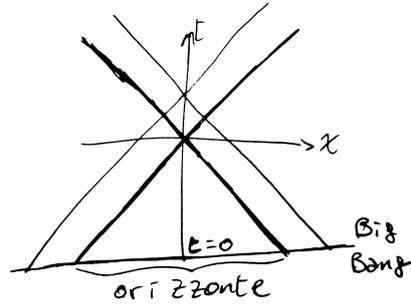


Figura 3.2: Orizzonte delle particelle

Ciò che risulta sperimentalmente è che la zona da noi conoscibile (che è quella che può essere in contatto causale con noi) aumenta col tempo, e le nuove zone che siamo in grado di vedere sono coerenti col resto dell'universo che già conosciamo. Ciò è molto sorprendente perché nulla a priori lo garantisce, in quanto queste nuove zone non sono state in contatto causale col resto dell'universo (anzi, proprio per questo dovremmo aspettarci che siano completamente diverse!).

Questa inconsistenza del modello dello hot Big Bang va sotto il nome di *problema dell'orizzonte*.

- L'altro problema è noto come *problema della piattezza*: sappiamo che la curvatura odierna dell'universo è pressoché nulla, e che questa tende a diventare più rilevante al passare del tempo. Ci chiediamo allora: com'è possibile che un universo vecchio come il nostro possa essere *ancora* con buona approssimazione piatto?

Vedremo che entrambi questi due problemi, apparentemente completamente diversi, vengono risolti dal modello di *universo inflazionario*. Questo sarà anche in grado di spiegare i meccanismi che hanno portato alla creazione delle microstrutture cosmiche (galassie, stelle, pianeti ecc.).

3.2.1 Il problema dell'orizzonte

La quantità:

$$f(r) = \int_0^t \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})}$$

è la distanza comovente percorsa da un fotone dal tempo 0 al tempo t . Quando questa è finita è detta *orizzonte delle particelle*, ed è la distanza massima di connessione causale che si può avere all'istante t . Se vogliamo dargli una dimensione, definiamo:

$$d_{\text{hor}}(t) = a(t) \int_0^t \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})}$$

Se quest'integrale divergesse significherebbe che potrei conoscere *tutto* l'universo (o meglio, sarei in connessione causale con tutto l'universo). Se non diverge però sorgono i problemi che abbiamo discusso prima.

Dobbiamo insomma studiare l'andamento asintotico dell'integrando per $t \rightarrow 0$:

$$a(t) \propto t^\alpha \quad \Rightarrow \quad d_{\text{hor}} \propto t^\alpha \int_0^t \tilde{t}^{-\alpha} d\tilde{t}$$

Pertanto, l'integrale converge per $\alpha < 1$; poiché $\alpha = \frac{2}{3(1+w)}$, allora:

$$2 < 3(1+w) \quad \Rightarrow \quad w > -\frac{1}{3}$$

Insomma, si ha orizzonte delle particelle se per epoche primordiali l'equazione di stato ha $w > -1/3$. Considerando però la seconda equazione di Friedmann:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{P}{c^2} \right)$$

sappiamo che $\ddot{a} < 0$ se e solo se $w > -1/3$; pertanto, si ha orizzonte delle particelle nel caso di universo primordiale in espansione decelerata.

Consideriamo poi la radiazione cosmica di fondo. Questa è stata emessa subito dopo la ricombinazione dell'idrogeno, durante l'ultimo scattering.

Supponiamo che in un diagramma di Minkowski l'ultimo scattering sia rappresentabile in questo modo:

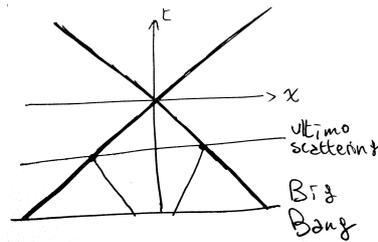


Figura 3.3: Ultimo scattering con orizzonte delle particelle

Se consideriamo i coni luce dei due fotoni che vengono da direzioni opposte, risulta che questi *non* si intersecano, e quindi non possono essere mai stati in connessione causale. Ma allora perché sperimentalmente risultano avere la stessa temperatura?

Insomma, il fatto che osservativamente l'universo sia così omogeneo e isotropo dà luogo a un paradosso, considerata l'esistenza dell'orizzonte delle particelle.

Come possiamo uscirne?

Potrebbe darsi che il paradosso abbia a che fare con le condizioni iniziali, ossia che poco dopo il Big Bang l'universo fosse effettivamente omogeneo e isotropo, e ciò che osserviamo è conseguenza di questo; tuttavia questa possibilità non può essere vera perché stiamo "imponendo" al modello di trovarsi in una configurazione di probabilità nulla.

Una possibile soluzione potrebbe essere supporre che l'universo sia partito disomogeneo e anisotropo, e che processi successivi lo abbiano isotropizzato e reso omogeneo.

Oggi si ritiene che questo processo sia stato effettuato dall'*inflazione*.

Riconsideriamo la distanza d_{hor} :

$$d_{\text{hor}}(t) = a(t) \int_0^t \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})} \sim ct$$

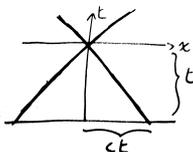
e questo vale se l'asse dei tempi è "troncato", ossia se c'è un Big Bang¹⁰.

Se l'equazione di stato è la stessa che abbiamo considerato prima, allora:

$$d_{\text{hor}}(t) = \frac{3(1+w)}{1+3w} ct$$

Oggi l'orizzonte¹¹ è pari a circa 3 Gpc. Questa *non* è la dimensione dell'universo (che è infinito), ma la parte che possiamo teoricamente vedere.

¹⁰Infatti:



¹¹In realtà sarebbe l'orizzonte di Hubble (vedi dopo), ma l'ordine di grandezza è lo stesso.

Su quest'orizzonte, dunque, dovremmo poter vedere il Big Bang; tuttavia, i fotoni relativi al Big Bang hanno redshift infinito, e quindi non possiamo effettivamente osservarli, neanche se avessimo un teorico telescopio di infinita sensibilità.

Le particelle migliori che si potrebbero usare per osservare il Big Bang sarebbero i gravitoni, che si sono disaccoppiati al tempo di Planck:

$$t_p = m_p^{-1} \approx 5 \cdot 10^{-44} \text{ s}$$

Ora, di solito le quantità comoventi (ossia divise per $a(t)$) sono costanti, ma $r_{\text{hor}} = d_{\text{hor}}/a(t)$ cresce nel tempo (poiché l'integrando di d_{hor} è definito positivo):

$$r_{\text{hor}} = \frac{d_{\text{hor}}}{a(t)} = \int_0^t \frac{cd\tilde{t}}{a(\tilde{t})} \quad \Rightarrow \quad \dot{r}_{\text{hor}} > 0$$

Se ad esempio chiamiamo λ_c la lunghezza d'onda comovente di un fotone (che è costante), allora si avrà che ad ogni istante ci sono nuove lunghezze d'onda comoventi che entrano nell'orizzonte; pertanto al passare del tempo entriamo in contatto causale con nuove regioni dell'universo, e sorprendentemente (come abbiamo più volte già detto) queste sono coerenti con l'informazione che già abbiamo sul resto dell'universo.

Definiamo poi l'*orizzonte di Hubble*:

$$d_H = cH^{-1}(t) = c \frac{\dot{a}}{a}$$

e quindi il raggio comovente di Hubble sarà:

$$r_H(t) = \frac{c}{\dot{a}(t)}$$

Ora:

$$r_H = \frac{1}{\dot{a}} \quad \Rightarrow \quad \dot{r}_H = -\frac{\ddot{a}}{\dot{a}^2} > 0$$

perché per $w > -1/3$ si ha $\ddot{a} < 0$.

Possiamo immaginare che ci sia stata una fase dell'universo in cui r_H è diminuito (e quindi $\ddot{a} > 0$), invece che aumentato, e in questo modo possiamo risolvere il problema dell'orizzonte:

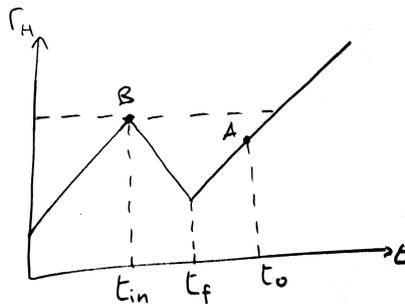


Figura 3.4: Andamento di r_H con inflazione

Se, come vediamo nel grafico, richiediamo che il valore di r_H quando questo ha cominciato a diminuire sia *maggiore* del suo valore attuale, possiamo risolvere il problema dell'orizzonte: in questo modo infatti una λ_c che oggi sta entrando nell'orizzonte in realtà è già stata al suo interno, in passato; inizialmente, infatti, tutte le regioni dell'universo erano in contatto causale, e poi per qualche motivo sono uscite dall'orizzonte, per poi rientrarci oggi. Questa fase di espansione accelerata è detta *inflazione*.

Riferendoci alla figura, per risolvere il problema ciò che ci interessa è che il punto B sia "alto" almeno quanto A .

Insomma, la soluzione dell'orizzonte delle particelle passa per il fatto che ci sia stata un'epoca nella quale $\dot{r}_H < 0$, ossia $\ddot{a} > 0$, e quest'espansione accelerata deve essere durata a sufficienza per far sì che si possa spiegare ciò che osserviamo *oggi*.

Facciamo ora un conto per capire di quanto si sia dovuto espandere l'universo durante l'inflazione. Abbiamo detto che per risolvere il problema dell'orizzonte dobbiamo avere:

$$r_H(t_{\text{in}}) \geq r_H(t_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{d_H(t_{\text{in}})}{a(t_{\text{in}})} \geq \frac{d_H(t_0)}{a(t_0)}$$

Imponiamo l'uguaglianza per poter ricavare un numero dall'espressione, e moltiplichiamo ambo i membri per $a(t_f)$:

$$\frac{d_H(t_{\text{in}})}{a(t_{\text{in}})} a(t_f) = \frac{d_H(t_0)}{a(t_0)} a(t_f)$$

Diremo che il problema dell'orizzonte è risolto se la dimensione di una regione causalmente connessa con un'altra prima dell'inflazione, moltiplicata per un fattore proporzionale alla crescita dell'universo durante l'inflazione stessa, sia grande almeno quanto l'orizzonte odierno "riportato" (nel senso di "riscaldato") all'epoca della fine dell'inflazione.

Poniamo:

$$Z_{\text{min}} = \frac{a(t_f)}{a(t_{\text{in}})}$$

che è proprio il fattore che esprime *almeno* di quanto si è "gonfiato" l'universo con l'inflazione. Inserendo i valori relativi all'uguaglianza:

$$Z_{\text{min}} = \frac{d_H(t_0)}{d_H(t_{\text{in}})} \frac{a(t_f)}{a(t_0)} = \frac{H(t_{\text{in}})}{H(t_0)} \frac{a(t_f)}{a(t_0)} = \frac{H(t_{\text{in}})}{H(t_f)} \frac{H(t_f)}{H(t_0)} \frac{a(t_f)}{a(t_0)}$$

Pertanto, portando a sinistra tutti i termini relativi all'inizio dell'inflazione (e abbreviando la notazione):

$$Z_{\text{min}} \frac{H_f}{H_{\text{in}}} = \frac{H_f}{H_0} \frac{a_f}{a_0}$$

Ricordando che $H^2 \propto \rho \propto a^{-3(1+w)}$ (trascurando la curvatura), allora $H \propto a^{-3\frac{1+w}{2}}$.

Sappiamo che durante l'inflazione si ha $\ddot{a} > 0$ e $w < -1/3$; insomma possiamo continuare a usare questa legge, ma tenendo conto che durante l'inflazione si deve usare un diverso valore di w , che chiameremo w_{inf} :

$$\frac{H_f}{H_{\text{in}}} = \left(\frac{a_f}{a_{\text{in}}} \right)^{-3\frac{1+w_{\text{inf}}}{2}}$$

Quindi:

$$Z_{\text{min}} \left(\frac{a_f}{a_{\text{in}}} \right)^{-3\frac{1+w_{\text{inf}}}{2}} = \left(\frac{a_f}{a_0} \right)^{-3\frac{1+w}{2}} \frac{a_f}{a_0} \quad \Rightarrow \quad Z_{\text{min}}^{1-3\frac{1+w_{\text{inf}}}{2}} = Z_{\text{min}}^{-\frac{1+3w_{\text{inf}}}{2}} = \left(\frac{a_f}{a_0} \right)^{1-3\frac{1+w}{2}}$$

Poiché $1 + 3w_{\text{inf}} < 0$, riscriviamo l'espressione inserendo un modulo:

$$Z_{\text{min}}^{\frac{|1+3w_{\text{inf}}|}{2}} = \left(\frac{a_f}{a_0} \right)^{-\frac{1+3w}{2}} \quad \Rightarrow \quad Z_{\text{min}} = \left[\left(\frac{a_f}{a_0} \right)^{-\frac{1+3w}{2}} \right]^{\frac{2}{|1+3w_{\text{inf}}|}}$$

A questo punto dividiamo il periodo dall'inflazione ad oggi in due fasi: il primo, che dura fino all'equivalenza radiazione-materia¹², dominato da radiazione, e il secondo che dura fino ad oggi che è dominato da materia (non consideriamo l'energia oscura). Facciamo questo perché così possiamo usare i diversi valori di w a seconda del caso. Pertanto, detto $a_{\text{eq}} = a(t_{\text{eq}})$, con t_{eq} istante dell'equivalenza radiazione-materia:

$$Z_{\text{min}} = \left[\frac{a_{\text{eq}}}{a_f} \left(\frac{a_0}{a_{\text{eq}}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{2}{|1+3w_{\text{inf}}|}}$$

¹²Vedi 3.5.

A questo punto inseriamo a_{eq}/a_0 (che è un dato osservativo, legato a z_{eq}):

$$Z_{\text{min}} = \left[\frac{a_{\text{eq}} a_0}{a_0 a_f} \left(\frac{a_0}{a_{\text{eq}}} \right)^{\frac{1}{2}} \right]^{\frac{2}{|1+3w_{\text{inf}}|}}$$

Sostituiamo quindi a_{eq}/a_0 con $(1 + z_{\text{eq}})^{-1}$ e a_0/a_f col rapporto inverso delle relative temperature¹³:

$$Z_{\text{min}} = \left[(1 + z_{\text{eq}})^{-1/2} \frac{T_f}{T_0} \right]^{\frac{2}{|1+3w_{\text{inf}}|}}$$

Poiché $(1 + z_{\text{eq}})^{-1/2} \approx 10^{-2}$ e:

$$\frac{T_f}{T_0} = \frac{T_f T_P}{T_P T_0} \quad \frac{T_P}{T_0} \approx 10^{32}$$

allora:

$$Z_{\text{min}} = \left[10^{-2} \cdot 10^{32} \frac{T_f}{T_P} \right]^{\frac{2}{|1+3w_{\text{inf}}|}}$$

Ora, quando vale w_{inf} ? Sicuramente è minore di $-1/3$; se proviamo a prendere $w_{\text{inf}} = -1$ (il suo valore odierno) allora:

$$Z_{\text{min}} \approx 10^{30} \frac{T_f}{T_P}$$

Spesso si esprime questo risultato in termine di “*e*-foldings”¹⁴ approssimativamente $10^{30} \approx e^{60}$; pertanto, è sufficiente che l’universo si sia espanso di *almeno* 60 *e*-foldings per risolvere il problema dell’orizzonte oggi.

3.2.2 Il problema della piatezza

Abbiamo visto che:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2} \quad \rho(a) \propto a^{-3(1+w)}$$

Da ciò possiamo vedere che ρ domina sul termine di curvatura quando $3(1+w) > 2$, ossia $w > -1/3$ e quindi $\ddot{a} < 0$; insomma, andando verso il Big Bang il termine dominante è quello relativo a ρ , e l’altro è trascurabile. Tutti i modelli, quindi, andando verso il Big Bang convergono verso il caso di universo piatto, mentre andando avanti nel tempo le differenze dovute alla curvatura vengono evidenziate.

Considerando $\Omega(t)$, si ha:

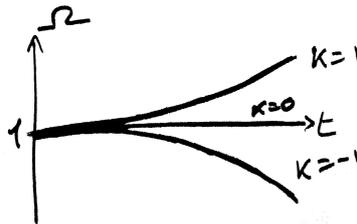


Figura 3.5: Andamento di $\Omega(t)$

Come sappiamo, però, la curvatura attuale dell’universo è trascurabile (ossia compatibile con zero). Com’è possibile che ancora non si siano resi evidenti gli effetti di curvatura?

¹³Stiamo supponendo che dalla fine dell’inflazione ad oggi l’universo sia sempre stato dominato da radiazione; ovviamente questo non è vero e dovremmo tenerne conto, ma stiamo facendo un’approssimazione.

¹⁴Questo perché, pensando a un’espansione di tipo esponenziale (ossia $a \propto e^{Ht}$) allora:

$$Z = \frac{a_f}{a_{\text{in}}} = e^{H(t_f - t_{\text{in}})} = e^{H\Delta t}$$

e quindi il numero di *e*-foldings è $H\Delta t$.

Cerchiamo di capire come evolve Ω in funzione di z , supponendo non ci sia stata inflazione:

$$\Omega(z) = \frac{\rho(z)}{3H^2(z)/8\pi G} \quad \rho(z) = \rho_0(1+z)^{3(1+w)} \quad H^2(z) = \frac{8\pi G}{3}\rho(z) - \frac{k}{a^2}$$

Per esprimere meglio $H^2(z)$ scriviamo:

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_0 - \frac{k}{a_0^2} \quad \Rightarrow \quad 1 = \Omega_0 - \frac{k}{a_0^2 H_0^2}$$

Perciò:

$$\begin{aligned} H^2(z) &= H_0^2 \left(\frac{8\pi G}{3} \frac{\rho(z)}{H_0^2} - \frac{k}{a(z)^2 H_0^2} \right) = H_0^2 \left[\frac{\rho(z)}{\rho_0} \Omega_0 + \frac{a_0^2}{a^2(z)} (1 - \Omega_0) \right] = \\ &= H_0^2 (1+z)^2 [\Omega_0 (1+z)^{1+3w} + (1 - \Omega_0)] \end{aligned}$$

Quindi:

$$\Omega(z) = \frac{\rho_0}{3H_0^2/8\pi G} \frac{\rho(z)}{\rho_0} \frac{H_0^2}{H^2(z)} = \Omega_0 (1+z)^{1+3w} [(1 - \Omega_0) + \Omega_0 (1+z)^{1+3w}]^{-1}$$

In realtà è più interessante studiare la deviazione da 1 di $\Omega^{-1}(z)$, pertanto:

$$\begin{aligned} \Omega^{-1}(z) &= \Omega_0^{-1} (1+z)^{-(1+3w)} [1 - \Omega_0 + \Omega_0 (1+z)^{1+3w}] \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \Omega^{-1}(z) - 1 &= \frac{\Omega_0^{-1} [1 - \Omega_0 + \Omega_0 (1+z)^{1+3w}] - (1+z)^{1+3w}}{(1+z)^{1+3w}} = \\ &= \frac{\Omega_0^{-1} - 1 + (1+z)^{1+3w} - (1+z)^{1+3w}}{(1+z)^{1+3w}} = \frac{\Omega_0^{-1} - 1}{(1+z)^{1+3w}} \quad \Rightarrow \quad \Omega^{-1}(z) - 1 = (\Omega_0^{-1} - 1)(1+z)^{-(1+3w)} \end{aligned}$$

Ora, se $w > -1/3$ tanto più grande è z tanto più Ω sarà vicino ad 1.

Dobbiamo tenere conto però che in questo conto abbiamo fatto un'assunzione un po' forte, ossia che l'equazione di stato sia sempre la stessa; in realtà, come sappiamo, dovremmo considerare più fasi, ognuna dominata da una componente diversa. Per un universo dominato da radiazione, ad esempio, $T \propto a^{-1}$ e quindi $T(z) = T_0(1+z) \Rightarrow 1+z = T(z)/T_0$.

Ora, fino a che punto possiamo "andare indietro" nel tempo? Fino al momento in cui ha smesso di dominare la gravità, ossia fino al disaccoppiamento dei gravitoni; dobbiamo quindi considerare le grandezze che si possono costruire con le costanti caratteristiche della meccanica quantistica e della gravità, dette *grandezze di Planck*:

$$m_P = G^{-1/2} \approx 1.2 \cdot 10^{19} \text{ GeV} \quad \ell_P = m_P^{-1} \approx 10^{-33} \text{ cm} \quad t_P \approx 0.5 \cdot 10^{-43} \text{ s} \quad E_P = m_P$$

$$T_P \approx 10^{19} \text{ GeV}$$

(nota: se $T_0 = 2.7 \text{ K}$, $T_P/T_0 \approx 0.5 \cdot 10^{32}$).

Facciamo un conto rozzo. Supponiamo che l'universo sia sempre stato dominato da radiazione, quindi $w = +1/3$ e:

$$\Omega^{-1}(z) - 1 = (\Omega_0^{-1} - 1)(1+z)^{-2} = (\Omega_0^{-1} - 1) \left(\frac{T_0}{T(z)} \right)^2$$

Prendendo lo z (e quindi T) relativo all'epoca di Planck:

$$\Omega^{-1}(z_P) - 1 = (\Omega_0^{-1} - 1) \cdot 10^{-64}$$

Se avessimo usato $w = 0$ nella fase finale si sarebbe trovato un 10^{-60} (possiamo ignorare la fase dominata dall'energia oscura perché recente e poco rilevante).

Pertanto, in assenza di inflazione all'epoca di Planck il "tuning" del valore di Ω^{-1} rispetto a 1 deve essere stato fatto con una precisione di 10^{60} . C'è dunque decisamente qualcosa che non va, che non comprendiamo.

Se poi facessimo una simulazione numerica dell'evoluzione dell'universo, nel caso in cui questo fosse stato sufficientemente chiuso o aperto sarebbe collassato o si sarebbe svuotato completamente nel giro di un paio di tempi di Planck.

Insomma, c'è un'“innaturalità” nelle condizioni iniziali che dobbiamo porre affinché $\Omega \approx 1$, così come nelle condizioni di omogeneità e isotropia dell'universo.

Considerando però la situazione inflazionaria che abbiamo ipotizzato nel caso del problema dell'orizzonte, avremo che:

$$\frac{\Omega(t_0) - 1}{\Omega(t_{in}) - 1} = \frac{a_{in}^2 H_{in}^2}{a_0^2 H_0^2} = \left(\frac{r_H(t_0)}{r_H(t_{in})} \right)^2$$

ma per risolvere il problema dell'orizzonte si deve avere $r_H(t_0) \leq r_H(t_{in})$, pertanto:

$$\frac{\Omega(t_0) - 1}{\Omega(t_{in}) - 1} < 1$$

Insomma, in questo modo il parametro di densità è effettivamente più vicino a 1 di quanto lo fosse all'inizio dell'inflazione.

Graficamente:

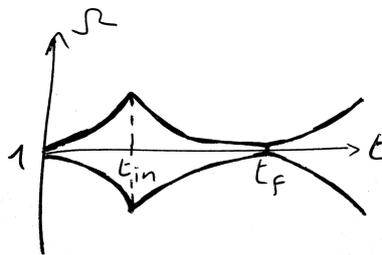


Figura 3.6: Andamento di $\Omega(t)$ con inflazione

Dunque, richiedendo che il raggio di Hubble comovente diminuisca nel tempo, quale equazione di stato possiamo avere?

$$\ddot{a} > 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{a} = \frac{d}{dt} \dot{a} = \frac{d}{dt} (aH) = \dot{a}H + a\dot{H} = a(H^2 + \dot{H}) \quad \Rightarrow \quad \frac{\ddot{a}}{a} = H^2 + \dot{H} > 0$$

Ci sono tre modi per soddisfare questa disuguaglianza:

1. $\dot{H} < 0$, con $H^2 + \dot{H} > 0$
2. $\dot{H} = 0$
3. $\dot{H} > 0$

In termini di equazioni di stato:

1. $-1 < w < -1/3$; nel gergo della relatività generale questa condizione è detta *violazione della condizione di energia debole*
2. $w = -1$
3. $w < -1$

Cerchiamo un po' di esempi.

