

Dal testo dell'esercizio abbiamo che i tagli sono $t_1 = 15, t_2 = 10, t_3 = 5$ e $t_4 = 1$. Sia $A[1], \dots, A[4]$ una qualsiasi soluzione ottima per un certo resto R .

Quindi $R = \sum_{i=1}^4 A_i t_i$ con $n \sum_{i=1}^4 A_i$ minimo.

Sia $R_k = \sum_{i=k+1}^4 A_i t_i$ la somma delle monete di taglio inferiore a t_k .

Se riusciamo a dimostrare che $R_k < t_k$ per ogni k allora la soluzione ottima $A[1], \dots, A[4]$ è proprio la soluzione che viene calcolata dall'algoritmo e dunque l'algoritmo calcola una soluzione ottima.

- $R_4 : R_4 = 0\text{¢} < t_4$.
- $R_3 : R_3 = A[4]\text{¢}$. Per l'ottimalità $A[4] < 5$, altrimenti potrei sostituire le 5 monete da 1¢ con 1 da 5¢. Quindi $R_3 \leq 4\text{¢} < t_3$.
- $R_2 : R_2 = A[4]\text{¢} + A[3]5\text{¢}$. Per l'ottimalità $A[3] < 2$, altrimenti potrei sostituire le 2 monete da 5¢ con 1 da 10. Quindi $R_2 \leq 5\text{¢} + 4\text{¢} < t_2$.
- $R_1 : R_1 = A[4]\text{¢} + A[3]5\text{¢} + A[2]10\text{¢}$. Per l'ottimalità $A[2] < 3$, altrimenti potrei sostituire le 3 monete da 10¢ con 1 da 15. Quindi $R_1 \leq 20\text{¢} + 5\text{¢} + 4\text{¢} < t_1$.