Sappiamo qual è la soluzione per $a(t)$ delle equazioni di Friedmann:

$$a(t) = a_* \left[1 + \frac{3(1+w)}{2} H_*(t - t_*) \right]^{\frac{2}{3(1+w)}}$$

ed è lecito usarla (ricordiamoci che per determinarla abbiamo trascurato il termine di curvatura) perché l'inflazione “schiaccia” la curvatura verso zero.

Pertanto, nei tre casi possibili si ha:

1. $\dot{H} < 0$, $-1 < w < -1/3$, e a resta una legge di potenza:

$$a(t) \propto t^p \quad \text{con} \quad p > 1$$

2. $\dot{H} = 0$, e facendo tendere w a -1 si ha $a(t) \propto e^{Ht}$ (come abbiamo già visto).

3. Riscriviamo a come:

$$a(t) \propto (t - t_{\text{Bounce}})^{-\alpha} \quad \alpha > 0$$

e questa situazione porta ad una singolarità nel futuro, detta *Big Bounce*.

Conclusioni Per concludere, insomma, l'inflazione è un modello in grado di risolvere perfettamente i problemi dell'orizzonte e della piattezza, anche se ovviamente questo modello presenta delle problematiche (in particolare la spiegazione di come si sia fermato il processo inflazionario).

3.3 La bariogenesi

Per *bariogenesi* si intende il processo che ha portato alla formazione dei primi barioni¹⁵. Il problema principale che dobbiamo risolvere parlando di bariogenesi è capire l'origine dell'**asimmetria barionica**: il nostro universo è infatti composto principalmente di materia e solo in una parte trascurabile di antimateria¹⁶, e dobbiamo essere in grado di poter rendere conto di ciò. In realtà una risposta convincente a questo problema ancora non c'è. Insomma, c'è stata un'asimmetria nell'abbondanza di materia e antimateria; con l'inflazione, però, quest'asimmetria sarebbe dovuta essere eliminata, e quindi dobbiamo ripristinarla subito dopo il processo inflazionario. Sakharov trovò le condizioni necessarie a una teoria affinché quest'asimmetria si ristabilisca dopo l'inflazione:

- Violazione della conservazione del numero barionico
- Violazione di C e CP (altrimenti potremmo avere tanti barioni quanti antibarioni)
- Uscita dall'equilibrio termodinamico

Ci chiediamo dunque: quanta differenza fra materia e antimateria bisogna aver prodotto nell'universo post-inflazionario per osservare l'asimmetria attuale fra materia e antimateria?

Cominciamo determinando la densità numerica odierna di barioni¹⁷. Possiamo trovarla sfruttando il fatto che conosciamo bene ρ_{0b} (la densità d'energia attuale dovuta alla materia barionica):

$$\rho_{0b} = \frac{3H_0^2}{8\pi G} \Omega_{0b} \quad \Omega_{0b} \approx 0.04$$

Pertanto, detta m_p la massa del protone:

$$n_{0b} = \frac{\rho_{0b}}{m_p} \approx 1.12 \cdot 10^{-5} \underbrace{(\Omega_{0b} h^2)}_{0.02} \text{ cm}^{-3}$$

Conviene esprimere n_{0b} in unità di densità di fotoni, che conosciamo bene:

$$\begin{aligned} n_{0\gamma} = \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} T_{0\gamma}^3 \approx 420 \text{ cm}^{-3} & \Rightarrow \frac{n_{0\gamma}}{n_{0b}} \equiv \eta_0^{-1} \approx 3.75 \cdot 10^7 (\Omega_{0b} h^2)^{-1} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \eta_0 \approx 0.6 \cdot 10^{-9} \end{aligned}$$

¹⁵Verrebbe da pensare che si parli principalmente di protoni. In realtà questi quando sono stati creati erano già non relativistici; al momento della bariogenesi la temperatura dell'universo permetteva l'esistenza dei soli quark. È pertanto a questi che ci si riferisce parlando di bariogenesi.

¹⁶In realtà il fatto che ci fosse un'asimmetria nella composizione della materia dell'universo non è stato subito accettato: inizialmente infatti si pensava che nell'universo ci fossero regioni con prevalenza di materia e altre di antimateria, e che la nostra fosse una delle prime.

¹⁷In questo caso, invece, ci riferiamo proprio ai protoni.

Pertanto, ad oggi nell'universo c'è un barione ogni 0.6 miliardi di fotoni¹⁸.

Pertanto, l'asimmetria barioni-antibarioni subito dopo l'inflazione è:

$$\frac{n_b - n_{\bar{b}}}{n_b + n_{\bar{b}}} = \frac{n_b - n_{\bar{b}}}{2n_\gamma}$$

ove il passaggio è valido per temperature sufficientemente elevate, e quindi se sono possibili processi del tipo $b + \bar{b} \rightarrow 2\gamma$; poiché sia $n_b - n_{\bar{b}}$ che $2n_\gamma$ sono proporzionali ad a^{-3} , allora:

$$\frac{n_b - n_{\bar{b}}}{n_b + n_{\bar{b}}} = \frac{n_{0b} - n_{0\bar{b}}}{2n_{0\gamma}} \approx \frac{\eta_0}{2} \approx 10^{-9}$$

ove abbiamo trascurato $n_{0\bar{b}}$ in quanto molto minore di n_{0b} .

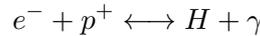
Pertanto, per poter avere oggi un universo con sola materia è sufficiente che nell'universo primordiale ci fossero $10^9 + 1$ barioni ogni 10^9 antibarioni: in questo modo il barione in più non ha nessuno con cui annichilirsi, e formerà l'origine della materia che compone oggi l'universo.

3.4 La formazione dei primi elementi

Come già sappiamo, prima che gli elettroni si combinassero con i protoni per dare luogo ai primi atomi di idrogeno, elettroni e fotoni interagivano tramite scattering Compton, e quindi la materia era ben termalizzata. Quando si formarono i primi atomi di idrogeno neutro, per i fotoni diventò molto più difficile interagire con la materia, e agli effetti pratici possiamo pensare che dopo del tempo l'interazione non sia più avvenuta, e a partire da quel momento le due componenti sono divenute indipendenti (si tratta del disaccoppiamento); l'istante in cui avviene questo disaccoppiamento, come sappiamo, è detto *superficie di ultimo scattering*.

3.4.1 La ricombinazione dell'idrogeno

Vogliamo quindi studiare il processo:



Per poter avere carica globale nulla, bisogna che nell'universo ci sia lo stesso numero di elettroni e protoni, quindi $n_e = n_p$; in questo contesto dunque la densità numerica dei barioni sarà:

$$n_b = n_p + n_H$$

(in realtà stiamo trascurando il contributo dovuto a ${}^4\text{He}$, che vedremo poi).

Se supponiamo che il processo sia avvenuto all'equilibrio termico possiamo usare dei rapporti precisi fra i potenziali chimici coinvolti:

$$\mu_e + \mu_p = \mu_H$$

Poiché elettroni, protoni e atomi di idrogeno *non* sono relativistici, possiamo usare la statistica di Boltzmann (abbiamo posto $k_B = 1$):

$$n_i = g_i \left(\frac{m_i T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\mu_i - m_i}{T} \right)$$

Quindi:

$$n_H = g_H \left(\frac{m_H T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\mu_H - m_H}{T} \right)$$

Ricordando che l'energia di legame dell'idrogeno è $B = m_p + m_e - m_H \approx 13.6$ eV, allora $m_H = m_p + m_e - B$ e pertanto:

$$n_H = g_H \left(\frac{m_H T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\mu_e + \mu_p + B - m_p - m_e}{T} \right)$$

Ma si ha anche:

$$n_{p/e} = g_{p/e} \left(\frac{m_{p/e} T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\mu_{p/e} - m_{p/e}}{T} \right)$$

¹⁸La situazione in termini energetici è rovesciata rispetto a quella in termini numerici.

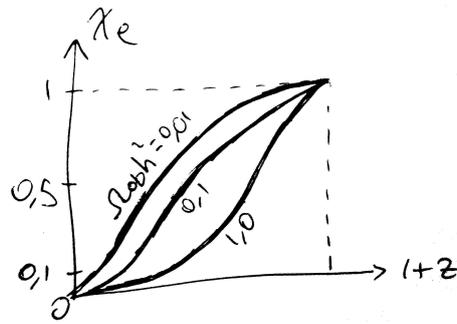


Figura 3.7: Ricombinazione dell'idrogeno

Come si vede, l'istante della ricombinazione (in questo caso nel grafico c'è il redshift in ascissa), ossia il valore di T dipende dal valore $\Omega_{0b}h^2$.

Attraverso il processo della ricombinazione dell'idrogeno, il rate d'interazione materia-radiazione crolla vertiginosamente. Questo rate è pari a:

$$\Gamma_\gamma = n_e \sigma_T$$

ove n_e è la densità numerica dei centri scatteratori (gli elettroni) e σ_T la sezione d'urto Thomson del processo. Infatti la ricombinazione dell'idrogeno fa "scompare" elettroni liberi, diminuendo il valore di n_e .

In realtà, contrariamente a quello che abbiamo supposto nel fare il calcolo precedente, il processo *non* avviene all'equilibrio termico; studiando il problema con l'equazione di Boltzmann risulta che l'ultimo scattering avviene molto più tardi di quanto abbiamo previsto.

Ora, a seguito dell'ultimo scattering la radiazione dell'universo è composta fundamentalmente da fotoni (i neutrini, come sappiamo, sono già disaccoppiati da tempo) perfettamente termici, mentre la materia è composta anche da una componente oscura, che in quanto tale non partecipa al processo (interagisce solo gravitazionalmente). La radiazione ha dunque uno spettro planckiano. Le lunghezze d'onda (e quindi anche i momenti) dei fotoni scalano come $1/a$, così come la temperatura; pertanto, possiamo considerare la planckiana della radiazione cosmica di fondo come invariante in forma nell'evoluzione dell'universo, a patto di considerarne la "temperatura" come un parametro (come abbiamo peraltro già detto in precedenza).

Dopo la ricombinazione dell'idrogeno si è potuta formare la prima generazione di stelle dell'universo (oggi non più esistenti)²⁰. Queste una volta esplose alla fine del loro ciclo vitale hanno cominciato a diffondere gas caldo, che scontrandosi col gas proveniente da altre stelle ha raggiunto temperature paragonabili a quelle dell'ultimo scattering, reionizzando l'idrogeno (che infatti oggi osserviamo principalmente in forma ionizzata); questo processo ha anche effetti osservabili sulla radiazione cosmica di fondo (in particolare sulle sue piccole anisotropie). A questo punto della vita dell'universo, quindi, a guidare l'evoluzione termica dei barioni non c'è più il serbatoio costituito dai fotoni: la temperatura della materia evolve in modo autonomo e spontaneo.

Ciò che vogliamo ora vedere è che dopo la ricombinazione dell'idrogeno la materia tende a raffreddarsi più velocemente della radiazione.

Consideriamo la terza equazione di Friedmann, ossia l'equazione di continuità per la materia-energia:

$$\dot{\rho} = -3H(\rho + P)$$

Questa vale considerando tutte le componenti dell'universo; se però queste non interagiscono più, possiamo considerare le varie equazioni di continuità separatamente.

Dopo l'ultimo scattering, quindi, possiamo considerare due equazioni distinte per materia e radiazione. Per la materia, pertanto:

$$\dot{\rho}_m = -3H(\rho_m + P_m)$$

²⁰Queste si sono formate in condizioni molto diverse da quelle nelle quali si sono formate le stelle attualmente esistenti: allora infatti l'unico elemento che poteva partecipare alla formazione delle stelle era l'idrogeno (in realtà anche una piccola parte di ^4He).

Conviene riscrivere l'equazione in questo modo (ossia come condizione di adiabaticità per il fluido cosmico):

$$d(\rho_m c^2 a^3) + P_m da^3 = 0$$

e adesso dobbiamo considerare anche la pressione della materia (che comunque sappiamo essere piccola, anche se non nulla). Sviluppando l'espressione dell'energia dei barioni considerando anche il contributo dell'energia interna:

$$\rho_m c^2 = m_p n_b c^2 \left[1 + (\gamma - 1)^{-1} \frac{k_B T}{m_p c^2} \right]$$

ove m_p è la massa del protone (ricordiamoci infatti che i barioni dell'universo sono per la quasi totalità atomi di idrogeno, anche se un po' d'elio c'è), n_b la densità numerica di barioni e γ l'indice adiabatico del fluido cosmico. Poiché possiamo considerare questo come un gas monoatomico (perché composto appunto di solo idrogeno), allora $\gamma = 5/3$. Pertanto, inserendo nella condizione di adiabaticità:

$$d \left[\left(m_p n_b c^2 + \frac{3}{2} m_p n_b \frac{k_B T}{m_p} \right) a^3 \right] = -n_b k_B T da^3$$

Sicuramente vale $d(n_b a^3) = 0$ (ossia il numero di barioni in un volume che si espande con l'universo è conservato), pertanto:

$$\frac{3}{2} n_b a^3 k_B dT = -n_b k_B T da^3 = -3 n_b k_B T a^2 da \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} dT = -T \frac{da}{a} \quad \Rightarrow \quad T \propto a^{-2}$$

Effettivamente, dunque, la temperatura della materia diminuisce più velocemente di quella della radiazione (che come sappiamo va come a^{-1}).

Raffreddandosi più in fretta, la materia ha creato le condizioni per l'instabilità gravitazionale, che ha portato alla formazione delle prime strutture cosmiche (vedi 4.2).

3.5 Equivalenza radiazione-materia

Sappiamo che in generale usando l'equazione di stato $P = w\rho$ allora $\rho \propto a^{-3(1+w)}$, e quindi per la materia essendo $w = 0$ si ha $\rho_m \propto a^{-3}$ mentre per la radiazione essendo $w = 1/3$ si ha $\rho_r \propto a^{-4}$.

Pertanto la radiazione ha dominato la composizione dell'universo per a piccolo, mentre la materia per a più grande (inoltre a scala con potenze di t diverse nei due casi); deve esserci stato pertanto un istante nel quale è avvenuto il passaggio dal dominio della radiazione a quello della materia. Il nostro obiettivo adesso è di determinare quando questo fenomeno, detto *equivalenza radiazione-materia*, è avvenuto.

Chiamiamo z_{eq} il redshift relativo all'istante dell'equivalenza radiazione-materia (ove ovviamente nella componente di materia stiamo considerando anche quella oscura). Pertanto, per definizione:

$$\rho_r(z_{eq}) = \rho_m(z_{eq})$$

ma:

$$\rho_r(z) = \rho_{0r}(1+z)^4 \quad \rho_m(z) = \rho_{0m}(1+z)^3$$

Si avrà quindi:

$$\rho_{0r}(1+z_{eq})^4 = \rho_{0m}(1+z_{eq})^3 \quad \Rightarrow \quad 1+z_{eq} = \frac{\rho_{0m}}{\rho_{0r}}$$

Notiamo che poiché le densità d'energia dei barioni e della materia oscura scalano con la stessa potenza di a , anche al tempo dell'equivalenza radiazione-materia la componente dominante di materia era quella oscura.

Insomma, si può scrivere:

$$1+z_{eq} = \frac{\Omega_{0m}}{\Omega_{0r}} = 2.3 \cdot 10^4 \Omega_{0m} h^2 \approx 3 \cdot 10^3$$

Pertanto, il redshift relativo all'equivalenza radiazione-materia è pari a circa 3000. Confrontandolo con quello relativo all'ultimo scattering (circa 1200) notiamo che l'equivalenza avviene *prima* della ricombinazione dell'idrogeno: quando si sono formati i primi atomi l'universo era *già* dominato dalla materia.

Ci sarebbe però una terza componente dell'universo: l'energia oscura. Dato che sappiamo che è l'attuale componente dominante dell'universo, quand'è che è avvenuto il passaggio dal dominio della materia a quello dell'energia oscura?

Detto z_Λ il redshift relativo alla transizione materia-energia oscura (teniamo a mente che se nell'equazione di stato $w = 1$, $\rho = \text{cost.}$)²¹

$$\rho_m(z_\Lambda) = \rho_\Lambda \quad \Rightarrow \quad \rho_{0m}(1+z_\Lambda)^3 = \rho_{0\Lambda} \quad \Rightarrow \quad 1+z_\Lambda = \left(\frac{\rho_{0\Lambda}}{\rho_{0m}}\right)^{1/3} = \left(\frac{\Omega_{0\Lambda}}{\Omega_{0m}}\right)^{1/3} \approx \left(\frac{7}{3}\right)^{1/3}$$

Quindi:

$$z_\Lambda \approx \left(\frac{7}{3}\right)^{1/3} - 1 \approx 0.3$$

Si tratta dunque di un fenomeno molto recente.

3.6 Disaccoppiamento di specie particellari

Chiamiamo Γ il rate d'interazione (ossia il numero di interazioni per unità di tempo) fra due specie particellari. Allora il numero di interazioni che avvengono a partire dall'istante t sarà:

$$N_{\text{int}} = \int_t^\infty \Gamma(t') dt'$$

Se $\Gamma > H$ allora siamo in condizioni di *accoppiamento*, altrimenti se $\Gamma < H$ si ha il *disaccoppiamento* fra le due specie.

Il tempo caratteristico d'interazione è $\tau_{\text{int}} = \Gamma^{-1}$, mentre il tempo caratteristico dell'espansione dell'universo è $\tau_{\text{exp}} = H^{-1}$; pertanto, si ha accoppiamento fra le specie particellari se $\tau_{\text{int}} < \tau_{\text{exp}}$, altrimenti si è in condizioni di disaccoppiamento.

Sappiamo che $H \propto T^2$, e vedremo che si può anche scrivere $\Gamma \propto T^n$; pertanto:

$$N_{\text{int}} \approx \left(\frac{\Gamma}{H}\right)_t \frac{1}{n-2}$$

Se quindi $n > 2$, dopo l'istante t al quale $\Gamma = H$ risulta che la particella andrà incontro a solo due interazioni nel resto della sua vita (agli effetti pratici, dunque, non interagisce più).

Il rate Γ è definito come:

$$\Gamma = n \langle \sigma v \rangle$$

ove n è la densità numerica di centri scatteratori, σ la sezione d'urto d'interazione, v la velocità relativa delle particelle e $\langle \cdot \rangle$ una opportuna media termica. D'altra parte, invece:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \quad \rho \propto T^4 \quad \Rightarrow \quad H \sim \frac{T^2}{m_P}$$

Dobbiamo distinguere fra i vari tipi possibili di interazione fra specie particellari:

1. Interazioni mediate da un bosone di gauge²² di massa nulla (ad esempio il fotone per l'elettromagnetismo)
2. Interazioni mediate da un bosone di gauge massivo (ad esempio W^\pm e Z^0 per le interazioni deboli), al di sotto della scala di rottura della relativa simmetria (nel caso elettrodebole, $T < 200$ GeV)

In questi due casi si ha:

²¹Si ha poi $\Omega_{0\Lambda}/\Omega_{0m} = 7/3$ perché l'energia oscura costituisce circa il 70% dell'universo, mentre la materia (ordinaria e oscura) il restante 30%.

²²Per noi un *bosone di gauge* è semplicemente la particella che media l'interazione (non occorre sapere altro).

1. $\sigma \sim \alpha^2/T^2$, ove α è una costante adimensionale (la costante di struttura fine nel caso elettromagnetico), legata alla costante di accoppiamento di gauge $g = \sqrt{4\pi\alpha}$.
2. $\sigma \sim G_x^2 T^2$, ove G_x è una costante dimensionale legata alla massa del bosone massivo x , e ci aspettiamo che $G_x \sim \alpha/m_x^2$, ossia $\sigma \sim \alpha^2 T^2/m_x^4$.
Ripetiamo che ciò è vero solo al di sotto della temperatura pari alla massa del bosone di gauge (altrimenti si ricade nel primo caso, come si può vedere sostituendo $m_x = T$).

In base a queste informazioni (che prendiamo per buone) vogliamo trovare una relazione fra Γ e H :

1. In questo caso:

$$\Gamma = n\sigma v \approx T^3 \cdot \frac{\alpha^2}{T^2} \cdot c^2 \qquad H \sim \frac{T^2}{m_P}$$

(ove la velocità relativa è c perché siamo per definizione in un caso relativistico). Quindi:

$$\frac{\Gamma}{H} \sim T^3 \frac{\alpha^2}{T^2} \frac{m_P}{T^2} = \alpha^2 \frac{m_P}{T}$$

Pertanto, nelle interazioni mediate da bosoni di gauge non massivi si ha disaccoppiamento per $\Gamma/H < 1 \Rightarrow T > \alpha^2 m_P$. Nel caso dell'elettromagnetismo, poiché $m_P \approx 10^{19}$ GeV e $\alpha \simeq 10^{-3}$, $T \approx 10^{16}$ GeV²³.

2. In questo caso:

$$\Gamma = n\sigma v \sim T^3 \cdot G_x^2 T^2 \cdot c \sim G_x^2 T^5$$

(ove stavolta il fattore c è dovuto al fatto che anche se il bosone è massivo l'altra particella è comunque relativistica) e quindi:

$$\frac{\Gamma}{H} \sim G_x^2 m_P T^3$$

Si ha pertanto disaccoppiamento per $T < G_x^{-2/3} m_P^{-1/3}$ (ricordiamoci che comunque si deve avere $T > m_x$).

La situazione è insomma rovesciata rispetto al caso precedente: si ottiene il disaccoppiamento abbassando la temperatura. Possiamo anche scrivere:

$$T < G_x^{-2/3} m_P^{-1/3} \sim \left(\frac{m_x}{100 \text{ GeV}} \right)^{4/3} \text{ MeV}$$

dalla quale deduciamo che un'interazione con $m_x \approx 100$ GeV (come nel caso dell'interazione debole) si disaccoppi alla temperatura di 1 MeV.

Possiamo anche provare a implementare la gravità in quest'ultimo caso (visto che la costante di accoppiamento è dimensionale): sostituendo $G_x = G$ si trova che la temperatura di disaccoppiamento per la gravità è (come ci si aspetta) quella di Planck.

3.7 Studio dell'abbondanza di materia oscura

Vogliamo ora studiare le proprietà generali dell'abbondanza (ossia ρ) di materia oscura, e per farlo dobbiamo studiare l'evoluzione delle densità d'energia media delle varie particelle.

A questo scopo è necessario usare una versione "semplificata" dell'equazione di Boltzmann:

$$\hat{\mathbb{L}}[f] = \mathbb{C}[f]$$

ove f è la funzione di distribuzione delle particelle nello spazio delle fasi, $\hat{\mathbb{L}}$ è l'operatore di Liouville e \mathbb{C} quello di collisione. Quest'equazione descrive come evolve la distribuzione nello spazio delle fasi di un sistema

²³Prima dell'avvento del modello inflazionario si pensava che fra i 10^{19} e 10^{16} GeV di temperatura ci fossero particelle ultrarelativistiche termalizzate da gravitoni ma non accoppiate. Questa eventualità diventa però irrilevante alla luce dell'inflazione.

di particelle soggette a scattering.

Nel caso non relativistico, l'operatore di Liouville è la cosiddetta *derivata convettiva* nello spazio delle fasi:

$$\hat{\mathbb{L}} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{\nabla}_x + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{\nabla}_v = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}_x + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \vec{\nabla}_v$$

ove la forza \vec{F} contiene tutti i contributi "classici" che agiscono sulle particelle (forza di gravità, di Lorentz ecc.)²⁴.

La parte relativa all'operatore di collisione, invece, contiene i termini di scattering (che consideriamo eventi istantanei) e le distribuzioni delle particelle che partecipano allo scattering.

Poiché l'urto fra le particelle è localizzato, possiamo ragionare in termini di relatività speciale (ossia in termini locali).

Nel caso di una metrica di Robertson-Walker, l'operatore di Liouville applicato ad una funzione di energia e tempo ha la forma:

$$\hat{\mathbb{L}}[f(E, t)] = E \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} |\vec{p}|^2 \frac{\partial f}{\partial E}$$

(non è presente la parte con $\vec{\nabla}_x$ perché siamo interessati alla densità *media* di particelle, in quanto la funzione di distribuzione è mediata sulle posizioni e non dipende dalla direzione del momento per isotropia). Pertanto:

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{p^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} = \frac{1}{E} \mathbb{C}[f]$$

La densità numerica delle particelle che stiamo studiando, come sappiamo, è:

$$n_x(t) = \frac{g_x}{(2\pi)^3} \int f(\vec{x}, \vec{p}, t) d^3p$$

e quindi l'equazione di Boltzmann che dobbiamo studiare è:

$$\frac{\partial n_x}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{g_x}{(2\pi)^3} \int \frac{p^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} d^3p = \frac{g_x}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3p}{E} \mathbb{C}[f]$$

Ora:

$$\int \frac{p^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} d^3p = 2 \int p^2 \frac{\partial^2 f}{\partial E^2} d^3p = \int p \frac{\partial f}{\partial p} d^3p = \int_0^{+\infty} p^2 p \frac{\partial f}{\partial p} dp \int_{4\pi} d\Omega$$

ove nel primo passaggio abbiamo usato il fatto che $dE^2 = 2E dE$, nel secondo abbiamo sfruttato la proporzionalità fra E^2 e p^2 e nell'ultimo abbiamo usato coordinate polari nello spazio dei momenti. Proseguendo:

$$\int \frac{p^2}{E} \frac{\partial f}{\partial E} d^3p = 4\pi \int_0^{+\infty} p^3 \frac{\partial f}{\partial p} dp = [4\pi p^3 f]_0^{+\infty} - 4\pi \cdot 3 \int_0^{+\infty} p^2 f dp$$

ove abbiamo integrato per parti, e il termine fra parentesi è nullo perché ci aspettiamo che f si annulli all'infinito come e^{-x^2} (pensando ad esempio alla distribuzione di Maxwell-Boltzmann). L'integrale rimanente ricorda la forma di n_x :

$$n_x = \frac{g_x}{(2\pi)^3} \int f d^3p = \frac{4\pi g_x}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} p^2 f dp$$

Pertanto:

$$\frac{dn}{dt} + 3 \frac{\dot{a}}{a} n = \frac{g_x}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{E} \mathbb{C}[f] d^3p$$

Supponiamo che la specie particellare non sia soggetta ad alcuno scattering. Allora $\mathbb{C} = 0$ e $n \propto a^{-3}$: il numero di particelle in un volume che si espande con l'universo è conservato, in assenza di scattering. Questa condizione si può presentare anche in condizioni di accoppiamento perfetto (perché si creano tante particelle

²⁴Nel caso relativistico la forza gravitazionale va vista come deformazione dello spaziotempo: le particelle percorrono geodetiche, regolate da equazioni contenenti derivate del tensore metrico. Insomma, in questo caso la gravità non entra in gioco come forza esterna ma come effetto di curvatura.

quante antiparticelle).

Ragioniamo ora qualitativamente sul lato destro dell'equazione. Scriviamo:

$$\dot{n} + 3\frac{\dot{a}}{a}n = \Psi - \Gamma_A n = \Psi - \langle \sigma_{Av} \rangle n^2$$

ove Ψ è il rate di creazione di particelle per unità di volume, mentre $\Gamma_A n$ è il termine di annichilazione. All'equilibrio, il secondo membro dev'essere nullo, quindi $\Psi = \langle \sigma_{Av} \rangle n_{\text{eq}}^2$. Scriviamo pertanto:

$$\dot{n} + 3\frac{\dot{a}}{a}n = \langle \sigma_{Av} \rangle (n_{\text{eq}}^2 - n^2)$$

Cerchiamo di modificare quest'equazione in modo conveniente.

Definiamo n_c (ove c sta per "comovente") come:

$$n_c = n \frac{a^3}{a_0^3}$$

di modo che:

$$\dot{n}_c = \frac{a^3}{a_0^3} \left(\dot{n} + 3n \frac{\dot{a}}{a} \right)$$

e riscrivendo n e n_{eq} in termini di n_c :

$$\dot{n}_c = \left(\frac{a}{a_0} \right)^3 \langle \sigma_{Av} \rangle (n_{\text{eq}}^2 - n^2) = \left(\frac{a}{a_0} \right)^3 \langle \sigma_{Av} \rangle \left(n_{c,\text{eq}}^2 \frac{a_0^6}{a^6} - n_c^2 \frac{a_0^6}{a^6} \right) = - \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 n_{c,\text{eq}}^2 \langle \sigma_{Av} \rangle \left[\left(\frac{n_c}{n_{c,\text{eq}}} \right)^2 - 1 \right]$$

Riscrivendo ora la derivata rispetto al tempo inserendo il fattore di scala ($d/dt = \dot{a}/da$):

$$\frac{a}{n_{c,\text{eq}}} \frac{dn_c}{da} = - \frac{\langle \sigma_{Av} \rangle n_{\text{eq}}}{\dot{a}/a} \left[\left(\frac{n_c}{n_{c,\text{eq}}} \right)^2 - 1 \right] = - \frac{\tau_{\text{exp}}}{\tau_{\text{coll}}} \left[\left(\frac{n_c}{n_{c,\text{eq}}} \right)^2 - 1 \right]$$

ove $\tau_{\text{exp}} = H^{-1}$ e $\tau_{\text{coll}} = \Gamma^{-1} = 1/(n_{\text{eq}} \langle \sigma_{Av} \rangle)$.

Consideriamo due casi:

$\tau_{\text{exp}}/\tau_{\text{coll}} \gg 1$: Siamo in condizioni di accoppiamento ($H \ll \Gamma$). Poiché il lato sinistro dell'equazione non deve divergere, il contenuto delle parentesi quadre deve tendere a zero, ossia $n = n_{\text{eq}}$.

$\tau_{\text{exp}}/\tau_{\text{coll}} \ll 1$: Siamo in condizioni di disaccoppiamento ($H \gg \Gamma$). In questo caso $n_c = \text{cost.}$, quindi $na^3 = \text{cost.} = n_c(t_{\text{disacc}})$.

Notiamo che in entrambi i casi la densità numerica comovente n_c è costante, ma lo è per motivi diversi.

Vogliamo ora studiare l'abbondanza di materia oscura, che è disaccoppiata (potendo interagire solo gravitazionalmente). Si distinguono due tipi di materia oscura:

Materia oscura calda: è composta da particelle che nel momento del loro disaccoppiamento erano ultrarelativistiche.

Materia oscura fredda: è composta da particelle che nel momento del loro disaccoppiamento erano già non relativistiche.

Oggi sappiamo che dei possibili costituenti per la materia oscura calda sono i neutrini con piccola massa, mentre quelli della materia oscura fredda i neutralini (messi però in difficoltà dagli ultimi risultati dell'LHC) e gli assioni (che però non sono nati in modo termico, e quindi i ragionamenti che vedremo non varranno per loro).

Nel caso della materia oscura calda (i neutrini), avevamo visto che:

$$T_{0\nu} = \left(\frac{g_{*0}}{g_{*d}} \right)^{1/3} T_{0\gamma}$$

ove d sta per “disaccoppiamento”, e che dall’istante del disaccoppiamento in poi $T_\nu \propto 1/a$; pertanto $n_\nu \propto a^{-3} \propto T_\nu^3$ (anche quanto T_ν non è più una vera temperatura ma un parametro).

Pertanto, la densità numerica attuale di particelle x componenti la materia oscura calda sarà:

$$n_{0x} = B g_x \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_{0x}^3 = \frac{B}{2} n_{0\gamma} g_x \left(\frac{T_{0x}}{T_{0\gamma}} \right)^3 = \frac{B}{2} n_{0\gamma} g_x \left(\frac{g_{*0}}{g_{*x}} \right)$$

ove B vale 1 per bosoni e $3/4$ per fermioni, e si è sfruttato il fatto che $n_\gamma = 2 \frac{\zeta(3)}{\pi^2} T_{0\gamma}^3$. La densità d’energia di queste particelle, poi, sarà $\rho_{0x} = m_x n_{0x}$, se oggi fossero non relativistiche (se lo fossero ρ sarebbe uguale a quella dei fotoni con un fattore correttivo, quindi Ω_{0x} sarebbe dell’ordine di 10^{-5} , irrilevante). Quindi:

$$\rho_{0x} = \frac{1}{2} m_x n_{0\gamma} g_x \frac{g_{*0}}{g_{*x}} B$$

Pertanto:

$$\Omega_{0x} h^2 \simeq \frac{m_x n_{0x}}{\rho_{0c}} h^2 \simeq 2 B g_x \frac{g_{*0}}{g_{*x}} \frac{m_x}{10^2 \text{ eV}}$$

Il caso della materia oscura fredda è più complicato da studiare. All’epoca del disaccoppiamento si ha:

$$n_x(t_{d,x}) = g_x \left(\frac{m_x T_{d,x}}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m_x}{T_{d,x}} \right)$$

e pertanto:

$$n_{0x} = n(t_{d,x}) \left(\frac{a(t_{d,x})}{a_0} \right)^3 = n(t_{d,x}) \frac{g_{*0}}{g_{*x}} \left(\frac{T_{0\gamma}}{T_{d,x}} \right)^3$$

Le formule sono dunque non troppo complicate, ma il problema è determinare il momento del disaccoppiamento. Considerando H :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\pi^2}{30} g_* T^4 \quad \Rightarrow \quad \tau_{\text{exp}} \approx 0.3 \cdot g_*^{-1/2} \frac{m_P}{T^2} \quad \Rightarrow \quad \tau_{\text{exp}}(t_{d,x}) = 0.3 \cdot g_*^{-1/2} \frac{m_P}{T_{d,x}^2}$$

Considerando $\Gamma = n \sigma_A v$, per la maggior parte delle particelle che ci interessano possiamo scrivere $\langle \sigma_A v \rangle = \sigma_0 (T/m_x)^N$ con $N = 0, 1$. Quindi:

$$\tau_{\text{coll}}(t_{d,x}) = \left[n(t_{d,x}) \sigma_0 \left(\frac{T_{d,x}}{m_x} \right)^N \right]^{-1}$$

Per trovare l’istante di disaccoppiamento dobbiamo porre $\tau_{\text{exp}} = \tau_{\text{coll}}$:

$$\left[n(t_{d,x}) \sigma_0 \left(\frac{T_{d,x}}{m_x} \right)^N \right]^{-1} = 0.3 \cdot g_*^{-1/2} \frac{m_P}{m_x^2} \left(\frac{m_x}{T_{d,x}} \right)^2$$

Fra le soluzioni di quest’equazione trascendente scegliamo quella in cui $T_{d,x}/m_x \ll 1$ (condizioni non relativistiche).

Definendo $x_{d,x} = m_x/T_{d,x}$, alla seconda iterazione nella soluzione dell’equazione si trova:

$$x_{d,x} = \ln \left(0.038 \frac{g_x}{g_{*x}^{1/2}} m_P m_x \sigma_0 \right) - \left(n - \frac{1}{2} \right) \ln \ln \left(0.038 \frac{g_x}{g_{*x}^{1/2}} m_P m_x \sigma_0 \right)$$

a questo punto possiamo determinare n_x e quindi ρ .

Notiamo che l’abbondanza di materia oscura in questo caso dipende *fortemente* dal tipo di particella considerata.

Possiamo supporre di scrivere la densità d’energia come:

$$\rho(\vec{x}, t) = \bar{\rho}(t) + \delta\rho(\vec{x}, t)$$

ove il primo termine è la densità media e il secondo delle perturbazioni rispetto a questa.

Le perturbazioni causate dalla materia oscura creano buche di potenziale all'interno delle quali “cade” la materia barionica. Si creano pertanto delle disomogeneità nella distribuzione della materia.

Una particella di materia oscura calda (come ad esempio i neutrini) ha in genere abbastanza energia per poter uscire dalla buca: in questo modo, muovendosi liberamente (*free streaming*), tenderà a distruggere le disomogeneità $\delta\rho$ e a riportare quindi l'universo in una condizione omogenea. Una particella di materia oscura fredda, invece, non ha sufficiente energia per farlo e non distruggerà queste disomogeneità.

Ora, come vedremo in 4.2, le megastrutture formate dalle “buche” all'interno delle quali “cade” la materia barionica tenderanno a formare al loro interno altre piccole disomogeneità, che tenderanno ad acuirsi e “frammentare” le megastrutture, portando alla formazione delle galassie (all'interno delle quali si formano le stelle).

Nel caso della materia oscura fredda si ha che la lunghezza di Jeans (ossia la dimensione della più piccola struttura che si può far collassare, vedi sempre 4.2) è zero. In realtà non è esattamente nulla, ma non si sa ancora bene quanto sia piccola.

Il modello attuale di materia oscura si chiama Λ CDM (perché consiste di una miscela di materia oscura fredda ed effetti di costante cosmologica), ma sappiamo che presenta comunque dei problemi:

- Ha un eccesso di sottostrutture (prevede “aloncini” all'interno degli aloni di materia oscura che non sono osservati)
- Porta a determinare che un alone di materia oscura ha, al suo interno, una cuspid (non un buco nero). Come si può risolvere questo problema?
 - Supponendo che la materia oscura abbia dell'autointerazione non gravitazionale
 - Supponendo che la materia oscura, invece di essere fredda, sia “tiepida” e quindi abbia sufficiente energia cinetica da evitare le cuspidi (scenario poco probabile)
 - Supponendo che la materia oscura interagisca con i barioni solo attraverso la gravità: potrebbe esserci quindi un processo di feedback fra barioni e materia oscura (soluzione probabile ma difficilmente osservabile)

3.8 La nucleosintesi primordiale

Negli anni '60 Gamow notò che l'abbondanza in massa di ${}^4\text{He}$ nel cosmo è pari a:

$$Y = \frac{M_{{}^4\text{He}}}{M_b} = \frac{\rho_{{}^4\text{He}}}{\rho_b} \approx 25\%$$

ove $M_{{}^4\text{He}}$ è la massa totale di ${}^4\text{He}$ e M_b la massa barionica totale. In termini di densità numerica, $n_{{}^4\text{He}}/n_b \approx 6\%$; altri elementi sono molto meno abbondanti ($Y_{{}^3\text{He}} = Y_{{}^4\text{He}}/1000$, $Y_{\text{deuterio}} \approx 2\%$).

Questa grande abbondanza di ${}^4\text{He}$ è difficile da spiegare perché oltre ad essere prodotto viene anche continuamente bruciato nelle stelle. Possiamo dunque supporre che ${}^4\text{He}$ fosse una componente primordiale dell'universo: ciò allora implica che nell'universo primordiale ci dovevano essere temperature sufficientemente elevate da permettere la sintetizzazione di questo nucleo.

La densità numerica dei protoni e neutroni necessari a creare ${}^4\text{He}$ era:

$$n_{p/n} = g_{p/n} \left(\frac{m_{p/n} T}{2\pi} \right)^{3/2} \exp \left(\frac{\mu_{p/n} - m_{p/n}}{T} \right)$$

Detta dunque n la densità dei neutroni e p quella dei protoni:

$$\frac{n}{p} \approx \exp \left(-\frac{m_n - m_p}{T} \right)$$

ove abbiamo sfruttato il fatto che $m_n/m_p \approx 1$, e trascurato i potenziali chimici perché molto più piccoli della differenza delle masse, e tenuto conto del fatto che $m_n - m_p \approx 1.3$ MeV; questa differenza è positiva perché il neutrone è instabile:

$$n + \nu_e \leftrightarrow p + e^- \quad n + e^+ \leftrightarrow p + \bar{\nu}_e \quad n \leftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

Pertanto, dipendendo dalla temperatura, n/p dipende dal tempo.

Come abbiamo già detto, sotto la temperatura di 1 MeV i processi che coinvolgono i neutrini si “congelano”, bloccando il valore di n/p e fornendoci dunque le condizioni iniziali per la nucleosintesi:

$$\frac{n}{p}|_{t_\nu} = \exp\left(\frac{m_p - m_n}{T_{d\nu}}\right) \approx e^{-1.5}$$

(ove abbiamo ulteriormente approssimato $m_n - m_p \approx 1.5$ MeV).

Pertanto:

$$X_n(t_\nu) \equiv \frac{n}{n+p} \approx (1 + e^{1.5})^{-1} \approx 0.17$$

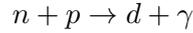
In realtà, dopo questa fase è ancora attivo il processo di decadimento β , caratterizzato da un andamento temporale di tipo esponenziale:

$$X_n(t) = X_n(t_\nu) \exp\left(-\frac{t - t_\nu}{\tau_n}\right)$$

ove τ_n è la vita media del neutrone, e $\tau_n = \ln 2 \tau_{1/2}$ con $\tau_{1/2} = (10.5 \pm 0.2)$ minuti tempo di dimezzamento; notiamo che tutti gli intervalli di tempo che stiamo considerando sono sicuramente minori di 10 minuti, in quanto l'universo stesso è vecchio di approssimativamente un secondo: pertanto il decadimento β avviene, ma è poco rilevante.

Il processo di formazione di ${}^4\text{He}$ avviene in più fasi: prima si forma il deuterio, poi questo si scontra con un protone producendo un nucleo di ${}^3\text{He}$ che si scontra velocemente con un altro deuterio portando alla formazione di un nucleo di ${}^4\text{He}$. Di questi passi il più lento è il primo per via della foto-dissociazione del deuterio (spesso si parla di *deuterium bottleneck*), e una volta avvenuto questo gli altri procedono molto velocemente.

Consideriamo quindi il processo:



La densità numerica del deuterio d è:

$$n_d = g_d \left(\frac{m_d T}{2\pi}\right)^{3/2} \exp\left(\frac{\mu_d - m_d}{T}\right)$$

Ponendo $B_d = m_n + m_p - m_d \approx 2.2$ MeV $\approx 2.5 \cdot 10^{10}$ K, si ha:

$$n_d = \frac{g_d}{g_p g_n} n_p \left(\frac{m_d}{m_p m_n}\right)^{3/2} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-3/2} \exp\left(\frac{B_d}{T}\right)$$

ove $g_d = 3$ e $g_p = g_n = 2$. Dividendo per n_b :

$$\begin{aligned} X_d &= n_b \frac{3}{4} X_n X_p \left(\frac{m_d}{m_p m_n}\right)^{3/2} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-3/2} e^{B_d/T} \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow X_d(T) &= \frac{3}{4} \left(\frac{n_b}{n_\gamma}\right) n_\gamma X_n X_p \left(\frac{m_d}{m_p m_n}\right)^{3/2} \left(\frac{T}{2\pi}\right)^{-3/2} e^{B_d/T} \end{aligned}$$

Sfruttando la definizione di $\eta_0 = n_{0b}/n_{0\gamma} = n_b/n_\gamma$:

$$X_d(T) = \frac{3}{4} \eta_0 \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} (2\pi T)^{3/2} X_n X_p \left(\frac{m_d}{m_n m_p}\right)^{3/2} e^{B_d/T}$$

Possiamo sfruttare l'approssimazione $X_n + X_p \approx 1$, che consiste sostanzialmente nel trascurare le densità numeriche degli elementi dopo il deuterio, che come abbiamo visto sono molto meno abbondanti di esso.

Dunque:

$$X_d(T) \approx \frac{3}{4} \eta_0 \frac{2\zeta(3)}{\pi^2} (2\pi T)^{3/2} X_n (1 - X_n) \left(\frac{m_d}{m_n m_p}\right)^{3/2} e^{B_d/T}$$

e sappiamo che:

$$X_n(T) = X_n(T_{d\nu}) \exp\left(-\frac{t - t_{d\nu}}{\tau_n}\right)$$

Possiamo a questo punto riscrivere X_d in una forma più utile:

$$X_d(T) \approx X_n(1 - X_n) \exp\left[-29.33 + \frac{25.82}{T_9} - \frac{3}{2} \ln T_9 + \ln(\Omega_{0b} h^2)\right]$$

ove $T_9 = T/10^9 \text{K}$; il 25.82 è legato a B_d , mentre il -29.33 a η_0 , e tende a ritardare il momento in cui X_d diventa importante.

Ciò che risulta è che a temperature dell'ordine di 10^9K X_d diventa abbastanza rilevante: possiamo dire che in quel momento si è prodotto il deuterio, e quindi anche ${}^4\text{He}$.

Consideriamo ora le reazioni successive:



Vogliamo cercare di capire quanto ${}^4\text{He}$ viene prodotto, ossia vogliamo determinare Y .

Tutti i neutroni che avevamo, in prima approssimazione, vengono usati per produrre ${}^4\text{He}$, e pertanto:

$$Y = \frac{M_{{}^4\text{He}}}{M_b} = \frac{4n_{{}^4\text{He}}}{n_b} = 4 \cdot \frac{1}{2} \frac{n_n}{n_b} = 2X_n = 2 \cdot 0.17 \cdot 0.8 \approx 0.25$$

Lo 0.8 è un fattore correttivo dovuto al fatto che i processi in realtà non sono istantanei e alcuni neutroni si sono "persi". Con un conto rozzo, dunque, si ottiene un risultato ragionevole (ma il conto vero si fa con l'equazione di Boltzmann).

Riconsideriamo la vita media del neutrone; il rate d'interazione debole è:

$$\Gamma \approx G_F^2 T^5 \approx \frac{T^5}{\tau_n}$$

ove G_F è la costante di Fermi. Il disaccoppiamento, come sappiamo, si ha per $\Gamma \approx H$ ossia $T_{d\nu} \approx G_F^{-2/3} m_P^{-1/3}$. Se dunque "aumentassimo" la vita del neutrone la temperatura di disaccoppiamento aumenterebbe: in questo modo avremmo un maggior numero di neutroni, e pertanto una maggior quantità di ${}^4\text{He}$.

Sappiamo poi che $H^2 = \frac{8\pi G}{3} \frac{\pi^2}{30} g_* T^4$: a parità di T , facendo crescere g_* si fa diminuire Γ/H , e si vede che $T_{d\nu} \sim g_*^{1/6}$: aumentando g_* si aumenta $T_{d\nu}$, aumentando dunque la quantità disponibile di neutroni e l'abbondanza finale di ${}^4\text{He}$.

Ora, in g_* entrano in gioco anche le abbondanze delle particelle coinvolte: pertanto, l'abbondanza di ${}^4\text{He}$ dà un limite superiore alle particelle che possiamo inserire in un modello unificato. In particolare, possiamo cercare un limite superiore alla quantità di gravitoni che si potevano avere all'epoca.

Potremmo inoltre chiederci se G sia davvero costante; esprimendo una variazione di G in termini di g_* risulta che a quell'epoca il valore della costante di gravitazione universale non doveva essere molto diverso da quello attuale.

Infine, $\Omega_{0b} h^2$ è un inibitore che limita la produzione di deuterio (essendo infatti $\Omega_{0b} < 1$, $\ln \Omega_{0b} < 0$ e questo rende più piccolo l'esponentiale che esprime X_d); si mostra poi che agisce più efficacemente sulla produzione degli elementi successivi all'elio. Facendo variare il valore di $\Omega_{0b} h^2$ risulta che:

$$0.016 < \Omega_{0b} h^2 < 0.024$$

che è uno dei risultati più importanti della nucleosintesi.

Pertanto, nell'universo non può esserci più di circa il 4% di densità d'energia barionica: l'universo non si può chiudere (geometricamente) con solo i barioni.

Parte II
Astrofisica

Capitolo 4

Evoluzione stellare

4.1 La formazione delle stelle

Ci proponiamo adesso di studiare come si siano formate le prime stelle.

Dopo la formazione dei primi elementi, le piccole disomogeneità della “nebbia” di gas che costituivano l’universo hanno cominciato a crescere per effetto della gravità, attraendo sempre più materiale circostante: a un certo punto la pressione e le temperature raggiunte per via del collasso sono diventate sufficientemente alte da innescare i processi di bruciamento degli elementi leggeri (idrogeno ed elio), dando così vita alle prime vere e proprie stelle. Come vedremo poi, il collasso della stella non dura “in eterno”, ma viene contrastato e fermato dalle forze di pressione esercitate dalle particelle stesse.

Studiamo ora le proprietà fisiche di una nube sferica di raggio R composta da materia barionica che poi diventerà una stella. Come appena detto ci aspettiamo che all’interno di questa agiscano sostanzialmente due forze, quella gravitazionale e quella di pressione.

Cominciamo dalla prima; la massa contenuta entro un raggio r dal centro della nube sarà:

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr'$$

che (pensandola come concentrata al centro della sfera) darà luogo ad un’accelerazione di gravità pari a:

$$g(r) = \frac{Gm(r)}{r^2}$$

Passiamo ora alle forze di pressione; consideriamo un elemento della sfera fra r e $r + \Delta r$, di superficie ΔA e quindi di massa $\Delta M = \rho(r)\Delta r\Delta A$:

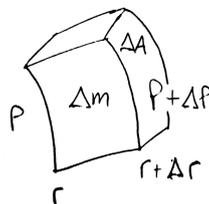


Figura 4.1: Elemento di nube considerato

Facendo riferimento alla figura, la forza di pressione risultante che agisce su quest’elemento è:

$$(P + \Delta P)\Delta A - P\Delta A = \left[P(r) + \frac{dP}{dr}\Delta r \right] \Delta A - P(r)\Delta A = \frac{dP}{dr}\Delta r\Delta A$$

Quindi, la forza netta agente sull’elemento di sfera è legata al gradiente della pressione: questa si oppone alla forza di gravità, rendendo possibile l’equilibrio della nube.

Scegliendo dunque come positivo il verso uscente dalla nube, la forza risultante che il volumetto risente verso il centro di essa è:

$$-\Delta M \ddot{r} = \Delta M g(r) + \frac{dP}{dr} \Delta r \Delta A$$

e poiché $\Delta M = \rho(r) \Delta r \Delta A$, l'accelerazione a cui il volumetto sarà soggetto è:

$$-\ddot{r} = g(r) + \frac{1}{\rho(r)} \frac{dP}{dr}$$

Notiamo che affinché ci sia equilibrio, ossia affinché $\ddot{r} = 0$, sicuramente bisogna che il gradiente di pressione dP/dr sia negativo (ossia che la pressione diminuisca muovendosi verso l'esterno della nube).

Consideriamo adesso due situazioni differenti:

Caduta libera: In questo caso sono del tutto assenti forze di pressione, e pertanto la nube collasserà verso il suo centro. Per constatarlo, consideriamo un “guscio”¹ della nube che ha inizialmente raggio R_0 , e supponiamo che parta con velocità nulla e che nella sua evoluzione non ci siano dissipazioni, ossia $E_K + E_{\text{pot}} = \text{cost}$. Allora, se chiamiamo $m_0 = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} R_0^3$ la massa contenuta nel guscio (con $\bar{\rho}$ la sua densità media):

$$\begin{aligned} E_{K,\text{in}} + E_{GR,\text{in}} = E_{K,\text{fin}} + E_{GR,\text{fin}} &\quad \Rightarrow \quad -\frac{Gm_0}{R_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{Gm_0}{r} \quad \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{Gm_0}{r} - \frac{Gm_0}{R_0} \end{aligned}$$

ed $E_{K,\text{in}} = 0$ perché abbiamo supposto che il guscio parta da fermo. Quindi:

$$-\frac{dr}{dt} = \left(2 \frac{Gm_0}{r} - 2 \frac{Gm_0}{R_0} \right)^{1/2} \quad \Rightarrow \quad -\frac{dt}{dr} = \left(2 \frac{Gm_0}{r} - 2 \frac{Gm_0}{R_0} \right)^{-1/2}$$

ove abbiamo scelto la soluzione negativa in quanto il guscio si sta muovendo verso il centro della nube, ossia ha velocità negativa.

A questo punto, il tempo che il guscio impiega a raggiungere il centro è (*FF* sta per “free fall”):

$$t_{FF} = \int_{R_0}^0 \frac{dt}{dr} dr = - \int_{R_0}^0 \left(2 \frac{Gm_0}{r} - 2 \frac{Gm_0}{R_0} \right)^{-1/2} dr$$

Ponendo $x = r/R_0$:

$$t_{FF} = R_0 \int_0^1 \left(2 \frac{Gm_0}{xR_0} - 2 \frac{Gm_0}{R_0} \right)^{-1/2} dx = \left(\frac{R_0^3}{2Gm_0} \right)^{1/2} \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x} \right)^{1/2} dx$$

Cambiando nuovamente variabile ponendo $x = \sin^2 \theta$, l'integrale vale $\pi/2$ e pertanto:

$$t_{FF} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{R_0^3}{2Gm_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{3\pi}{32G\bar{\rho}} \right)^{1/2}$$

Notiamo dunque che maggiore è $\bar{\rho}$, minore sarà il tempo di caduta libera.

La condizione di caduta libera è rilevante quando non sono presenti le forze di pressione. Queste compaiono quando il sistema, collassando, trasforma l'energia potenziale persa in energia interna, di modo da raggiungere temperature sufficientemente elevate (sono conseguenza dell'agitazione termica degli atomi che compongono la nube).

Consideriamo ad esempio una nube di idrogeno molecolare soggetta alla sua sola autogravità: questa, collassando, dissiperà la propria energia per dissociare l'idrogeno in idrogeno atomico, ritardando quindi

¹Nota: per il teorema di Birkhoff possiamo considerare indipendentemente fra loro tutti i gusci della nube.

la comparsa di forze di pressione sufficientemente grandi da contrastare il collasso. Proseguendo nella caduta, altra energia verrà usata per ionizzare l'idrogeno ritardando ulteriormente la fine del collasso; in tutta questa fase del suo sviluppo, la nube può essere considerata in condizioni di caduta libera. Solo una volta ionizzato l'idrogeno (e quindi non essendo più possibile usare ulteriore energia per processi di dissociazione) si potranno sviluppare pressioni sufficientemente elevate che alla fine porteranno il sistema all'equilibrio.

Equilibrio idrostatico: In questo caso forza di gravità e forze di pressione si bilanciano perfettamente, ossia $\ddot{r} = 0$. Avremo pertanto:

$$g(r) + \frac{1}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dr} = -\rho(r)g(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{dP}{dr} = -\rho(r) \frac{Gm(r)}{r^2}$$

Trasformiamo ora questa da espressione locale a espressione media; moltiplicando a destra e sinistra per $4\pi r^3$ e integrando in dr :

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = - \int_0^R 4\pi r^3 \rho(r) \frac{Gm(r)}{r^2} dr$$

Il secondo membro è (notando che $4\pi r^2 \rho(r) dr = dm(r)$):

$$- \int_0^R 4\pi r^2 \rho(r) \frac{Gm(r)}{r} dr = - \int_0^M \frac{Gm}{r} dm = E_{GR}$$

Che è l'energia gravitazionale totale della nube.

Per quanto riguarda il primo membro, invece, integrando per parti:

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = [4\pi r^3 P(r)]_0^R - 3 \int_0^R 4\pi r^2 P(r) dr$$

Il primo addendo è nullo perché $P(R) = 0$, ossia la pressione è nulla sulla superficie della nube. Ora, dividendo e moltiplicando per $V(R)$ (il volume della nube):

$$\int_0^R 4\pi r^3 \frac{dP}{dr} dr = -3\langle P \rangle V(R) \quad \langle P \rangle = \int_0^R \frac{4\pi r^2 P(r)}{V(R)} dr$$

ove $\langle P \rangle$ è la pressione media. Pertanto:

$$-3\langle P \rangle V(R) = E_{GR} \quad \Rightarrow \quad \langle P \rangle = -\frac{1}{3} \frac{E_{GR}}{V} = -\frac{1}{3} \rho_{GR}$$

(ove ρ_{GR} è la densità di energia gravitazionale) che è il *teorema del viriale* (che è quello che stabilisce l'equilibrio sotto l'azione di una forza conservativa, in questo caso la gravità).

Ci chiediamo ora: l'equilibrio idrostatico è stabile? Vedremo che sarà decisiva la struttura del gas in esame: in particolare la stabilità si avrà solo per particelle non relativistiche, in quanto aumentando la temperatura o la massa del sistema questo si destabilizzerà. Esisterà pertanto una massa massima per le stelle (vedi 5.5).

Cerchiamo ora di interpretare microscopicamente il risultato che abbiamo determinato, cercando di calcolare $\langle P \rangle$. Per farlo sfruttiamo il modello cinetico.

Consideriamo una scatola cubica di lato L contenente N particelle; vogliamo determinare la frequenza con cui le particelle sbattono contro una faccia, per esempio lungo la direzione x . Questa sarà $\frac{1}{t} = \frac{v_x}{2L}$ (il fattore $1/2$ è presente perché ci sono due pareti lungo x); ognuna delle particelle imprimerà alla parete una forza pari alla sua variazione di momento, che è $2p_x$. Pertanto la pressione, ossia il rate di trasferimento di momento per unità di area sulla parete, sarà:

$$P_x = \frac{2p_x v_x}{2LL^2} = \frac{N}{L^3} \langle p_x v_x \rangle$$

Se poi il gas è isotropo, per l'equipartizione dell'energia:

$$P = \frac{n}{3} \langle \vec{p} \cdot \vec{v} \rangle$$

ove $n = N/L^3$. Questo risultato lo abbiamo ottenuto in ambito classico, ma si può dimostrare che resta vero anche per un gas quantistico o per particelle relativistiche.

Cerchiamo ora di collegare questa pressione con l'energia cinetica delle particelle, ricordando che $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$, o in tutta generalità $v = pc^2/E$.

Consideriamo due casi:

Caso non relativistico: Si ha, sviluppando in serie di Taylor, $E \simeq mc^2 + \frac{p^2}{2m}$, quindi $v = p/m$ e $\vec{p} \cdot \vec{v} = mv^2$. Pertanto:

$$\langle P \rangle = \frac{2}{3} n \left\langle \frac{1}{2} mv^2 \right\rangle = \frac{2}{3} \rho_{E_K}$$

ove ρ_{E_K} è la densità di energia cinetica delle particelle.

Caso relativistico: In questo caso invece $E = pc$, quindi $v = c$ e pertanto $\vec{p} \cdot \vec{v} = pc$. Allora:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{3} n \langle pc \rangle = \frac{1}{3} \rho_{E_K}$$

Analizziamo più in dettaglio il caso non relativistico:

$$\langle P \rangle = \frac{2}{3} \frac{E_K}{V} = -\frac{1}{3} \frac{E_{GR}}{V} \quad \Rightarrow \quad 2E_K + E_{GR} = 0$$

che è la forma più usuale del teorema del viriale. Unendo questa relazione all'espressione dell'energia totale $E_{TOT} = E_K + E_{GR}$ del sistema, si ottiene (sono due relazioni equivalenti):

$$E_{TOT} = -E_K \quad E_{TOT} = \frac{1}{2} E_{GR}$$

Poiché l'energia cinetica è sempre positiva, essendo $E_{TOT} < 0$ il sistema è legato.

Una prima conseguenza di quanto abbiamo appena trovato è che più caldo sarà un sistema (maggiore E_K) più esso sarà legato.

Supponiamo poi che il sistema evolva lentamente restando vicino all'equilibrio. Se ad esempio si ha una diminuzione dell'1% di E_{TOT} (ad esempio attraverso l'emissione di vento stellare) allora E_{GR} diminuirà del 2% e E_K aumenterà dell'1%. Ciò è importante per capire come il sistema possa uscire dall'equilibrio: l'energia persa sotto forma di E_{GR} (come nel caso appunto del vento solare) verrà compensata da un aumento di temperatura; insomma, in questo caso la stella si scalda e rimpicciolisce.

Nel caso di una stella come ad esempio il Sole, però, l'energia persa viene anche compensata da quella prodotta internamente tramite processi termonucleari: pertanto, l'energia totale può restare costante e la stella resta all'equilibrio. Se però viene prodotta troppa energia, la stella si espanderà e raffredderà fino a raggiungere un nuovo equilibrio.

Una volta che la stella avrà finito gli elementi che può bruciare in processi termonucleari andrà incontro ad un'espansione della parte esterna (con conseguente raffreddamento) e una contrazione di quella interna (con conseguente riscaldamento): è ciò che avviene a una stella quando questa diventa una *gigante rossa* (è la fase successiva alla fase principale della vita di una stella).

Nel caso relativistico, invece, si ha:

$$\frac{1}{3} \frac{E_K}{V} = -\frac{1}{3} \frac{E_{GR}}{V} \quad \Rightarrow \quad E_K + E_{GR} = 0 = E_{TOT}$$

che è il teorema del viriale per particelle relativistiche. In questo caso pertanto il sistema si trova nella condizione di bordo fra stabilità ($E_{TOT} < 0$) e instabilità ($E_{TOT} > 0$). Quindi una minima perturbazione del sistema può aumentare nel tempo, rendendo il sistema di fatto instabile.

Riaffrontiamo quanto appena visto considerando la nube come un gas adiabatico, di modo da capire quando il sistema è stabile o meno in base alle caratteristiche del gas stesso.

Per un'espansione adiabatica si ha $PV^\gamma = \text{cost.}$, con γ indice adiabatico del gas, dunque $d(PV^\gamma) = 0$. Pertanto:

$$V^\gamma dP + \gamma PV^{\gamma-1} dV = 0 \quad \Rightarrow \quad \gamma \frac{dV}{V} + \frac{dP}{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad dP = -\gamma P \frac{dV}{V}$$

Si ha poi che $d(PV) = PdV + VdP = PdV - \gamma PdV = -(\gamma - 1)PdV$. Supponiamo ora che l'energia interna del sistema sia solo cinetica; allora in un'espansione adiabatica vale:

$$dE_{IN} = dE_K = -PdV \quad \Rightarrow \quad dE_K = \frac{1}{\gamma - 1} d(PV)$$

Supponendo poi (ipotesi molto forte) che γ non cambi durante il processo adiabatico, allora integrando:

$$E_K = \frac{1}{\gamma - 1} PV$$

e quindi, indicando la pressione come una pressione media $\langle P \rangle$:

$$\langle P \rangle = (\gamma - 1)\rho_{IN}$$

ove ρ_{IN} è la densità di energia interna. Sappiamo però che $\langle P \rangle = -\frac{1}{3} \frac{E_{GR}}{V} = -\frac{1}{3} \rho_{GR}$, e quindi:

$$(\gamma - 1) \frac{E_{IN}}{V} = -\frac{1}{3} \frac{E_{GR}}{V} \quad \Rightarrow \quad 3(\gamma - 1)E_{IN} + E_{GR} = 0$$

Considerando l'energia totale:

$$E_{TOT} = E_{IN} + E_{GR} = -(3\gamma - 4)E_{IN}$$

Si ha dunque stabilità quando $E_{TOT} < 0$, ossia $\gamma > 4/3$, e il caso critico si ha per $\gamma = 4/3$; poiché si ha $w = \gamma - 1$, il caso critico si ha per $w = 1/3$ ossia per la radiazione (risultato sensato in quanto un gas di fotoni è ultrarelativistico).

4.2 Instabilità gravitazionale di Jeans

Ci proponiamo adesso di determinare le condizioni che portano alla contrazione di una nube, dette *condizioni di instabilità di Jeans*.

Consideriamo un corpo macroscopico come una stella; se in esso prevale la parte gravitazionale dell'energia allora questo comincerà a collassare. In generale si avrà:

$$E_{GR} = -f \frac{GM^2}{R}$$

in quanto l'integrale che definisce E_{GR} è calcolabile una volta noto il profilo di densità, e stabilisce il valore del coefficiente f (ad esempio per un profilo con densità costante risulta $f = 3/5$). La parte cinetica (ossia termica) dell'energia sarà $E_K = \frac{3}{2} N k_B T$.

Si ha dunque instabilità gravitazionale se $|E_{GR}| > E_K$, ossia:

$$f \frac{GM^2}{R} > \frac{3}{2} N k_B T$$

Volendo fare un conto rozzo, poniamo $f = 1$ (in quanto comunque f è sempre dell'ordine dell'unità) e leghiamo N alla massa media per particella, ossia definiamo $\bar{m} \equiv M/N$. Nel caso critico, cioè all'uguaglianza, si ha:

$$\frac{GM_J^2}{R} = \frac{3}{2} \frac{M_J}{\bar{m}} k_B T$$

ove M_J è detta *massa di Jeans*; pertanto, il sistema è instabile (cioè si avrà collasso gravitazionale) se la sua massa è maggiore di quella di Jeans, che risulta:

$$M_J = \frac{3k_B T}{2G\bar{m}} R$$

ove in genere si pone \bar{m} pari a circa metà unità di massa atomica, in quanto le stelle sono prevalentemente formate da idrogeno.

Volendo esprimere il risultato in termini di densità, possiamo riscrivere:

$$M_J = \frac{4\pi}{3} \rho_J R^3$$

e dire che si ha instabilità se (riscrivendo R in funzione di M_J):

$$\rho > \rho_J = \frac{3}{4\pi M_J^2} \left(\frac{3k_B T}{2G\bar{m}} \right)^3$$

Notiamo dunque che se la temperatura del sistema è bassa, le condizioni di caduta libera sono facilitate (cioè minore è T e minori sono M_J e ρ_J).

Procediamo dunque allo studio dell'instabilità gravitazionale di un fluido, seguendo il ragionamento di Jeans. Nel fare questo commetteremo sicuramente un errore, ossia supporremo che l'universo sia statico e non in espansione (tutta la generazione di fisici a cui Jeans apparteneva, come abbiamo già visto nel caso di Einstein, riteneva che l'universo fosse statico); la conseguenza sarà che sbaglieremo la velocità con la quale si ha il collasso gravitazionale.

I presupposti dai quali partiamo sono:

- L'equazione di continuità per il fluido, che per noi rappresenterà la conservazione della massa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

che, definendo la *derivata convettiva* $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})$, si può riscrivere come:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$$

- L'equazione di Eulero, che esprime la conservazione del momento per un fluido, che scriviamo trascurando i termini viscosi (cioè supponiamo non ci siano dissipazioni):

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - \vec{\nabla} \Phi$$

ove P è la pressione e Φ il potenziale gravitazionale; l'equazione è riscrivibile come:

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} P - \vec{\nabla} \Phi$$

- L'equazione di Poisson, che coinvolge il potenziale gravitazionale:

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

Notiamo però che abbiamo tre equazioni per quattro incognite, e pertanto manca dell'informazione. In particolare, dobbiamo dire qualcosa di più sulla pressione: possiamo immaginarla come funzione di ρ e di una quantità che rappresenta l'entropia:

$$S = s\rho \quad P = P(\rho, s)$$

ove s è l'entropia specifica.

Poiché vogliamo considerare processi adiabatici, l'entropia si conserverà e quindi:

$$\frac{DS}{Dt} = 0$$

Possiamo dunque scrivere un'equazione di continuità per l'entropia:

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} s = 0$$

Pertanto ora, teoricamente, possiamo risolvere queste equazioni.

Background statico

Il problema è che non esiste una soluzione analitica generale di queste equazioni (ne esistono solo in casi particolari, con forti simmetrie). Poiché non possiamo risolverle, usiamo un approccio di tipo perturbativo: scegliamo noi delle soluzioni semplici (dette *di background*) e aggiungiamo ad esse delle perturbazioni, che poi andremo a studiare (in particolare, andremo a vedere se crescono o meno nel tempo).

Jeans usò delle soluzioni di background che sapeva non essere consistenti:

$$\rho = \text{cost.} \quad v = 0 \quad P = \text{cost.} \quad \Phi = \text{cost.} \quad s = \text{cost.}$$

Queste sono inconsistenti perché per via dell'equazione di Poisson non si può avere $\rho = \text{cost.} \neq 0$ con $\Phi = \text{cost.}$ ²; tuttavia se il gas è abbastanza diluito l'errore che si compie formulando quest'ipotesi non è grandissimo.

Introduciamo dunque delle perturbazioni lineari in queste quantità³:

$$\begin{aligned} \rho(\vec{x}, t) &= \rho_0 + \delta\rho(\vec{x}, t) & \vec{v}(\vec{x}, t) &= \vec{0} + \vec{v}(\vec{x}, t) & \Phi(\vec{x}, t) &= \Phi_0 + \phi(\vec{x}, t) \\ s(\vec{x}, t) &= s_0 + \delta s(\vec{x}, t) & P(\vec{x}, t) &= P_0 + \delta P(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

Ora, poiché P è funzione di ρ e s , allora si avrà:

$$\delta P = \underbrace{\frac{\partial P}{\partial \rho}}_{C_s^2} \delta \rho + \frac{\partial P}{\partial s} \delta s$$

ove C_s è la velocità adiabatica del suono, che avevamo già incontrato.

Nello studio di queste equazioni trascureremo tutti i termini superiori al primo ordine⁴ nelle perturbazioni. Pertanto, si ha (tenendo conto che \vec{v} è già una perturbazione):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0 & \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho_0} \left(C_s^2 \vec{\nabla}(\delta \rho) + \frac{\partial P}{\partial s} \vec{\nabla}(\delta s) \right) - \vec{\nabla} \phi \\ \nabla^2 \phi &= 4\pi G \delta \rho & \frac{\partial \delta s}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

Si tratta di equazioni differenziali alle derivate parziali con coefficienti costanti, quindi la soluzione sarà data da una sovrapposizione di onde piane (vale infatti il principio di sovrapposizione).

Effettuando una trasformata di Fourier su $\delta\rho$, ad esempio, si ha:

$$\delta\rho(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \delta\rho_{\vec{k}}(t) d^3k$$

e analogamente per le altre perturbazioni. Poiché $\delta\rho$ è reale, allora si dovrà avere $\delta\rho_{\vec{k}}^* = -\delta\rho_{-\vec{k}}$; infatti in generale, se:

$$A(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} A_{\vec{k}} d^3k$$

allora se A è una funzione reale si dovrà avere $A_{\vec{k}}^* = -A_{-\vec{k}}$.

Da un punto di vista pratico, questo significa che derivando rispetto alle coordinate spaziali ci si "tira giù" un $i\vec{k}$. Nello spazio di Fourier, dunque, si avrà:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \delta\rho_{\vec{k}}}{\partial t} + i\vec{k} \cdot \rho_0 \vec{v}_{\vec{k}} &= 0 & \frac{\partial \vec{v}_{\vec{k}}}{\partial t} &= -\frac{C_s^2}{\rho_0} i\vec{k} \delta\rho_{\vec{k}} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial s} i\vec{k} \delta s_{\vec{k}} - i\vec{k} \phi_{\vec{k}} \\ -k^2 \phi_{\vec{k}} &= 4\pi G \delta\rho_{\vec{k}} & \frac{\partial \delta s_{\vec{k}}}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$$

²Per avere una densità non nulla è necessario usare un potenziale gravitazionale non banale, che però implicherebbe l'evoluzione dell'universo.

³C'è un piccolo abuso di notazione che continueremo ad usare anche nel seguito: nel caso della velocità, poiché il valore costante che viene perturbato è zero scriviamo direttamente \vec{v} invece di $\delta\vec{v}$.

⁴Attenzione: questo significa che potremmo trascurare instabilità che si presentano ad ordini superiori!

Cerchiamo ora soluzioni del tipo:

$$\delta\rho_{\vec{k}} = e^{i\omega t} \rho_0 \delta_{\vec{k}}$$

ove $\rho_0 \delta_{\vec{k}}$ è un coefficiente costante nel tempo, e analogamente per tutte le altre perturbazioni. Pertanto le derivazioni temporali “portano giù” un $i\omega$, e si avrà:

$$\begin{aligned} i\omega\delta_{\vec{k}} + i\vec{k} \cdot \vec{v}_{\vec{k}} &= 0 & i\omega\vec{v}_{\vec{k}} &= -C_s^2 i\vec{k}\delta_{\vec{k}} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial s} \Big|_{\rho} i\vec{k}\delta s_{\vec{k}} - i\vec{k}\phi_{\vec{k}} \\ -k^2\phi_{\vec{k}} &= 4\pi G\rho_0\delta_{\vec{k}} & i\omega\delta s_{\vec{k}} &= 0 \end{aligned}$$

Partiamo dall’ultima e cerchiamo soluzioni statiche, ossia con $\omega = 0$ e quindi $\delta s_{\vec{k}} \neq 0$.

Sostituendo nella prima si ha $\vec{k} \cdot \vec{v}_{\vec{k}} = 0$, che nello spazio ordinario si traduce in $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$: si tratta dunque di moti vorticosi solenoidali.

La seconda equazione diventa:

$$C_s^2 \vec{k}\delta_{\vec{k}} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial s} \Big|_{\rho} \vec{k}\delta s_{\vec{k}} + \vec{k}\phi_{\vec{k}} = 0$$

mentre la terza equazione resta inalterata. Queste sono risolubili, e portano ad avere una perturbazione di entropia costante (avevamo infatti ignorato termini viscosi), che era proprio l’ipotesi dalla quale eravamo partiti. Si tratta pertanto di soluzioni poco interessanti.

Se consideriamo invece il caso $\omega = 0$, $\delta s_{\vec{k}} = 0$ allora avremo ancora moto vorticoso, ma stavolta la seconda equazione si riduce a $C_s^2 \vec{k}\delta_{\vec{k}} + \vec{k}\phi_{\vec{k}} = 0$, che insieme alla terza (che anche stavolta resta inalterata) porta ad una soluzione banale.

Il caso più interessante è quello in cui $\omega \neq 0$ e $\delta s_{\vec{k}} = 0$, ossia soluzioni adiabatiche dipendenti dal tempo. In questo caso le equazioni diventano:

$$\omega\delta_{\vec{k}} + \vec{k} \cdot \vec{v}_{\vec{k}} = 0 \quad C_s^2 \vec{k}\delta_{\vec{k}} + \omega\vec{v}_{\vec{k}} + \vec{k}\phi_{\vec{k}} = 0 \quad 4\pi G\rho_0\delta_{\vec{k}} + k^2\phi_{\vec{k}} = 0$$

Essendo tre equazioni in tre incognite, la matrice dei coefficienti dovrà avere determinante nullo affinché esistano soluzioni non banali. La matrice è:

$$\begin{pmatrix} \omega & k & 0 \\ C_s^2 k & \omega & k \\ 4\pi G\rho_0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$$

quindi:

$$\omega^2 k^2 - k(C_s^2 k^3 - 4\pi G\rho_0 k) = 0$$

Pertanto ω e k soddisfano la *relazione di dispersione*:

$$\omega^2 = C_s^2 k^2 - 4\pi G\rho_0$$

Per via della presenza del segno meno, se k è sufficientemente piccolo allora si avrà $\omega^2 < 0$ e quindi in questo caso le soluzioni saranno del tipo $e^{\pm|\omega|t} e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}}$: si tratta di un’onda stazionaria che cresce o decresce nel tempo; è un’*instabilità*. Se invece k è sufficientemente grande si ha un’onda piana che si propaga a velocità C_s .

Questa situazione segnala la presenza di una patologia eliminabile cambiando condizioni iniziali (è, diciamo, una conseguenza dell’inconsistenza della soluzione di background dalla quale siamo partiti).

Le soluzioni saranno pertanto del tipo:

$$\begin{aligned} \delta(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i\omega t} \delta_{\vec{k}} d^3 k & v(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} e^{i\omega t} v_{\vec{k}} d^3 k \\ \phi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k}\cdot\vec{x}} \phi_{\vec{k}} d^3 k \end{aligned}$$

Vediamo brevemente come tutto questo sia legato al caso di caduta libera nei processi di formazione stellare. Se $C_s^2 k^2$ è trascurabile, allora $\omega^2 = -4\pi G\rho_0$ e pertanto le soluzioni sono del tipo $e^{\pm\sqrt{4\pi G\rho_0} t}$, delle quali l’unica soluzione fisica è quella col +. Si tratta di un’instabilità crescente con tempo caratteristico:

$$t_{FF} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G\rho_0}}$$

Esisterà però una scala caratteristica per la quale $\omega^2 = 0$, ossia:

$$C_s^2 k_J^2 = 4\pi G \rho_0$$

Ora, k_J è l'inverso della lunghezza d'onda λ_J (a parte un fattore 2π). L'instabilità si ha per $k < k_J$, ossia per:

$$\lambda > \lambda_J = \sqrt{\frac{\pi}{G\rho_0}} C_s$$

Notiamo poi che se poniamo $C_s = k_B T / \bar{m}$ (ed è una cosa sensata, perché pensando all'equazione di stato di gas ideali nel limite non relativistico il coefficiente fra P e n è proprio questo) ritroviamo le stesse relazioni che avevamo già visto.

Background non statico

In quanto abbiamo visto finora abbiamo assunto una soluzione statica di background. Proviamo ora a vedere cosa accade quando cerchiamo una soluzione di background non statica.

Ponendo $\vec{r} = a(t)\vec{x}$ (\vec{r} è la distanza propria e \vec{x} quella comovente), con \vec{r} possiamo usare la fisica newtoniana (perché nella sua definizione è implicitamente assunto che i fotoni si propagano istantaneamente, come avevamo visto). Riscriviamo le equazioni del fluido iniziali in termini di \vec{r} , ponendo $\vec{u} = \dot{\vec{r}}$:

$$\frac{d\rho}{dt} \Big|_{\vec{r}=\text{cost.}} + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \Big|_{\vec{r}=\text{cost.}} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}}) \vec{u} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}} \Phi \quad \nabla_{\vec{r}}^2 \Phi = 4\pi G \rho$$

Notiamo che nella seconda equazione abbiamo posto un'assunzione forte, trascurando il gradiente di pressione (di fatto stiamo considerando materia oscura su scale maggiori di λ_J , cosicché di fatto il gradiente di pressione non riesce ad opporsi alla gravità⁵); avremo comunque risultati consistenti, nonostante questo.

Cerchiamo soluzioni del tipo (usiamo lo stesso abuso di notazione per \vec{v} che abbiamo usato in precedenza):

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_b(t) + \delta\rho(\vec{r}, t) \quad \vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}_b(\vec{r}, t) + \vec{v}(\vec{r}, t) \quad \Phi(\vec{r}, t) = \Phi_b(\vec{r}, t) + \phi(\vec{r}, t)$$

ove b sta per "background".

Vediamo quanto consistente⁶ è questo background; ammettendo le prime due equazioni risolte, si ha⁷:

$$\nabla^2 \Phi_b(\vec{r}, t) = 4\pi G \rho_b(t) \quad \Rightarrow \quad \Phi_b(\vec{r}, t) = \frac{2}{3} \pi G \rho_b(t) r^2$$

Pertanto esiste un Φ_b consistente con $\rho_b \neq 0$ che però ha il "difetto" di esplodere all'infinito. Poniamo poi:

$$\vec{v}_b(\vec{r}, t) = \text{cost.} \cdot \vec{r} \equiv H(t) \vec{r}$$

e poiché $\vec{v}_b = \dot{a}\vec{x}$, allora $\vec{v}_b = \dot{a}\vec{r}/a$; insomma, $H = \dot{a}/a$ e sostituendo nella prima equazione si ha $\rho_b \propto a^{-3}$: stiamo in pratica riottenendo le equazioni di Friedmann.

Perturbando questo sistema di background, che è autoconsistente, otterremo delle equazioni linearizzate nelle perturbazioni con coefficienti dipendenti dal tempo: per questo non avremo più soluzioni del tipo $e^{i\omega t}$ (e quindi non troveremo più una relazione di dispersione), ma otterremo equazioni differenziali che restituiranno la soluzione instabile.

Abbiamo detto che $\vec{r} = a(t)\vec{x}$; derivando rispetto al tempo per una particella della nube:

$$\vec{u} \equiv \dot{\vec{r}} = \dot{a}\vec{x} + a\dot{\vec{x}}$$

⁵In altre parole ancora, poiché sappiamo che il comportamento instabile compare quando le forze di pressione sono trascurabili rispetto a quelle di gravità, e vogliamo studiare il comportamento instabile, trascuriamo il gradiente di pressione.

⁶Nel senso che è risolubile senza ipotesi ad hoc come nel caso della soluzione di background stazionaria.

⁷Infatti:

$$\nabla^2 r^2 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} r^2) = 2\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = 2 \cdot 3 = 6$$

e si ha $\vec{\nabla} \cdot \vec{r} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial r_i} r_i = 3$.

In questo caso dobbiamo tenere anche la componente con $\dot{\vec{x}}$ perché non stiamo considerando particelle comoventi: all'interno dell'universo ci sono particelle che tendono a collassare ($\dot{\vec{x}}$ è detta *velocità peculiare*), che sono quelle che stiamo considerando. Proseguendo, ponendo $\vec{v} = a\dot{\vec{x}}$:

$$\vec{u} = \frac{\dot{a}}{a}\vec{r} + \vec{v} = H\vec{r} + \vec{v}$$

Notiamo dunque come, dato che siamo in approssimazione newtoniana ($c = \infty$), la legge di Hubble non è quella che abbiamo ricavato al second'ordine (avevamo già detto che la legge di Hubble assume questa forma se i fotoni si propagano istantaneamente).

Adesso vogliamo riscrivere queste equazioni in termini di \vec{x} invece che di \vec{r} (non vedremo tutti i passaggi in dettaglio).

Innanzitutto, poiché compaiono derivate rispetto a \vec{r} fissato dobbiamo esprimerle in termini di derivate rispetto a \vec{x} fissato. Se $f(\vec{r}, t)$ è una generica funzione:

$$\frac{D}{Dt}f(\vec{r}, t) = \frac{\partial f}{\partial t|_{\vec{r}}} + \left(H\vec{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)f + \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\right)f = \frac{\partial f}{\partial t|_{\vec{r}}} + H(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})f + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})f$$

Se consideriamo ora f come funzione di \vec{x} e t (tenendo a mente che $\vec{\nabla}_{\vec{x}} = a\vec{\nabla}_{\vec{r}}$):

$$\frac{D}{Dt}f(\vec{x}, t) = \frac{\partial f}{\partial t|_{\vec{x}}} + (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}})f = \frac{\partial f}{\partial t|_{\vec{x}}} + \frac{1}{a}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}})f = \frac{\partial f}{\partial t|_{\vec{x}}} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})f$$

Poiché ovviamente si deve avere $\frac{D}{Dt}f(\vec{r}, t) = \frac{D}{Dt}f(\vec{x}, t)$, allora:

$$\frac{\partial f}{\partial t|_{\vec{x}}} = \frac{\partial f}{\partial t|_{\vec{r}}} + H(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})f$$

Questa relazione, ovviamente, vale anche per funzioni vettoriali (in componenti).

Riscrivendo quindi l'equazione di continuità:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t|_{\vec{x}}} - H(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})\rho + \rho \vec{\nabla} \cdot \vec{u} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})\rho &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t|_{\vec{x}}} - H(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})\rho + \rho \vec{\nabla}_{\vec{r}}(H\vec{r} + \vec{v}) + H(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})\rho + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})\rho = 0 \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t|_{\vec{x}}} + 3H\rho + \rho \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})\rho &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \rho}{\partial t|_{\vec{x}}} + 3H\rho + \vec{\nabla}_{\vec{r}} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \end{aligned}$$

Pertanto, l'equazione di continuità che cercavamo è:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t|_{\vec{x}}} + 3H\rho + \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot (\rho \vec{v}) = 0$$

Considerando invece il potenziale gravitazionale si ha semplicemente:

$$\nabla_{\vec{x}}^2 \phi = 4\pi G a^2 \delta \rho$$

Vediamo ora l'equazione di Eulero:

$$\frac{\partial}{\partial t|_{\vec{r}}}(\mathbf{H}\vec{r}) + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t|_{\vec{r}}} + \mathbf{H}(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})(\mathbf{H}\vec{r}) + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})(\mathbf{H}\vec{r}) + H(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})\vec{v} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\Phi_b - \vec{\nabla}_{\vec{r}}\phi$$

In quest'equazione i termini segnati in grassetto sono quelli che hanno a che fare col background, e si semplificano fra loro. Infatti, si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t|_{\vec{r}}}(\mathbf{H}\vec{r}) + H(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})(\mathbf{H}\vec{r}) = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\Phi_b \quad \Rightarrow \quad \dot{\mathbf{H}}\vec{r} + H^2\vec{r} = -\frac{4\pi}{3}G\rho_b(t)\vec{r}$$

e si verifica (ma non lo vediamo) che effettivamente primo e secondo membro coincidono.

Pertanto:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t|_{\vec{r}}} + H\vec{v} + H(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})\vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{r}})\vec{v} = -\vec{\nabla}_{\vec{r}}\phi$$

Sfruttando l'espressione della derivata rispetto a \vec{x} fissato in funzione di quella rispetto a \vec{r} fissato si ha, infine:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \Big|_{\vec{x}} + H\vec{v} + \frac{1}{a}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}})\vec{v} = -\frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{x}}\phi$$

Insomma, per ricapitolare le equazioni che dovremo linearizzare sono:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_{\vec{x}} + 3H\rho + \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot (\rho\vec{v}) = 0 \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \Big|_{\vec{x}} + H\vec{v} + \frac{1}{a}(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}})\vec{v} = -\frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{x}}\phi \quad \nabla_{\vec{x}}^2\phi = 4\pi G a^2 \delta\rho$$

Scrivendo $\rho = \rho_b + \delta\rho \equiv \rho_b(1 + \delta)$ (ove δ è un numero), sostituendo nell'equazione di continuità si ottiene:

$$(1 + \delta) \left(\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + 3H\rho_b \right) + \rho_b \frac{\partial \delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot (\rho\vec{v}) = 0$$

Il termine $\frac{\partial \rho_b}{\partial t} + 3H\rho_b$ è però nullo perché l'equazione di continuità in assenza di perturbazioni afferma proprio che $\dot{\rho}_b = -3H\rho_b$. Dunque, trascurando tutti i termini non lineari nelle perturbazioni si ha:

$$\rho_b \dot{\delta} + \frac{1}{a}\rho_b \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\delta} + \frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{v} = 0$$

che è quindi l'equazione di continuità linearizzata nello spazio delle configurazioni.

Per quanto riguarda l'equazione di Eulero, la sua linearizzata si trova semplicemente trascurando il termine $(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}})\vec{v}$, essendo \vec{v} già una perturbazione:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + H\vec{v} = -\frac{1}{a}\vec{\nabla}_{\vec{x}}\phi$$

Infine, l'ultima equazione è già linearizzata:

$$\nabla_{\vec{x}}^2\phi = 4\pi G \delta\rho a^2$$

Ora, in generale agli effetti pratici è solo l'interazione gravitazionale che ha effetti su larga scala (la carica elettromagnetica è schermata); quest'equazione, però, poiché $\delta\rho$ può essere sia positivo che negativo implica che per quello che riguarda la parte perturbativa anche l'interazione gravitazionale è schermata. Ciò significa ad esempio che se in una zona dell'universo ci sono delle perturbazioni di densità pari a $+\delta\rho$ e $-\delta\rho$, osservando questa zona da "lontano" l'effetto complessivo è che non si osservano perturbazioni rispetto al background.

Consideriamo ora \vec{v} . Per il teorema di Helmholtz ogni vettore può essere scritto nella forma:

$$\vec{v} = \vec{\nabla}\Psi + \vec{T} \quad \text{con} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = 0$$

(ove $a\vec{T}$ è detta "vorticosità"). Inserendo \vec{T} nell'equazione di Eulero:

$$\frac{\partial \vec{T}}{\partial t} + H\vec{T} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{T} \propto \frac{1}{a}$$

(ove la parte di potenziale è nulla perché \vec{T} non ha sorgente) e pertanto la vorticosità è costante⁸.

Passando allo spazio di Fourier:

$$\delta(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \delta(\vec{k}, t) d^3k \quad \vec{v}(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \vec{v}(\vec{k}, t) d^3k$$

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} \phi(\vec{k}, t) d^3k$$

⁸È anche per questo che, come avevamo accennato all'inizio del corso, si ritiene che il moto rotatorio delle galassie non sia dovuto ad effetti di vorticosità del fluido cosmico.

e le equazioni diventano⁹:

$$\dot{\delta} + \frac{i}{a}kv = 0 \qquad \dot{v} + Hv = -\frac{i}{a}k\phi \qquad -k^2\phi = 4\pi Ga^2\rho_b\delta$$

Questa volta, però, le onde piane non sono una buona base (ci troviamo in un universo in evoluzione), e i coefficienti dipendono dal tempo. Come risolviamo il problema?

Cerchiamo di isolare in ogni equazione le singole variazioni aumentando l'ordine di derivazione. Considerando la prima equazione:

$$\ddot{\delta} - \frac{i}{a^2}\dot{a}kv + \frac{i}{a}k\dot{v} = 0$$

e sostituendo \dot{v} dalla seconda equazione e v dalla prima:

$$\ddot{\delta} + \frac{i}{a}k \left(-\frac{\dot{a}}{a}v - \frac{i}{a}k\phi \right) - i\frac{\dot{a}}{a^2}v = 0 \quad \Rightarrow \quad \ddot{\delta} + 2\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - 4\pi G\rho_b\delta = 0$$

Per risolvere quest'equazione, ricordiamo che in un universo dominato da materia si ha:

$$a(t) \propto t^{2/3} \qquad H = \frac{2}{3t} \qquad \rho_b = \frac{1}{6\pi Gt^2}$$

quindi:

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0$$

Per risolverla, poniamo $\delta \propto t^\alpha$:

$$3\alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}, \quad \alpha = -1$$

Pertanto, a seconda dei due casi, si ha:

$$\delta \propto \begin{cases} t^{2/3} \propto a(t) \\ t^{-1} \propto H(t) \end{cases}$$

Procedendo in modo analogo per v e ϕ :

$$v \propto \begin{cases} t^{1/3} \\ t^{-4/2} \end{cases} \qquad \phi \propto \begin{cases} \text{cost.} \\ t^{-5/3} \end{cases}$$

Pertanto, quelle che prima erano soluzioni esponenziali adesso sono sostituite da queste soluzioni che vanno come una potenza di t (sono più "deboli"). Questo perché il collasso della nube viene "ostacolato" dall'espansione dell'universo.

4.3 Formazione di una protostella

Riconsideriamo ora le condizioni di Jeans per il collasso:

$$M > M_J = \frac{3k_B T}{2G\bar{m}} R \qquad \rho > \rho_J = \frac{3}{4\pi M^2} \left(\frac{3k_B T}{2G\bar{m}} \right)^3$$

Vogliamo introdurre queste condizioni nel nostro universo per comprendere come si formino le protostelle. La densità d'energia critica ad oggi è:

$$\rho_{0c} \approx 10^{-29} \text{ g/cm}^3$$

⁹Le equazioni diventano scalari perché ignoriamo la componente di \vec{v} con vorticità:

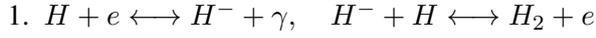
$$\vec{v} = \vec{\nabla}\Psi \quad \Rightarrow \quad i\vec{k}\Psi = i\hat{k} \underbrace{(k\Psi)}_{:=v}$$

A fronte di una densità barionica di:

$$\rho_b \approx 10^{-31} \text{ g/cm}^3 \approx 10^{-28} \text{ kg/m}^3$$

E “andando indietro nel tempo”, la densità di background dei barioni è $\rho_{b,b}(z) \approx 10^{-28}(1+z)^3 \text{ kg/m}^3$.

Ora, le stelle nascono a seguito della formazione di nubi di barioni sufficientemente dense; queste non si formeranno in posizioni casuali dell’universo, ma al centro di aloni di materia oscura (che sono delle “trappole gravitazionali” per i barioni), i quali hanno densità circa 180 volte maggiore di quella dell’universo circostante. Ad oggi abbiamo evidenza del fatto che le nubi di H_2 siano stati i siti preferenziali per la formazione di stelle; l’idrogeno molecolare si forma a partire da quello atomico con i seguenti processi:



Inoltre, H_2 si è formato a un redshift pari a circa 200, e a densità relativamente basse.

Ora, per l’instabilità di Jeans a parità di temperatura minore è M e maggiore è ρ_J ; pertanto, nell’universo le prime stelle si sono formate dal collasso iniziale di nubi molto grandi, che poi si sono frammentate in oggetti più piccoli (al passare del tempo, è più facilitato il collasso di strutture via via più piccole): infatti se consideriamo ad esempio una nube di massa $M = 1000M_\odot$ a $T = 20 \text{ K}$, si ha $\rho_J = 10^{-22} \text{ kg/m}^3$; la densità necessaria per far collassare una nube di massa pari a quella del Sole alla stessa temperatura è invece di 10^{-16} kg/m^3 .

Supponiamo dunque di essere in queste condizioni e di voler far collassare una nube di massa uguale a quella solare. Se siamo nelle condizioni che abbiamo appena visto ($\rho = 10^{-16} \text{ kg/m}^3$ e $T = 20 \text{ K}$), la nube inizia a collassare senza che nulla possa opporsi a questo processo; si tratta di una situazione di collasso in caduta libera, per il quale abbiamo visto che:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \frac{Gm_0}{r} - \frac{Gm_0}{r_0} \quad t_{FF} = \left(\frac{3\pi}{32G\bar{\rho}} \right)^{1/2}$$

(ove nel caso del Sole $t_{FF} \approx 2 \cdot 10^4$ anni).

Collassando, la nube perde energia potenziale gravitazionale e la rilascia in energia cinetica: questa all’inizio viene usata solo per dissociare H_2 (che ha energia di dissociazione $\varepsilon_D = 4.5 \text{ eV}$) e poi ionizzare H (che ha energia di ionizzazione $\varepsilon_I = 13.6 \text{ eV}$). Fino a che l’idrogeno non è stato completamente dissociato e ionizzato non c’è nessuna forza che si oppone al collasso; solo al termine di questi processi si potrà sviluppare una forza di pressione in grado di farlo.

Per una nube di massa M , l’energia che serve per arrivare ad avere tutto l’idrogeno ionizzato è:

$$E = \frac{M}{2m_H} \varepsilon_D + \frac{M}{m_H} \varepsilon_I$$

che è fornita dalla differenza di energia gravitazionale, pertanto:

$$\frac{GM^2}{R_2} - \frac{GM^2}{R_1} = \frac{M}{2m_H} \varepsilon_D + \frac{M}{m_H} \varepsilon_I$$

Per $M = M_\odot$ si ha $E = 3 \cdot 10^{39} \text{ J}$, e il raggio che si trova imponendo $M_J = M_\odot$ è $R_1 = 10^{15} \text{ m}$; in base a questo si ricava $R_2 = 10^{11} \text{ m}$, a fronte di $R_\odot \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$. Questa discrepanza è dovuta al fatto che, una volta raggiunto R_2 il collasso è molto più lento ed avviene all’equilibrio idrodinamico; poiché siamo nelle condizioni del teorema del viriale (non relativistico):

$$2E_K + E_{GR} = 0 \quad E_K = \frac{3}{2} N k_B T \quad N = \frac{M}{\bar{m}} \quad \Rightarrow \quad E_K = \frac{M}{m_H} 3k_B T$$

ove $\bar{m} = m_H/2$ (perché stiamo considerando elettroni e protoni). Pertanto, la temperatura finale della nube di gas alla fine di questa prima fase di contrazione è:

$$6k_B T \frac{M}{m_H} = \frac{M}{m_H} \left(\frac{\varepsilon_D}{2} + \varepsilon_I \right) \quad \Rightarrow \quad k_B T = \frac{1}{12} (\varepsilon_D + 2\varepsilon_I) = 2.6 \text{ eV}$$

che corrisponde a $T \approx 3 \cdot 10^4 \text{ K}$.

Notiamo come questo risultato dipenda fortemente dalla composizione dell’oggetto (ε_D e ε_I).

La contrazione nella seconda fase del collasso viene bilanciata pertanto dal riscaldamento della nube, ed è un processo molto più lento del precedente (nel caso del Sole questa seconda fase dura circa 10^8 anni).

4.3.1 Nane brune e massa minima di una stella

In realtà esiste anche un'altra via per opporsi al collasso di una nube di gas, diversa dal riscaldamento della nube stessa: è l'esistenza di un'energia massima per un gas degenere di Fermi. Può infatti accadere che al di sopra di una certa densità l'energia legata al gas di Fermi composto dagli elettroni della stella si opponga al collasso e lo blocchi; se però questo avviene troppo presto nel processo di contrazione non si raggiungono le temperature necessarie al bruciamento dell'idrogeno. In questo caso si forma una cosiddetta *nana bruna*, una "stella mancata" caratterizzata da avere massa molto piccola. Vogliamo dunque cercare di determinare una relazione fra massa e temperatura per la formazione di una stella.

Ricordando che per una particella si ha $\lambda = h/p = 2\pi\hbar/p$, in equilibrio termico per un gas degenere di elettroni si ha:

$$E_K = \frac{p^2}{2m_e} \sim k_B T \quad \Rightarrow \quad p \sim \sqrt{m_e k_B T}$$

e la lunghezza di de Broglie degli elettroni è:

$$\lambda \sim \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{m_e k_B T}}$$

e rappresenta la distanza minima possibile fra gli elettroni nel gas, oltre la quale c'è degenerazione completa. In base a questa possiamo definire la densità critica:

$$\rho_c = \frac{\bar{m}}{\lambda^3} = \bar{m} \frac{(m_e k_B T)^{3/2}}{(2\pi\hbar)^3}$$

che separa la fase classica da quella quantistica degenere.

Dal teorema del viriale si ha:

$$2E_K + E_{GR} = 0 \quad E_K = \frac{3}{2} N k_B T \quad E_{GR} = -\frac{GM^2}{R} \quad N = \frac{M}{\bar{m}}$$

pertanto, volendo collegare la temperatura raggiungibile col collasso alla massa dell'oggetto:

$$3N k_B T = \frac{GM^2}{R} \quad \Rightarrow \quad 3 \frac{M}{\bar{m}} k_B T = \frac{GM^2}{R}$$

$$M = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} R^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \left(\frac{4\pi}{3} \frac{\bar{\rho}}{M} \right)^{1/3}$$

quindi:

$$k_B T = \frac{GM\pi}{3} \left(\frac{4\pi}{3} \frac{\bar{\rho}}{M} \right)^{1/3}$$

e sostituendo ρ_c a $\bar{\rho}$ (ignorando i fattori numerici) risulta:

$$k_B T = \frac{G^2 \bar{m}^{8/3} m_e}{h^2} M^{4/3}$$

Pertanto, minore è M e minore è la temperatura massima raggiungibile con la contrazione senza entrare in regime quantistico.

Se $M = M_\odot$, $k_B T$ è dell'ordine dei keV. Uno studio più rigoroso mostra che la massa minima per una stella affinché possa arrivare a bruciare l'idrogeno è $M_{\min} = 0.08 M_\odot$ (quindi non esistono stelle con massa minore di $0.08 M_\odot$).

Capitolo 5

Il Sole e le stelle

5.1 Il Sole

I dati che conosciamo relativi al Sole sono:

$$M_{\odot} = 1.9 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad R_{\odot} = 6.96 \cdot 10^8 \text{ m} \quad L_{\odot} = 3.86 \cdot 10^{26} \text{ W} \quad T_E = 5780 \text{ K}$$
$$t_{\odot} = 4.55 \cdot 10^9 \text{ yr} \quad \rho_c = 1.48 \cdot 10^5 \text{ kg/m}^3 \quad T_c = 15.6 \cdot 10^6 \text{ K} \quad P_c = 2.29 \cdot 10^{16} \text{ Pa}$$

ove T_E è la temperatura superficiale, t_{\odot} l'età, ρ_c la densità centrale, T_c la temperatura centrale e P_c la pressione centrale.

Se il Sole non fosse in equilibrio (possibile grazie all'energia prodotta in reazioni termonucleari esoenergetiche che avvengono nel nucleo), collasserebbe in caduta libera in circa mezz'ora.

Il teorema del viriale, in una delle sue forme, asserisce che:

$$\langle P \rangle = -\frac{1}{3} \frac{E_{GR}}{V}$$

Nel caso del Sole, $E_{GR} = -GM_{\odot}^2/R_{\odot}$ e $V = \frac{4\pi}{3} R_{\odot}^3$. Quindi:

$$\langle P \rangle = \frac{GM_{\odot}^2}{4\pi R_{\odot}^4} = 10^{14} \text{ Pa}$$

Abbiamo poi buoni motivi per ritenere che $\langle P \rangle$ si possa scrivere come pressione di radiazione di un gas ideale di elettroni e protoni; pertanto, detta T_I la temperatura interna media:

$$\langle P \rangle = \frac{\langle \rho \rangle}{\bar{m}} k_B T_I \quad \text{con} \quad \langle \rho \rangle = \frac{3M_{\odot}}{4\pi R_{\odot}^3}$$

Quindi:

$$k_B T_I = \frac{GM_{\odot} \bar{m}}{3R_{\odot}} = 0.5 \text{ keV} \quad \Rightarrow \quad T_I \approx 6 \cdot 10^6 \text{ K}$$

Ci chiediamo dunque: cos'è che determina una differenza di temperatura così grossa fra le parti esterna e interna del Sole (ma in generale di tutte le stelle)?

Vedremo ora che il solo fatto che i fotoni prodotti nel nucleo subiscano moltissimi scattering prima di raggiungere la superficie del Sole è sufficiente a spiegare questo gradiente di temperatura.

5.1.1 Diffusione radiativa

Poiché possiamo pensare alle stelle come dei corpi neri, la luminosità del Sole potrà essere espressa come:

$$L_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_E^4$$

Se per assurdo la temperatura esterna fosse uguale a quella interna si avrebbe una luminosità:

$$L'_{\odot} = 4\pi R_{\odot}^2 \sigma T_I^4$$

Vogliamo insomma capire perché $L_{\odot} \neq L'_{\odot}$.

Consideriammo un fotone che parte dal nucleo del Sole, una volta prodotto:

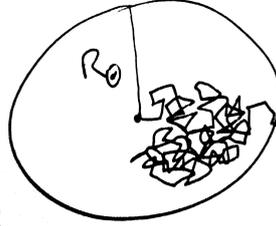


Figura 5.1: Diffusione radiativa di un fotone

Il viaggio “diretto” fino alla superficie non è permesso per via del fatto che i fotoni vengono continuamente scatterati; è solo casualmente che, ogni tanto, qualche fotone esce dopo un percorso di tipo browniano.

Ora, il cammino libero medio di un fotone è legato (in particolare è inversamente proporzionale) alla densità della stella (pertanto ci saranno più fotoni all’interno che all’esterno della stella). Il percorso di uno di questi fotoni può essere scritto come:

$$\vec{D} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \dots + \vec{\ell}_N$$

ove gli $\vec{\ell}_i$ sono i vari step casuali; in quanto tali, non sarà possibile stabilire leggi deterministiche.

Per studiare questo fenomeno servono due equazioni: l’equazione di Langevin, che fornisce $\dot{\vec{D}}$ in presenza di urti, e quella di Fokker-Planck, che determina la probabilità che una particella si trovi in una certa posizione in un dato istante.

L’equazione di Langevin è:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{\eta}(t)$$

ove (in unità opportune) $\vec{\eta}$ è una forza casuale (non predicibile) e quindi tale per cui $\langle \vec{\eta} \rangle = 0$ e $\langle \eta_i \eta_j \rangle = 2D\delta_{ij}\delta(t - t')$, ove D è una costante di diffusione e la $\delta(t - t')$ rende il processo markoviano (ossia, ad ogni step ci si “dimentica” della storia passata del processo).

Da quest’equazione posso cercare di determinare la probabilità che un fotone sia in \vec{x} al tempo t , $P(\vec{x}, t)$, la quale soddisfa l’equazione di Fokker-Planck¹:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = D\nabla^2 P$$

la cui soluzione è una gaussiana del tipo²:

$$P(\vec{x}, t) = \frac{1}{(4\pi Dt)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2Dt}\right)$$

La superficie del Sole è poi una “barriera assorbente” (nel senso che una volta che un fotone la attraversa non può più “tornare indietro” nel Sole). Possiamo dunque pensare che questa gaussiana all’inizio sia molto piccata (al limite è una δ di Dirac) e si “espanda” nel tempo (ovviamente le code che vanno oltre il raggio del Sole vanno eliminate proprio perché la sua superficie è assorbente).

Ciò che in sostanza determina la dinamica del sistema è la σ di questa gaussiana, che nell’espressione di \vec{D} è legata a $\langle \ell^2 \rangle$.

Ora, poiché il sistema è isotropo si avrà $\langle \vec{D} \rangle = 0$, e:

$$\langle D^2 \rangle = \langle \ell_1^2 \rangle + \langle \ell_2^2 \rangle + \dots + \langle \vec{\ell}_1 \cdot \vec{\ell}_2 \rangle + \dots + \langle \vec{\ell}_1 \cdot \vec{\ell}_N \rangle + \dots$$

¹Il collegamento fra le due cose non è affatto ovvio, e non lo vediamo.

²In generale, al posto di x^2 ci dovrebbe essere $(x - \bar{x})^2$. Tuttavia in questo caso $\bar{x} = 0$ perché non ci sono “forze” che obbligano i fotoni ad andare in una direzione privilegiata.

poiché però in media $\langle \vec{\ell}_i \cdot \vec{\ell}_j \rangle = 0$ (sono vettori casuali, quindi integrando sul coseno dell'angolo fra di loro si ottiene zero):

$$\langle D^2 \rangle = \sum_{i=1}^N \langle \ell_i^2 \rangle$$

Se ora assumiamo (e si tratta di un'assunzione molto forte) che tutti gli step abbiano la stessa lunghezza ℓ (cosa sicuramente non vera, perché la lunghezza di uno step è legata alla densità della stella, che non è costante al suo interno), allora:

$$\langle D^2 \rangle = N \langle \ell^2 \rangle$$

Approssimativamente, la gran parte dei fotoni sarà uscita dal Sole quando $\langle D^2 \rangle = R_\odot^2$, quindi:

$$\langle D^2 \rangle = N \ell^2 = R_\odot^2 \quad \Rightarrow \quad N = \left(\frac{R_\odot}{\ell} \right)^2$$

Poiché i fotoni si muovono a velocità c , fra uno scattering e l'altro intercorrerà un tempo $t = \ell/c$; pertanto, la maggior parte dei fotoni per arrivare alla superficie del Sole impiegherà un tempo:

$$t_{RW} = N \frac{\ell}{c} = \frac{R_\odot^2}{c \ell}$$

ove RW sta per "random walk".

Ora, se i fotoni non avessero ostacoli, attraverserebbero il Sole in un tempo $t_0 = R_\odot/c$, e quindi:

$$t_{RW} = \frac{R_\odot}{\ell} t_0$$

Notiamo dunque come, poiché sicuramente R_\odot/ℓ è un numero molto grande, a causa degli scattering i fotoni impiegano molto tempo per uscire dal Sole. Pertanto, il rate di emissione dei fotoni è diminuito rispetto al caso senza ostacoli. Ci aspettiamo dunque che:

$$L_\odot = L'_\odot \frac{\ell}{R_\odot}$$

(ove appunto L'_\odot è la luminosità che avrebbe il Sole se i fotoni uscissero senza subire urti) e quindi poiché $L \propto T^4$:

$$T_E = \left(\frac{\ell}{R_\odot} \right)^{1/4} T_I$$

Considerando che per il sole $T_E \approx 6000$ K e $T_I \approx 6 \cdot 10^6$ K, si ricava $\ell \approx 1$ mm.

Insomma, possiamo spiegare la differenza fra temperature esterna e interna del Sole in base alla diffusione radiativa dei fotoni con un cammino libero medio di circa un millimetro.

In base a questo, poi, si ricava $t_{RW} \approx 5 \cdot 10^4$ anni.

Inoltre, in generale:

$$L = L \frac{\ell}{R} = 4\pi R^2 \sigma T_I^4 \frac{\ell}{R} \quad k_B T_I = \frac{GM\bar{m}}{3R} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad L = 4\pi R^2 \sigma \left(\frac{GM\bar{m}}{3k_B R} \right)^4 \frac{\ell}{R}$$

e posto $M = \frac{4\pi}{3} \bar{\rho} R^3$ risulta:

$$L = \frac{(4\pi)^2}{3^5} \frac{\sigma}{k_B^4} G^4 \bar{m}^4 \bar{\rho} \ell M^3$$

Poiché L_\odot è una perdita di energia (e quindi massa) per unità di tempo, da quest'espressione possiamo ricavare la vita media di una stella:

$$\tau \sim \frac{M}{L} \sim M^{-2}$$

Pertanto, stelle di grande massa hanno una vita molto più breve rispetto a quelle di piccola massa. Sperimentalmente risulta:

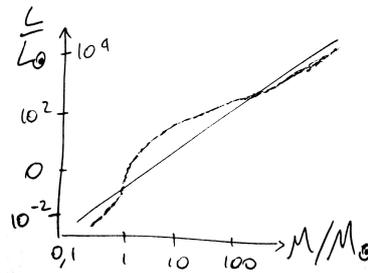


Figura 5.2: Confronto fra modello e risultati sperimentali

e quindi l'accordo con le osservazioni è sufficientemente buono.

Poiché le stelle di grande massa vivono poco, l'arricchimento chimico delle galassie sarà dovuto principalmente alla morte di stelle di grandi dimensioni (perché alla fine della loro vita espellono gran parte del loro materiale). Se misuriamo le abbondanze degli elementi presenti nell'universo, si trova:

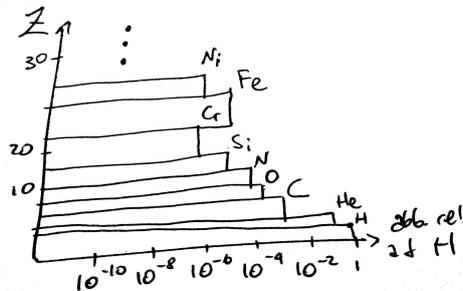


Figura 5.3: Abbondanze relative di vari elementi

Poiché questi sono sostanzialmente gli elementi che si creano all'interno delle stelle, troviamo una conferma del fatto che siano queste le responsabili dell'arricchimento chimico delle galassie.

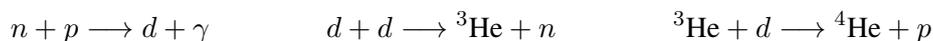
5.2 Reazioni termonucleari nelle stelle: catena $p-p$

Il bruciamento dell'idrogeno nei nuclei stellari avviene attraverso i seguenti processi:

1. $p + p \longrightarrow d + e^+ + \nu_e$
2. $p + d \longrightarrow {}^3\text{He} + \gamma$
3. ${}^3\text{He} + {}^3\text{He} \longrightarrow {}^4\text{He} + 2p$

Pertanto, poiché per effettuare il processo 3 è necessario che i processi 1 e 2 siano avvenuti due volte, servono 4 protoni per produrre un nucleo di ${}^4\text{He}$.

Confrontiamo questi processi con quelli della produzione di ${}^4\text{He}$ nella nucleosintesi primordiale:



Notiamo dunque che nel caso del processo stellare sono coinvolti sia interazioni deboli (processo 1) che elettromagnetiche e forti (processi 2 e 3), mentre non è così nel caso della nucleosintesi primordiale (i processi deboli sono assenti). Questa discrepanza è dovuta al fatto che dopo la nucleosintesi primordiale fondamentalmente non esistono più neutroni liberi a disposizione per questi processi, e quindi è necessario usare vie secondarie per produrre ${}^4\text{He}$.

Notiamo anche che il bottleneck (che nella nucleosintesi primordiale era dato dalla produzione di deuterio)

stavolta è dato dal primo processo, che impiega circa 5 miliardi di anni per avvenire. Si tratta insomma di un processo molto poco efficiente. Per confronto, il processo 2 avviene in circa 1 secondo e il 3 in $3 \cdot 10^5$ anni. Pertanto, l'intera catena è fondamentalmente regolata dal primo processo.

Cerchiamo ora di capire quanti protoni vengono bruciati ogni secondo nel Sole per sostenerne la luminosità. Considerato che $L_{\odot} \approx 4 \cdot 10^{26}$ W, che la reazione 3 libera circa $\varepsilon = 26$ MeV (ossia circa $4 \cdot 10^{-12}$ J) per ogni ${}^4\text{He}$ prodotto e che ci vogliono 4 protoni per produrre un ${}^4\text{He}$, il rate di consumo di protoni sarà:

$$\frac{L_{\odot}}{\varepsilon/4} \approx \frac{4 \cdot 10^{26}}{\frac{1}{4} \cdot 4 \cdot 10^{-12}} = 4 \cdot 10^{38} \text{ protoni/s}$$

È un numero molto grande, ma bisogna tener conto che nel Sole ci sono circa $7 \cdot 10^{56}$ protoni; pertanto, la quantità di protoni bruciati ogni secondo nel nucleo del Sole è una frazione ridicolmente piccola della sua massa. Risulta infatti che nel Sole in circa 5 miliardi di anni viene bruciato approssimativamente il 10% dei protoni totali che lo costituiscono.

Possiamo poi chiederci quanti neutrini emetta il Sole ogni secondo. Dal processo 1 vediamo subito che per ogni due protoni bruciati viene emesso un neutrino: pertanto il rate di emissione dei neutrini sarà la metà di quello dei protoni, ossia $2 \cdot 10^{38}$ neutrini/s. Questi attraversano indisturbati il Sole e giungono fino a noi.

5.3 Le fasi evolutive di una stella

Come abbiamo visto, l'energia liberata nel bruciamento dell'idrogeno serve per contrastare il collasso gravitazionale della stella. Le reazioni termonucleari, insomma, funzionano come un "termostato": se venisse prodotta più energia del necessario la temperatura della stella aumenterebbe, determinandone l'espansione e dunque il raffreddamento, e viceversa se non ne venisse prodotta abbastanza. Ciò permette alle stelle di "autoregolarsi", restando in condizioni in cui i flussi di energia uscente e prodotta coincidono.

Quando i protoni di una stella vengono bruciati in quantità considerevoli, non riuscendo più a produrre l'energia necessaria a contrastarne il collasso la stella comincia a contrarsi di nuovo aumentando la sua temperatura fino a che si stabiliscono le condizioni per il bruciamento di elementi via via più pesanti; le parti esterne, invece, si espandono e raffreddano. In questa fase evolutiva, una stella è detta *gigante rossa*.

In media, nel diventare una gigante rossa il raggio di una stella aumenta di un fattore pari a circa 70.

Consideriamo ora i cicli di bruciamento successivi a quello dell'idrogeno.

Il bruciamento dell' ${}^4\text{He}$ (che è il processo che avviene dopo quello dell'idrogeno) richiede temperature di circa 10^8 K; queste temperature vanno ancora una volta confrontate con la possibilità di degenerazione elettronica (questo confronto deve essere ripetuto ogni volta che finisce un ciclo di bruciamento, pertanto per il bruciamento di ogni elemento esiste una temperatura minima, e quindi una massa minima, necessarie per innescare il processo).

Mostriamo in una tabella le principali proprietà dei vari cicli di bruciamento (T_{ign} è la *temperatura di ignizione* di un processo di bruciamento):

Processo	Carburante	Prodotti	T_{ign}/K	M_{min}/M_{\odot}
Bruciamento dell'idrogeno	idrogeno	elio	10^7	0.08
Bruciamento dell'elio	elio	carbonio, ossigeno	10^8	0.5
Bruciamento del carbonio	carbonio	ossigeno, neon, sodio, magnesio	$5 \cdot 10^8$	8
Bruciamento del neon	neon	ossigeno, magnesio		
Bruciamento dell'ossigeno	ossigeno	dal magnesio allo zolfo	10^9	~ 8
Bruciamento del silicio	silicio	ferro e elementi vicini	$3 \cdot 10^9$	11

Tabella 5.1: Cicli di bruciamento

Consideriamo anche l'andamento dell'energia di legame per nucleone di un nucleo in funzione del numero di massa:

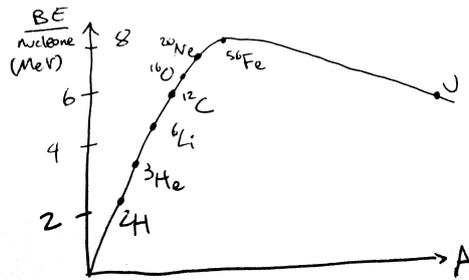


Figura 5.4: Energia di legame per nucleone

Poiché questa ha un massimo per ^{56}Fe , le reazioni termonucleari fino al bruciamento del silicio sono esoenergetiche, e per produrre elementi successivi al ferro c'è bisogno di usare vie alternative (vedremo poi quali).

Consideriamo il nucleo ^{12}C ; questo viene prodotto attraverso i processi:



Pertanto, per poter produrre ^{12}C è necessario che la densità della stella sia sufficientemente elevata da permettere al ${}^8\text{Be}$ di scontrarsi contro un ${}^4\text{He}$ prima di decadere (in quanto è un elemento instabile).

Una volta che ^{12}C viene prodotto, può essere bruciato attraverso la seguente sequenza (molto più rara) di processi:



Ovviamente, le varie sequenze di bruciamento continueranno finché la massa della stella lo permetterà; per stelle con $M > 11M_{\odot}$ alla fine si avrà un nucleo densissimo di ferro, e gli altri elementi distribuiti via via nelle zone più esterne.

Per produrre elementi più pesanti del ferro si possono sfruttare solo processi di cattura neutronica (favoriti dall'assenza di barriere coulombiane); una volta che un nucleo cattura un neutrone, questo può decadere β cambiando il numero atomico del nucleo.

Processi di cattura neutronica di questo tipo possono avvenire in due modi: processi lenti (*s-process*, da "slow") e rapidi (*r-process*, da "rapid"). In una stella di piccola massa prevale il processo *s*, mentre l'*r* è rilevante nei processi di espulsione rapida delle parti esterne di una stella (una *supernova*) a seguito della fine di un ciclo di bruciamento.

Ora, se cerchiamo di sfruttare la degenerazione elettronica per "bloccare" il collasso di una stella dobbiamo ricordarci che un gas di particelle relativistiche è instabile, e quindi esisterà una massa massima per il nucleo oltre la quale il collasso non potrà essere bloccato neanche dalla degenerazione elettronica. Questa è la *massa di Chandrasekhar*:

$$M_{CH} = 1.4M_{\odot}$$

(ovviamente il Sole non rientrerà nei ragionamenti che faremo adesso).

Se il nucleo di una stella è maggiore di M_{CH} , ci aspettiamo che il nucleo stesso inizi a collassare in caduta libera, e potrà fermarsi solo quando raggiungerà la degenerazione di un gas di neutroni. In questo modo la stella diventa una *stella di neutroni*; in questo caso le parti esterne della stelle vengono espulse molto violentemente, ed eventi di questo tipo prendono il nome di *supernovae di tipo II*. In questa fase il ferro presente nel nucleo viene fotodisintegrato, mentre all'esterno vengono prodotti molti elementi pesanti tramite il processo *r*. La maggior parte dell'energia rilasciata in supernovae di questo tipo è sotto forma di neutrini.

Anche un gas degenero di neutroni, però, non è stabile (essendo comunque un gas ultrarelativistico); se pertanto la massa della stella è sufficientemente elevata, anche questo nucleo di neutroni collasserà in caduta libera. La massa critica oltre la quale avviene questo collasso non è ancora stata determinata con precisione (si ritiene sia maggiore di circa tre masse solari).

Poiché non esiste più alcun processo che possa fermare il collasso, l'unica cosa che può avvenire a questo punto

è la creazione di un buco nero. Ovviamente questi non sono direttamente osservabili, ma siamo in grado di osservare la radiazione emessa dal gas caldo che circonda un buco nero e collassa verso di esso. Anche in questo caso il collasso finale della stella di neutroni è associato all'espulsione violenta degli strati esterni della stella.

5.4 Diagramma di Hertzsprung-Russel

È un diagramma fenomenologico, costruito sulla base delle osservazioni. In pratica ogni punto del diagramma costituisce una stella nota, e viene posizionato nel diagramma in base alle caratteristiche della stella. Originariamente il diagramma aveva sugli assi la magnitudine e il colore della stella, mentre in unità fisiche attuali il diagramma è temperatura/luminosità.

Il colore è comunque significativo perché poiché le stelle emettono come un corpo nero (in buona approssimazione), il colore della stella è legato al massimo di emissione, e quindi alla temperatura della stella.

La magnitudine poi è un'unità di misura di importanza storica, definita in modo che se la brillantezza di una stella aumenta di un fattore 10, la magnitudine diminuisce di un fattore 2.5. Insomma, si ha:

$$m_1 - m_2 = -2.5 \log_{10} \frac{f_1}{f_2}$$

ove m_1 e m_2 sono le magnitudini apparenti (ossia quelle osservate) di due oggetti, e f_1 , f_2 i flussi di fotoni ricevuti da loro.

Convenzionalmente, si chiama *magnitudine assoluta*, e si indica con M , quella che un oggetto avrebbe se si trovasse a 10 pc di distanza da noi³. Si chiama poi *magnitudine bolometrica* quella integrata su tutte le frequenze di emissione. In funzione della luminosità di una stella, la magnitudine bolometrica assoluta è:

$$M_{BOL} = -2.5 \log_{10} \left(\frac{L}{L_{\odot}} \right) + 4.72$$

ove il 4.72 è la magnitudine assoluta del Sole.

Si ha poi, per una stella:

$$m - M = -5 + 5 \log_{10} d_L(\text{pc})$$

ove $d_L(\text{pc})$ è la distanza di luminosità espressa in parsec.

Sostituendo la legge di Hubble al second'ordine:

$$m - M = 25 - 5 \log_{10} H_0 + 5 \log_{10}(cz) + 1.086(1 - q_0)z$$

ove $1.086 = \frac{5}{2} \log_{10} e$.

Il diagramma di Hertzsprung-Russel è il seguente:

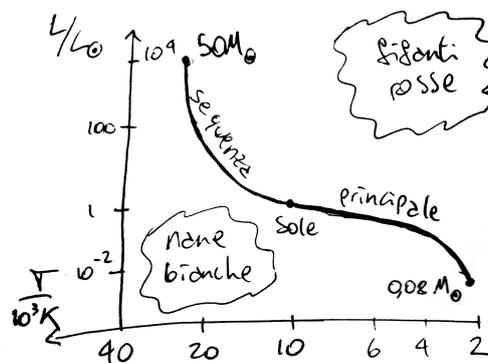


Figura 5.5: Diagramma di Hertzsprung-Russel

³Ricordiamo che $1 \text{ pc} = 3.086 \cdot 10^{16} \text{ m} = 3.26 \text{ anni luce}$.

La zona della sequenza principale è molto ricca (contiene circa il 99% delle stelle note) perché per via dei tempi scala in gioco le stelle spendono la maggior parte della loro vita a bruciare idrogeno (il processo debole coinvolto, come abbiamo visto, rende il bruciamento di quest'elemento particolarmente lento).

A seconda della sua massa, poi, una stella si sposterà nella zona delle nane bianche o delle giganti rosse.

Possiamo pertanto pensare al diagramma HR come ad un'“istantanea” della situazione attuale della popolazione stellare.

5.5 La massa massima per una stella

Ciò che ci proponiamo di fare in questa sezione è di ricavare un modello che ci permetta di determinare la massima massa che una stella può avere. Per farlo sarà necessario ricavare i profili di densità $\rho(r)$, pressione $P(r)$ e massa $m(r)$.

Un primo approccio per la determinazione del profilo di densità

Cominciamo considerando le condizioni di equilibrio idrostatico:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2} \quad \frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)$$

Moltiplicando per $r^2/\rho(r)$ a destra e a sinistra:

$$\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} = -Gm(r)$$

e derivando rispetto a r :

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} \right) = -G \frac{dm}{dr} = -G4\pi r^2 \rho(r) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{dP}{dr} \right) = -4\pi G \rho(r)$$

Per poter risolvere quest'equazione abbiamo bisogno di un'equazione di stato; useremo la cosiddetta *equazione politropica*:

$$P(\rho) = k\rho^{\frac{n+1}{n}} \quad n = \frac{1}{\gamma - 1}$$

ove γ è l'indice adiabatico del gas⁴.

Sostituendo:

$$\frac{k}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{r^2}{\rho(r)} \frac{d}{dr} \left(\rho^{\frac{n+1}{n}} \right) \right] = -4\pi G \rho(r)$$

È dunque questa l'equazione che dobbiamo studiare; essendo del second'ordine in r abbiamo bisogno di due condizioni al contorno: possiamo ad esempio fissare la densità centrale ρ_c (ossia $\rho_c = \rho(r=0)$) e la sua derivata, $\frac{d\rho}{dr}|_{r=0}$. Il modello che stiamo formulando è consistente se questa derivata è nulla; se infatti consideriamo la prima equazione delle condizioni d'equilibrio, sostituendoci l'equazione politropica si ha:

$$\rho^{1/n} \frac{d\rho}{dr} \propto -\frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r)$$

e poiché (non è difficile vederlo) $m(r) \sim \rho_c r^3$ per piccoli valori di r , allora:

$$\rho^{1/n} \frac{d\rho}{dr} \sim \rho_c r$$

e quindi effettivamente $\frac{d\rho}{dr}|_{r=0} = 0$.

Fissata ρ_c possiamo dunque ottenere il profilo di densità $\rho(r)$; in questo modo i parametri del nostro modello sono k e ρ_c . Il raggio di una stella, poi, sarà quel valore R di r per cui $\rho(R) = 0$, e pertanto $m(R) = M$ sarà la massa della stella.

Notiamo solo che l'ipotesi (implicita) che abbiamo fatto nel considerare n costante non è sicuramente verosimile (le caratteristiche del gas che compone la stella varieranno a seconda della distanza dal centro).

Teoricamente, dunque, il problema è risolvibile, anche se a livello pratico l'unico modo per ottenere informazioni da questo modello è risolvere l'equazione con simulazioni numeriche, o con iterazioni successive.

⁴Se $\gamma = 5/3$, ossia nel caso di un gas ideale, si ha $n = 3/2$, mentre se $\gamma = 4/3$, ossia per un gas relativistico, $n = 3$.

Un altro approccio: il modello di Clayton

Vediamo ora un altro modello che ci consente di fare esplicitamente dei conti per estrarre informazioni sulla stella, proposto da Clayton nel 1986.

Cominciamo chiedendoci: com'è il gradiente di pressione al centro di una stella⁵? Considerando l'equazione che esprime dP/dr all'equilibrio idrostatico, il gradiente di pressione per $r \sim 0$ sarà (tenendo conto che per piccoli r si ha $m(r) \sim \frac{4\pi}{3}G\rho_c r^3$ e $\rho \sim \rho_c$):

$$\frac{dP}{dr} \sim -\frac{4\pi}{3}G\rho_c^2 r$$

e quindi il gradiente di pressione è lineare e negativo⁶.

D'altra parte, sulla superficie della stella si avrà $dP/dr \sim 0$ (in quando $\rho \sim 0$ su di essa); quindi:

$$\left. \frac{dP}{dr} \right|_{r=R} = 0$$

Ci aspettiamo dunque un andamento per dP/dr del genere:

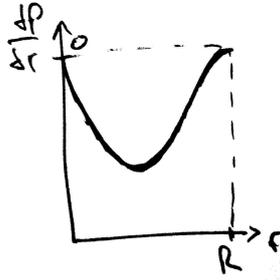


Figura 5.6: Andamento atteso del gradiente di pressione

Clayton propose di considerare una forma del gradiente di pressione del tipo⁷:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{4\pi}{3}G\rho_c^2 r e^{-r^2/a^2}$$

ove a è un parametro libero (di fit) del modello.

Il modello risulta funzionare correttamente per $a \ll R$ (che fra poco vedremo corrispondere all'assunzione ragionevole che la maggior parte della materia della stella sia concentrata nel suo centro), e si può vedere che il minimo del gradiente di pressione si ha per $r = a/\sqrt{2}$.

Questo gradiente di pressione può essere integrato per ottenere il profilo di pressione, e risulta:

$$P(r) = \frac{2\pi}{3}G\rho_c^2 a^2 \left(e^{-r^2/a^2} - e^{-R^2/a^2} \right)$$

Cerchiamo ora di ricavare il profilo di massa $m(r)$; per farlo riconsideriamo l'equazione:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)}{r^2} \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dm}{dr}$$

(ove abbiamo sostituito $\rho(r)$ dall'equazione per dm/dr). Da questa si trova subito:

$$Gm(r)dm = -4\pi r^4 dP$$

Per un generico raggio possiamo integrare questa relazione, ottenendo:

$$\frac{1}{2}Gm^2(r) = -4\pi \int_0^r \tilde{r}^4 \frac{dP}{d\tilde{r}} d\tilde{r} = 4\pi \int_0^r \tilde{r}^4 \frac{4\pi}{3}G\rho_c^2 \tilde{r} e^{-\tilde{r}^2/a^2} d\tilde{r} = \frac{(4\pi)^2}{3}G\rho_c^2 a^6 \int_0^x \tilde{x}^5 e^{-\tilde{x}^2} d\tilde{x}$$

⁵Potevamo anche ragionare in termini di gradiente di densità, ma con la pressione i conti sono più semplici.

⁶Il gradiente di pressione deve essere sempre negativo per opporsi al collasso gravitazionale.

⁷In realtà una forma del genere è verosimile solo per le parti centrali della stella, e non in prossimità della sua superficie.

ove nell'ultimo passaggio abbiamo effettuato il cambio di variabile $x = r/a$. Poniamo poi:

$$\Phi^2(x) = 6 \int_0^x \tilde{x}^5 e^{-\tilde{x}^2} d\tilde{x} = 6 - 3(x^4 + 2x^2 + 2)e^{-x^2}$$

Il secondo termine di quest'espressione è trascurabile per $r \sim R$, se $a \ll R$; pertanto sulla superficie della stella si ha $\Phi^2 \sim 6$ (ci torneremo). Dunque:

$$\frac{1}{2} G m^2(r) = \frac{(4\pi)^2}{18} G \rho_c^2 a^6 \Phi^2(x) \quad \Rightarrow \quad m(r) = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_c \Phi(x)$$

e quindi si ha anche:

$$\rho(r) = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dm}{dr} = \rho_c \frac{x^3 e^{-x^2}}{\Phi(x)}$$

Infatti:

$$\frac{dm}{dr} = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_c \frac{d\Phi}{dx} \frac{dx}{dr} \quad \frac{d}{dx} \Phi^2(x) = 2\Phi \frac{d\Phi}{dx} = 6x^5 e^{-x^2}$$

e sostituendo $d\Phi/dx$ e tenendo conto che $dx/dr = 1/a$ si trova proprio la forma determinata di $\rho(r)$.

Formalmente, dunque, il problema è risolto.

Inoltre, conoscendo $\rho(r)$ e supponendo che la stella sia composta di gas ideale non relativistico possiamo anche ricavare il profilo di temperatura:

$$T(r) = \frac{\bar{m}}{k_B} \frac{P(r)}{\rho(r)}$$

Supponiamo di voler studiare cosa accade per $x \ll 1$ (ossia vicino al centro della stella). Dobbiamo allora espandere Φ per piccoli x :

$$\Phi(x) = \left[6 - 3(x^4 + 2x^2 + 2) \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{x^6}{6} + \dots \right) \right]^{1/2} = \dots = \left(x^6 - \frac{3}{4}x^8 + \frac{3}{10}x^{10} - \frac{1}{12}x^{12} \right)^{1/2}$$

Quindi, per $r \ll a$:

$$\rho(r) = \rho_c \frac{x^3 e^{-x^2}}{\Phi(x)} \simeq \rho_c \frac{x^3 e^{-x^2}}{x^3 \left(1 - \frac{3}{8}x^2 + \dots \right)} \simeq \rho_c \left(1 + \frac{3}{8}x^2 \right) (1 - x^2 + \dots) = \rho_c \left(1 - \frac{5}{8} \frac{r^2}{a^2} \right)$$

Per quanto riguarda pressione e temperatura, invece (trascuriamo e^{-R^2/a^2}):

$$P(r) \simeq \frac{2\pi}{3} G \rho_c^2 a^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)$$

$$T(r) \simeq \frac{\bar{m}}{k_B} \frac{2\pi}{3} G \rho_c a^2 \frac{1 - \frac{r^2}{a^2}}{1 - \frac{5}{8} \frac{r^2}{a^2}} = \frac{\bar{m}}{k_B} \frac{2\pi}{3} G \rho_c a^2 \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right) \left(1 + \frac{5}{8} \frac{r^2}{a^2} \right) = T_c \left(1 - \frac{3}{8} \frac{r^2}{a^2} \right)$$

ove abbiamo definito la temperatura centrale T_c come:

$$T_c = \frac{\bar{m}}{k_B} \frac{2\pi}{3} G \rho_c a^2$$

Vediamo ora invece cosa accade in prossimità della superficie. Innanzitutto vediamo quanto vale la massa totale della stella:

$$M = m(R) = \frac{4\pi}{3} a^3 \rho_c \Phi \left(\frac{R}{a} \right) \simeq \frac{4\pi}{3} \rho_c a^3 \sqrt{6}$$

perché, come già visto, $\Phi^2(R/a) \simeq 6$.

D'altra parte, però, $M = \frac{4\pi}{3} \langle \rho \rangle R^3$, e quindi:

$$\langle \rho \rangle \simeq \sqrt{6} \left(\frac{a}{R} \right)^3 \rho_c$$

Se la stella è molto concentrata, $\rho_c/\langle\rho\rangle \gg 1$, ossia $a \ll R$, come avevamo detto.

Possiamo quindi ricavare il valore del parametro a in funzione di M :

$$a = \left(\frac{3M}{4\pi\rho_c\sqrt{6}} \right)^{1/3}$$

(nel caso del Sole $a \simeq R_\odot/5.4$). Si ha poi che $\rho(a) = 0.53\rho_c$ e $m(a) = 0.28M$; il modello è dunque autoconsistente perché coerente col fatto che $a/R \ll 1$ equivalga ad un'elevata concentrazione della stella.

Secondo questo modello, la pressione centrale della stella vale (trascurando sempre e^{-R^2/a^2}):

$$P_c = P(0) \simeq \frac{2\pi}{3}\rho_c^2 a^2 = \frac{2\pi}{3}G\rho_c^2 \left(\frac{3M}{4\pi\rho_c\sqrt{6}} \right)^{2/3} \simeq \left(\frac{\pi}{36} \right)^{1/3} GM^{2/3}\rho_c^{4/3}$$

Questo risultato ci sarà molto utile in seguito.

Tenendo conto che $(\pi/36)^{1/3} \approx 0.44$, il risultato appena determinato può essere confrontato con modelli più precisi (ad esempio con le simulazioni numeriche dell'approccio precedente). Per la pressione centrale si trova che:

$$\begin{aligned} P_c &= 0.48GM^{2/3}\rho_c^{4/3} & \text{per } n = \frac{3}{2}, \quad \gamma = \frac{5}{3} \\ P_c &= 0.36GM^{2/3}\rho_c^{4/3} & \text{per } n = 3, \quad \gamma = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

e quindi c'è un buon accordo fra questi modelli (ossia ciò che abbiamo trovato è sensato e ragionevole).

Si potrebbe anche mostrare (dallo studio delle proprietà dell'equilibrio idrostatico) che:

$$P_c < \left(\frac{\pi}{6} \right)^{1/3} GM^{2/3}\rho_c^{4/3}$$

La massa massima

Passiamo ora alla determinazione della massa massima per una stella.

Dato che adesso conosciamo P_c possiamo dire che:

$$P_c = \frac{\rho_c}{\bar{m}}k_B T_c \quad \Rightarrow \quad k_B T_c \simeq \left(\frac{\pi}{36} \right)^{1/3} G\bar{m}M^{2/3}\rho_c^{1/3}$$

Consideriamo poi la composizione della stella⁸: questa sarà una miscela di gas non relativistico e relativistico (a seconda della temperatura delle sue varie parti). Come sappiamo, però, un gas relativistico è instabile, e quindi se una stella ne contiene una gran parte questa può diventare instabile.

Supponiamo che al centro di una stella ci sia una miscela di gas non relativistico (elettroni e protoni) e relativistico (radiazione). Pertanto:

$$P_c = P_g + P_r \quad P_g = \frac{\rho_c}{\bar{m}}k_B T_c \quad P_r = \frac{1}{3}\tilde{a}T_c^4$$

ove:

$$\tilde{a} = \frac{\pi^2 k_B^2}{15\hbar^3 c^3}$$

Chiamiamo poi β la frazione di gas non relativistico che compone la stella (quindi $0 \leq \beta \leq 1$); allora $P_g = \beta P_c$ e $P_r = (1 - \beta)P_c$, e pertanto:

$$\beta P_c = \frac{\rho_c}{\bar{m}}k_B T_c \quad (1 - \beta)P_c = \frac{1}{3}\tilde{a}T_c^4$$

Elevando la prima equazione alla quarta potenza e facendone il rapporto con la seconda risulta:

$$\frac{\beta^4}{1 - \beta} P_c^3 = \frac{\rho_c^4}{\bar{m}^4} \frac{3}{\tilde{a}} k_B^4 \quad \Rightarrow \quad P_c = \left(\frac{3}{\tilde{a}} \frac{1 - \beta}{\beta^4} \right)^{1/3} \left(\frac{k_B \rho_c}{\bar{m}} \right)^{4/3}$$

⁸Ovviamente in tutto questo ragionamento stiamo considerando stelle della sequenza principale.

Uguagliando le due forme di P_c che abbiamo determinato:

$$\left(\frac{\pi}{36}\right)^{1/3} GM^{2/3} \rho_c^{4/3} = \left(\frac{3}{\tilde{a}} \frac{1-\beta}{\beta^4}\right)^{1/3} \left(\frac{k_B}{\tilde{m}}\right)^{4/3} \rho_c^{4/3} \Rightarrow \left(\frac{\pi}{36}\right)^{1/3} GM^{2/3} = \left(\frac{3}{\tilde{a}} \frac{1-\beta}{\beta^4}\right)^{1/3} \left(\frac{k_B}{\tilde{m}}\right)^{4/3}$$

Pertanto, maggiore è la massa M della stella e minore sarà β , ossia più è massiccia la stella e più decresce il contributo alla pressione centrale dovuto al gas non relativistico. In altre parole più grande è la massa della stella e maggiore sarà il contributo della sua componente relativistica, e quindi più instabile sarà la stella stessa. Possiamo fissare un valore critico β_c di β al di sotto del quale la stella è instabile. Se per esempio $\beta = 0.5$ si ha che la massa massima per una stella è $M_{\max} \simeq 100M_{\odot}$, ma un conto più preciso permette di determinare che $M_{\max} \simeq 50M_{\odot}$ è la miglior stima che si possa fare.

Insomma, la massa massima che può avere una stella è di circa 50 masse solari. In particolare, si ha:

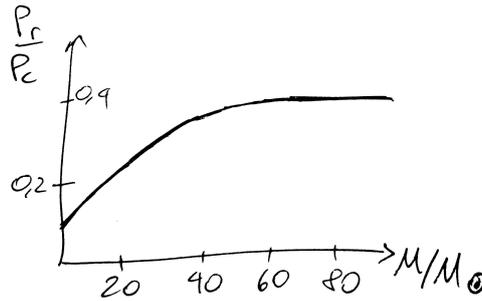


Figura 5.7: Risultati sperimentali

5.6 Il legame fra massa minima e massima di una stella: M_* e M_{CH}

Vogliamo ora mostrare che in realtà le masse minima e massima di una stella sono legate fra loro, e in che modo. Per farlo dobbiamo sfruttare strumenti che abbiamo già studiato. In particolare, nella discussione della storia termica dell'universo (vedi 3.1) abbiamo studiato le densità numeriche e di energia delle particelle dell'universo, e la loro pressione. Quello che dovremo fare è studiare queste quantità al centro delle stelle, per determinare come la presenza di un gas degenere di elettroni influenzi la massa minima e massima che una stella può avere.

Cominciando dalla densità numerica, avevamo visto che:

$$n = g_s \int \frac{d^3p}{h^3} f(p) \quad f(p) = \left[\exp\left(\frac{\varepsilon_p - \mu}{T}\right) + 1 \right]^{-1}$$

ove la forma di $f(p)$ è dovuta al fatto che consideriamo dei fermioni (gli elettroni), e $\varepsilon_p = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$.

Siamo interessati al caso degenere nei regimi non relativistico e relativistico; in generale, infatti, il gas degenere di elettroni presente nelle stelle non sarà relativistico, ma se la densità del gas è sufficientemente elevata questo può accadere.

Sappiamo che per un gas degenere $\mu = \varepsilon_p = \varepsilon_F$ con ε_F energia di Fermi, e si definisce il *momento di fermi* p_F di modo che $\varepsilon_F = \sqrt{p_F^2 c^2 + m^2 c^4}$. Pertanto:

$$f(\varepsilon_p) = \begin{cases} 1 & \varepsilon_p \leq \varepsilon_F \\ 0 & \varepsilon_p > \varepsilon_F \end{cases}$$

e perciò:

$$n = g_s \frac{4\pi}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 dp = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{p_F}{h}\right)^3$$

ove abbiamo sfruttato il fatto che per gli elettroni $g_s = 2$. Possiamo quindi esprimere il momento di Fermi in funzione della densità numerica n :

$$p_F = \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{1/3} h$$

Notiamo che finora non abbiamo fatto nessuna assunzione sul fatto che gli elettroni siano relativistici o meno; questa entra in gioco nel calcolo di ρ e P .

Per quanto riguarda ρ si ha:

$$\rho = g_s \int \frac{d^3p}{h^3} f(\varepsilon_p) \varepsilon_p = g_s \frac{4\pi}{h^3} \int_0^{p_F} p^2 \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} dp$$

Possiamo dunque considerare due limiti:

non relativistico: in questo caso $\varepsilon_p = m_e c^2 + \frac{p^2}{2m_e}$, e quindi:

$$\rho = n \left(m_e c^2 + \frac{3p_F^2}{10m_e} \right)$$

(che contiene sia il contributo dell'energia di massa che di quella cinetica)

relativistico: si ha $\varepsilon_p = pc$ e quindi:

$$\rho = \frac{3}{4} n p_F c$$

(che contiene solo il contributo dell'energia cinetica)

Per quanto riguarda la pressione, in generale si ha:

$$P = g_s \int \frac{d^3p}{h^3} f(\varepsilon_p) \frac{p^2}{3\varepsilon_p}$$

e sfruttando ciò che abbiamo visto in 4.1, allora si avrà:

caso non relativistico: $P = \frac{2}{3} \frac{E_K}{V}$, e quindi:

$$P = n \frac{p_F^2}{5m_e}$$

e riesprimendo p_F in funzione di n si ha:

$$P = K_{NR} n^{5/3} \quad K_{NR} = \frac{h^2}{5m_e} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3}$$

caso relativistico: $P = \frac{1}{3} \frac{E_K}{V}$, e quindi⁹:

$$P = \frac{1}{4} n p_F c \equiv K_{UR} n^{4/3} \quad K_{UR} = \frac{hc}{4} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{1/3}$$

Il gas in esame quindi si può presentare in quattro modi: non degenere, relativistico e non relativistico, e degenere, relativistico e non relativistico. In un diagramma:

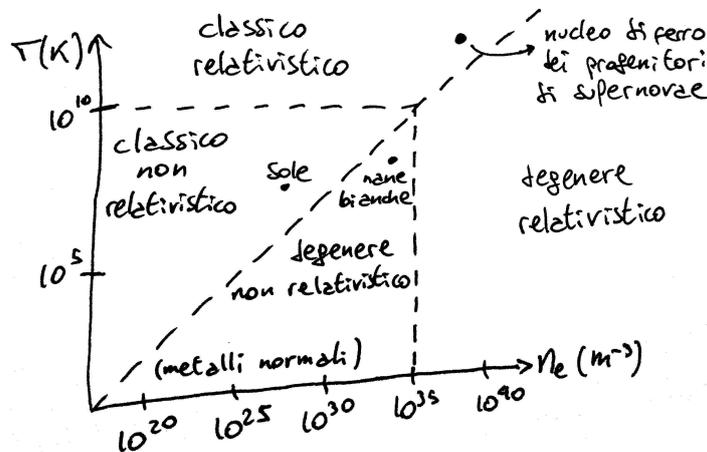


Figura 5.8: Regimi classici, relativistici, degeneri e non degeneri per un gas

⁹Poiché nei due casi P è proporzionale a diverse potenze di n , K_{NR} e K_{UR} hanno dimensioni diverse.

Torniamo dunque al nostro problema. Supponiamo di avere una stella come il Sole e di osservarne l'interno, supponendo che gli atomi del nucleo siano non relativistici. Allora la pressione centrale della stella sarà:

$$P_c = \frac{\rho_c}{\bar{m}} k_B T \quad \bar{m} = \frac{2m_H}{1 + 3x_1 + 0.5x_4}$$

ove x_1 e x_4 sono rispettivamente le frazioni in massa di idrogeno e ${}^4\text{He}$.

Il modello di Clayton però ci fornisce un'espressione di P_c in funzione di ρ_c (vedi 5.5):

$$P_c = \left(\frac{\pi}{36}\right)^{1/3} GM^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

Possiamo dunque determinare T_c in funzione di ρ_c e M :

$$k_B T_c \simeq \left(\frac{\pi}{36}\right)^{1/3} G\bar{m}M^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

Per ottenere questo risultato abbiamo però idealizzato fortemente il nostro sistema, supponendo che sia composto da un gas ideale di elettroni classici; il risultato sarà dunque vero solo per densità poco elevate, perché a densità maggiori la stella sarà composta da una miscela di gas degeneri e non degeneri.

Potremmo dunque studiare un'altra situazione, ossia un gas di elettroni totalmente degeneri e relativistici (e supponiamo che tutti gli ioni siano completamente classici e ideali), anche se si tratta di un'altra situazione fortemente idealizzata. Si avrà dunque in questo caso:

$$P_c = K_{NR} n_e^{5/3} + n_i k_B T_c$$

ove abbiamo appunto considerato i contributi del gas di elettroni e degli ioni. Se supponiamo di avere atomi di idrogeno, $n_e = n_i = \rho_c/m_H$ e allora:

$$P_c = K_{NR} \left(\frac{\rho_c}{m_H}\right)^{5/3} + \frac{\rho_c}{m_H} k_B T_c$$

Uguagliando quest'espressione con quella del modello di Clayton si ottiene:

$$k_B T_c = \left(\frac{\pi}{36}\right)^{1/3} Gm_H M^{2/3} \rho_c^{1/3} - K_{NR} \left(\frac{\rho_c}{m_H}\right)^{2/3}$$

che per brevità riscriviamo come:

$$k_B T_c = A\rho^{1/3} - B\rho^{2/3}$$

Poiché siamo interessati alla massima temperatura raggiungibile, dobbiamo trovare il massimo di questa funzione. Risulta:

$$\rho_c^{\max} = \left(\frac{A}{2B}\right)^3 \quad k_B T_c^{\max} = \frac{A^2}{4B} = \left(\frac{\pi}{36}\right)^{1/3} \frac{G^2 m_H^{8/3}}{4K_{NR}} M^{4/3}$$

Se chiamiamo T_{ign} la temperatura di ignizione del processo che ci interessa, bisogna che $T_c^{\max} > T_{\text{ign}}$; in questo modo possiamo ottenere l'espressione della massa minima che una stella deve avere per poter attivare il processo di bruciamento considerato:

$$M_{\min} = \left(\frac{36}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{4K_{NR}}{G^2 m_H^{8/3}}\right)^{3/4} (k_B T_{\text{ign}})^{3/4}$$

notiamo come questa stima sia sicuramente migliore di quella che abbiamo già fatto (vedi 4.3.1) perché stiamo usando ρ_c invece di $\bar{\rho}$ e stiamo anche considerando l'effetto di un gas di elettroni completamente degeneri (cosa che prima non avevamo fatto).

Quello che adesso faremo è riscrivere questa massa in termini di grandezze caratteristiche del sistema.

Consideriamo due nucleoni posti a distanza r fra loro; la loro energia di interazione gravitazionale è:

$$E = -\frac{Gm_H^2}{r}$$

Prendendo ora come r la loro lunghezza d'onda Compton, $r = \frac{\hbar}{m_H c}$:

$$E = -\frac{Gm_H^3}{\hbar}c$$

Esprimendo $|E|$ in termini di energia di massa dei nucleoni:

$$\frac{|E|}{m_H c^2} = \frac{Gm_H^2}{\hbar c} \equiv \alpha_G = 5.9 \cdot 10^{-39}$$

e α_G è una quantità adimensionale che rappresenta l'intensità dell'interazione gravitazionale fra due nucleoni; come si vede è spaventosamente piccola (da confrontare ad esempio con l'omologa costante elettromagnetica, la costante di struttura fine $\alpha_{EM} \simeq 1/137$).

Riscriviamo dunque M_{\min} in funzione di α_G :

$$M_{\min} = 16 \left(\frac{k_B T_{\text{ign}}}{m_e c^2} \right)^{3/4} \alpha_G^{-3/2} m_H$$

Se prendiamo $T_{\text{ign}} = 1.5 \cdot 10^6$ K (la temperatura minima necessaria per il bruciamento dell'idrogeno), allora:

$$M_{\min} = 0.03 \alpha_G^{-3/2} m_H$$

Riconsideriamo ora l'espressione dalla quale avevamo ricavato la massa massima per una stella (vedi 5.5):

$$\left(\frac{\pi}{36} \right)^{1/3} G M^{2/3} = \left(\frac{3.1 - \beta}{\tilde{a} \beta^4} \right)^{1/3} \left(\frac{k_B}{\bar{m}} \right)^{4/3}$$

ove $\tilde{a} = \frac{\pi^2 k_B^2}{15 \hbar^3 c^3}$ e $\beta = 0.5$ è la frazione di gas relativistico che destabilizza il sistema. Possiamo anche in questo caso riscrivere la massa massima in funzione di α_G e m_H :

$$M_{\max} \simeq 56 \alpha_G^{-3/2} m_H$$

Possiamo dunque definire una massa caratteristica delle stelle:

$$M_* = \alpha_G^{-3/2} m_H \simeq 1.85 M_\odot$$

che "lega" effetti di gravità e proprietà dei nucleoni. Possiamo poi definire anche il numero di nucleoni presenti in una massa M_* :

$$N_* = \frac{M_*}{m_H} = \alpha_G^{-3/2} = 2 \cdot 10^{57}$$

(molto simile al numero di nucleoni presenti nel Sole).

Pertanto, sia M_{\min} che M_{\max} possono essere espresse in funzione della massa caratteristica M_* .

Passiamo ora al caso di degenerazione completa.

In questo caso la densità numerica di elettroni sarà:

$$n_e = Y_e \frac{\rho_c}{m_H} \quad Y_e = \frac{1 + x_1}{2}$$

ove x_1 è la frazione in massa di idrogeno presente. Per la pressione invece:

$$P_c = K_{NR} n_e^{5/3} = K_{NR} \left(\frac{Y_e \rho_c}{m_H} \right)^{5/3}$$

Confrontando nuovamente quest'espressione con quella data dal modello di Clayton si ottiene la densità centrale di un gas totalmente degenere di elettroni in funzione della massa M :

$$\rho_c = \frac{3.1}{Y_e^5} \left(\frac{M}{M_*} \right)^2 \frac{m_H}{(h/m_e c^2)^3}$$

Se invece gli elettroni fossero relativistici il ragionamento cambia; infatti stavolta:

$$P_c = K_{UR} n_e^{4/3} = K_{UR} \left(\frac{Y_e \rho_c}{m_H} \right)^{4/3} \Rightarrow K_{UR} \left(\frac{Y_e \rho_c}{m_H} \right)^{4/3} = \left(\frac{\pi}{36} \right)^{1/3} GM^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

Otteniamo dunque un'espressione che non dipende più da ρ_c , e definisce una massa caratteristica detta *massa di Chandrasekhar*:

$$M_{CH} = \left(\frac{36}{\pi} \right)^{1/2} \left(\frac{Y_e}{m_H} \right)^2 \left(\frac{K_{UR}}{G} \right)^{1/2} \simeq 2.3 \cdot Y_e^2 M_* \simeq 4.3 \cdot Y_e^2 M_\odot$$

Pertanto M_{CH} è la massa massima che una stella (una nana bianca in particolare) può sostenere con la sola pressione di un gas degeneri di elettroni; se la stella ha massa maggiore questa crollerà.

Un approccio più accurato

Il ragionamento che abbiamo appena fatto per ricavare la massa massima di una stella ha però delle pecche (dato che abbiamo fortemente idealizzato la situazione). Uno studio più accurato prevederebbe lo studio dell'espressione esatta di P , senza approssimazioni, nel limite di gas degeneri (ovviamente in questo caso la transizione fra regime non relativistico e relativistico sarà graduale e non più brusca).

Riconsideriamo l'espressione di P :

$$P = g_s \int \frac{d^3p}{h^3} f(p) \frac{p^2 c^2}{3\varepsilon_p}$$

Se prendiamo $f(p) = \Theta(p_F - p)$ (tenendo conto che per gli elettroni $g_s = 2$):

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_F} p^2 \frac{p^2 c^2}{\sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}} dp = \frac{8\pi}{3h^3} m_e^4 c^5 \int_0^{x_F} \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} dx$$

ove abbiamo effettuato il cambio di variabile $x = p/m_e c$ (e x rappresenta "quanto relativistici" siano gli elettroni, in particolare se $x_F \rightarrow \infty$ il sistema è relativistico mentre se $x_F \rightarrow 0$ è non relativistico). Questo integrale è calcolabile, anche se per nulla banale; risulta:

$$I(x_F) = \int_0^{x_F} \frac{x^4}{\sqrt{1+x^2}} dx = \frac{3}{2x_F^4} \left\{ x_F \sqrt{1+x_F^2} \left(\frac{2x_F^2}{3} - 1 \right) + \ln \left[x_F + \sqrt{1+x_F^2} \right] \right\}$$

e inoltre $I(x_F) \xrightarrow{x_F \gg 1} 1$, $I(x_F) \xrightarrow{x_F \ll 1} \frac{4}{5} x_F$. Possiamo allora scrivere:

$$P_c = K_{UR} n_e^{4/3} I(x_F)$$

e ripercorrendo gli stessi ragionamenti di prima:

$$K_{UR} \left(Y_e \frac{\rho_c}{m_H} \right)^{4/3} I(x_F) = \left(\frac{\pi}{36} \right)^{1/3} GM^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

e quindi¹⁰:

$$M_{\max} = [I(x_F)]^{3/2} M_{CH}$$

che è la massa massima della stella (nana bianca) in funzione di x_F , ossia della densità centrale.

Possiamo anche usare quest'espressione per determinare la densità centrale a massa fissa o la massa a densità centrale fissa. Risulta:

¹⁰Notiamo come in quest'espressione, poiché $x_F \propto n_e^{1/2} \propto \rho_c^{1/3}$, a seconda se $x_F \ll 1$ o $x_F \gg 1$ si ritrovano proprio i casi relativistico e non relativistico.

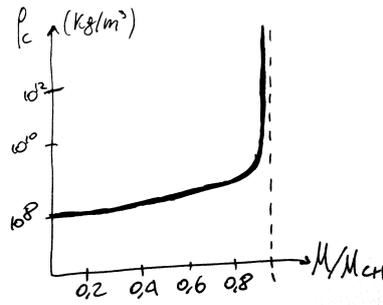


Figura 5.9: Andamento della densità centrale in funzione della massa della stella

quindi quando la massa è troppo elevata la densità diverge e la stella collassa.

Bisognerebbe tener conto però del fatto che in realtà il coefficiente $(\pi/36)^{1/3}$ cambia nel caso relativistico; facendolo si ottiene:

$$M_{CH} \simeq 3.1 \cdot Y_e^2 M_* \simeq 5.8 \cdot Y_e^2 M_\odot$$

Raggio e periodo di una nana bianca

Potremmo anche cercare di estrarre informazioni sulla densità media e quindi sul raggio della stella. Ponendo $\langle \rho \rangle = \rho_c/6$ (in quanto costituisce un'approssimazione accettabile) si ha:

$$\langle \rho \rangle = \frac{0.51}{Y_e^5} \left(\frac{M}{M_*} \right)^2 \frac{m_H}{(h/m_e c^2)^3}$$

Definiamo dunque il raggio della stella come:

$$R \equiv \left(\frac{3M}{4\pi \langle \rho \rangle} \right)^{1/3} = 0.77 \cdot Y_e^{5/3} \left(\frac{M_*}{M} \right)^{1/3} \alpha_G^{-1/2} \frac{h}{m_e c}$$

Possiamo quindi definire una lunghezza caratteristica per la nana bianca in termini di α_G :

$$\ell_{WD} = \alpha_G^{-1/2} \frac{h}{m_e c} = 3 \cdot 10^7 \text{ m}$$

Se poi $Y_e = 0.5$ otteniamo $R \simeq \frac{R_\odot}{74} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^{1/3}$, e in base a questo possiamo stimare la luminosità del corpo:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_E^4 = \frac{1}{(74)^2} \left(\frac{M_\odot}{M} \right)^{2/3} \left(\frac{T_E}{6000 \text{ K}} \right)^4 L_\odot$$

Se ad esempio $M = 0.4M_\odot$, $T_E = 10^4 \text{ K}$, si ha $L = 3 \cdot 10^{-3} L_\odot$ (si tratta dunque di oggetti molto poco luminosi).

5.7 Fasi finali dell'evoluzione di una stella

Vediamo ora cosa accade nelle fasi successive dell'evoluzione di una stella.

5.7.1 Stella di neutroni

Se la massa di una nana bianca è maggiore di quella che abbiamo appena trovato, la pressione del gas di elettroni degeneri non è in grado di contrastare le forze gravitazionali fra le parti della stella, che quindi inizierà a collassare. Adesso l'unica pressione che può bloccare il collasso è quella di un gas degeneri di neutroni. Questo perché nel collasso i nuclei si arricchiscono di neutroni con processi di cattura; inoltre avviene anche la fotodisintegrazione dei nuclei, e il decadimento β del neutrone non può più avvenire: essendo infatti il gas

degenere tutti gli stati possibili sono occupati, e quindi il nuovo protone prodotto da un ipotetico decadimento β dovrebbe andare ad occupare stati già occupati.

Inoltre la stella si arricchisce di neutroni attraverso il seguente decadimento β inverso:



In queste condizioni $\varepsilon_F(n) = \varepsilon_F(p) + \varepsilon_F(e)$, che è di fatto una relazione fra le densità delle particelle. Poiché però $m_n \neq m_p$, questa (seppur piccola) differenza di massa si tradurrà in un eccesso di densità di neutroni. In particolare, valori tipici per una stella di neutroni sono:

$$\rho = 2 \cdot 10^{17} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad n_n = 10^{44} \text{ m}^{-3} \quad n_p = n_e = \frac{n_n}{200}$$

Le caratteristiche di una stella di neutroni si troveranno a questo punto seguendo gli stessi ragionamenti di prima, sostituendo le grandezze caratteristiche dell'elettrone con quelle del neutrone, e tenendo conto che stavolta $Y_n = 1$. Pertanto si avrà:

$$\rho_c^{(n)} = 3.1 \left(\frac{M}{M_*} \right)^2 \frac{m_n}{(h/m_n c^2)^3}$$

(e M_* dovrebbe essere calcolata con m_n) e inoltre:

$$R = 0.77 \left(\frac{M_*}{M} \right)^{1/3} \alpha_G^{-1/2} \frac{h}{m_n c}$$

Possiamo dunque definire una lunghezza caratteristica anche per le stelle di neutroni:

$$\ell_{NS} = \alpha_G^{-1/2} \frac{h}{m_n c} \simeq 17 \text{ km} \simeq \frac{\ell_{WD}}{2000}$$

Per quanto riguarda la massa massima per una stella di neutroni, ripetendo gli stessi ragionamenti di prima si arriva a concludere che:

$$M_{NS}^{\max} = 3.1 M_* = 5.8 M_\odot$$

Anche se il nostro ragionamento non è qualitativamente sbagliato, ha diverse pecche in quanto abbiamo introdotto approssimazioni brutali:

- abbiamo trascurato completamente l'interazione fra nucleoni
- abbiamo ragionato in modo classico, ma gli effetti di relatività speciale sono importanti
- anche gli effetti di relatività generale sono importanti

Per capire quanto importanti siano gli effetti di relatività generale, dobbiamo analizzare la grandezza caratteristica GM/Rc^2 (se è molto minore di 1 gli effetti della relatività generale non sono rilevanti); nel nostro caso si ha:

$$\frac{GM}{Rc^2} \simeq 0.2 \left(\frac{M}{M_*} \right)^{4/3}$$

che non è molto distante da 1; pertanto gli effetti dovuti alla relatività generale sono importanti in questo caso.

Le stelle di neutroni furono inizialmente denominate *pulsar* quando vennero scoperte, in quanto sembravano emettere particelle a intervalli di tempo incredibilmente regolari. Sono dunque oggetti rotanti (ciò che vediamo come impulso è in realtà un getto di particelle espulse dal forte campo magnetico della stella), e possiamo supporre che ruotino alla massima velocità consentita per non distruggersi; quindi:

$$\frac{GM^2}{R^2} = R\omega_{\max}^2 \quad \Rightarrow \quad \tau_{\min} = \frac{2\pi}{\omega_{\max}} = 2\pi \left(\frac{R^3}{GM} \right)^{1/2} \simeq 11 \frac{M_*}{M} \alpha_G^{-1/2} \frac{h}{m_{NC} c^2} = 0.6 \frac{M_*}{M} \text{ ms}$$

Le pulsar sono meravigliosi “orologi cosmici”, sensibili alla presenza di possibili onde gravitazionali.

5.7.2 Buco nero

Cosa accade se la massa della stella è talmente grande che neanche il gas degenere di neutroni riesce a contrastare il collasso?

Facciamo un semplice conto per capire come la fisica newtoniana fallisca nella descrizione di una stella di neutroni. Consideriamo la condizione di equilibrio idrostatico:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho(r)}{r^2}$$

L'equazione equivalente in relatività generale, detta "equazione di Tolman-Oppenheimer-Volkoff" (TOV) ha la forma:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm\rho\left(1 + \frac{P}{\rho c^2}\right)\left(1 + \frac{4\pi R^3 P}{mc^2}\right)}{r^2\left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)}$$

(notiamo come nel limite newtoniano $c \rightarrow \infty$ questa si riconduca all'espressione Newtoniana).

Vediamo le differenze apportate da questa modifica supponendo $\rho(r) = \rho_0 = \text{cost.}$ e determinandone le conseguenze nei due casi:

newtoniano: integrando si ottiene:

$$P(r) = \frac{2\pi}{3}G\rho_0^2(R^2 - r^2)$$

e quindi poiché $M = 4\pi\rho_0 R^3/3$:

$$P_c = \frac{2\pi}{3}G\rho_0^2 R^2 = \left(\frac{\pi}{6}\right)^{1/3} GM^{2/3} \rho_c^{4/3}$$

relatività generale: in questo caso si ha invece:

$$P_c = \rho_0 c^3 \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}}}{3\sqrt{1 - \frac{2GM}{Rc^2}} - 1} \right)$$

Pertanto, nel caso newtoniano P_c è sempre finita per masse finite, mentre nel caso della relatività generale esiste una massa massima per la quale P_c è finita:

$$P_c < \infty \quad \iff \quad \frac{GM}{Rc^2} < \frac{4}{9}$$

(ove ovviamente il coefficiente $4/9$ dipende dal modello usato). Se dunque la massa supera questo limite nulla potrà più contrastare il collasso gravitazionale, e si andrà incontro alla formazione di un *buco nero*.

Senza entrare nel merito del ragionamento, si può dimostrare che la massa massima per una stella di neutroni è:

$$M_{\max} = \left(\frac{8\pi}{9}f\right)^{3/2} M_*$$

(ove f è il coefficiente coinvolto nella definizione dell'energia gravitazionale della stella, che dipende dal suo profilo di densità).

A massa fissata si definisce poi il *raggio di Schwarzschild*:

$$R_{SCH} = \frac{2GM}{c^2}$$

che è quello che rende la velocità di fuga uguale a c , pertanto come sappiamo nessuna particella può sfuggire all'attrazione gravitazionale di un buco nero.

Come abbiamo già detto, poi, i buchi neri non sono osservabili direttamente (perché circondati dall'orizzonte degli eventi), ma la loro esistenza è stata dimostrata dall'osservazione di effetti secondari (come l'emissione di radiazione da parte della materia in caduta verso il buco nero).