

Università' degli Studi di Verona

FONDAMENTI DI RELATIVITA' GENERALE E COSMOLOGIA

Claudia Daffara¹ & Sabino Matarrese²

1. Dipartimento di Informatica, Università' degli Studi di Verona
2. Dipartimento di Fisica e Astronomia G. Galilei, Università' degli Studi di Padova

GRAVITY

AN INTRODUCTION TO EINSTEIN'S
GENERAL RELATIVITY



James B. Hartle

Fisica gravitazionale

- GRAVITA'
 - Interazione fondamentale
 - Tutte le masse (Newtoniana)
 - Tutte le forme di energia (Relativistica)
 - Non è schermata
 - Lungo raggio
 - È la più debole delle 4 interazioni
 - $F_g/F_{el} (p-p) = 10^{-36}$
- L'universo è elettricamente neutro.
La gravità domina la sua struttura su grande scala
- Fisica a 2 frontiere:
 - grande scala: Newtoniana, Relativistica:
 - GM/Rc^2 significativa frazione di 1
 - Piccola scala: Gravità Quantistica
 - $L_{\text{planck}} 10^{-35} \text{ m}$ $t_{\text{planck}} 10^{-44} \text{ s}$

- Effetti relativistici importanti

$$GM/Rc^2$$

significativa frazione di 1

- Terra: 10^{-9}
 - Non relativistica
- Sole: 10^{-6}
 - Effetti relativistici orbite planetarie piccoli ma misurabili
- Stella a neutroni: 0.1
 - relativistica
- Buco nero:

$$2GM/Rc^2 > 1$$

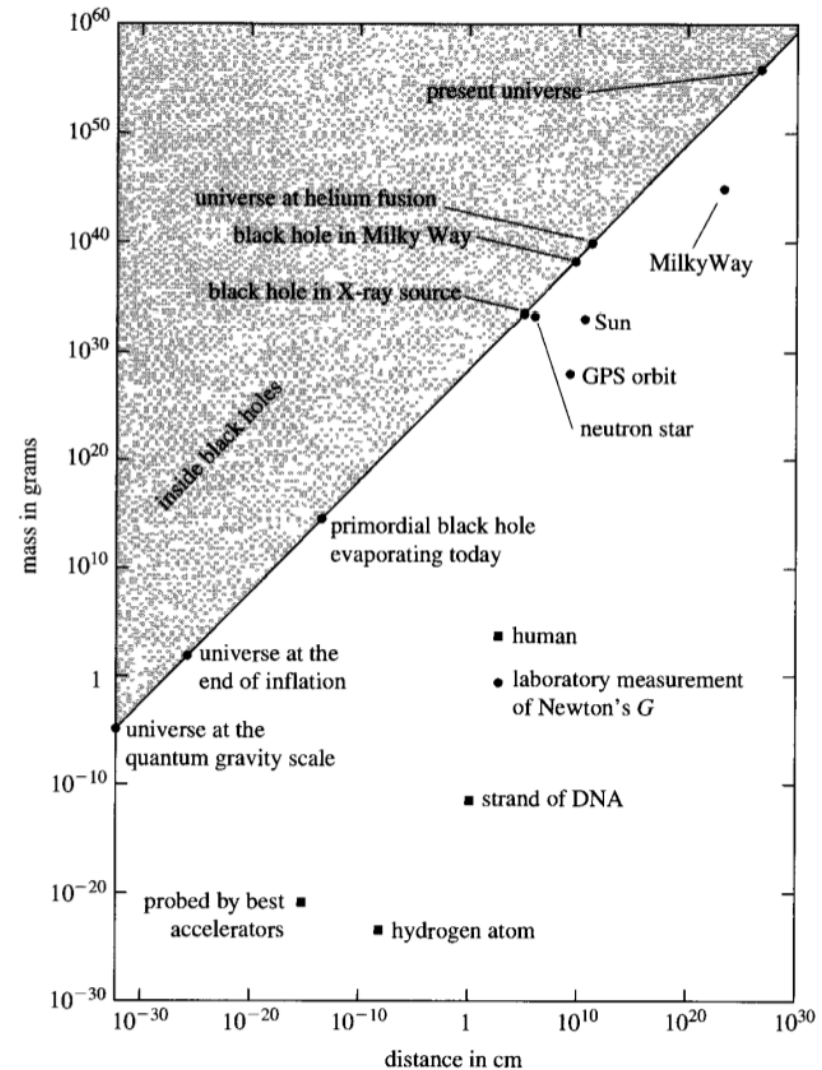


FIGURE 1.1 Gravitational physics deals with phenomena on scales of distance and mass ranging from the microscopic to the cosmic—the largest range of scales considered in contemporary physics. There are phenomena for which gravity is important over this whole range of scales that are shown on this plot of characteristic mass M vs. characteristic distance R . Representative ones are indicated by circles. Other illustrative phenomena where gravity plays little role are shown by squares. Phenomena above the diagonal line are unobservable, because they take place inside black holes. Phenomena close to the diagonal line $2GM = c^2 R$ are the ones for which relativistic gravity is important. The largest scales are the frontier of astrophysics; the smallest are those of elementary particle physics.

L'idea centrale della Relatività è che la gravità origina dalla curvatura dello spaziotempo. La gravità è geometria.

La geometria è una questione fisica

GEOMETRIA COME FISICA

La gravità è geometria

- Fatto sperimentale alla base di RG:
 - tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione in un campo gravitazionale uniforme
- L'unicità della traiettoria nello spazio e nel tempo è una proprietà speciale della gravità
- Idea di Einstein:
 - spiegare questa proprietà in termini della geometria di uno "spaziotempo" 4-dim
 - La massa curva la geometria ST localmente; in assenza di altre forze i corpi si muovono in "linea dritta" nello ST curvo

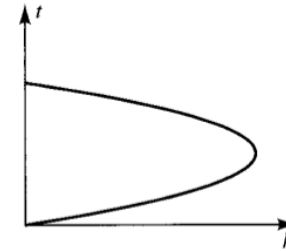
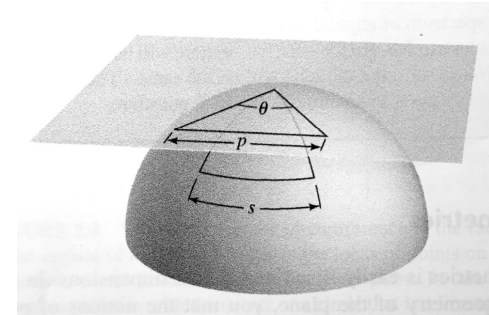


FIGURE 2.1 A ball thrown upward from the surface of the Earth with an initial speed decelerates with the acceleration of gravity, $g = 980 \text{ cm/s}^2$, reaches a maximum height, and returns to Earth. The figure shows the characteristic parabolic curve of time t vs. height h for a particular initial speed plotted with the time axis vertical as is standard in relativity. Any other body thrown upward with the same initial speed would follow the same space-time curve. In Einstein's general relativity, the bodies are following a straight path in the curved spacetime produced by the Earth's mass.

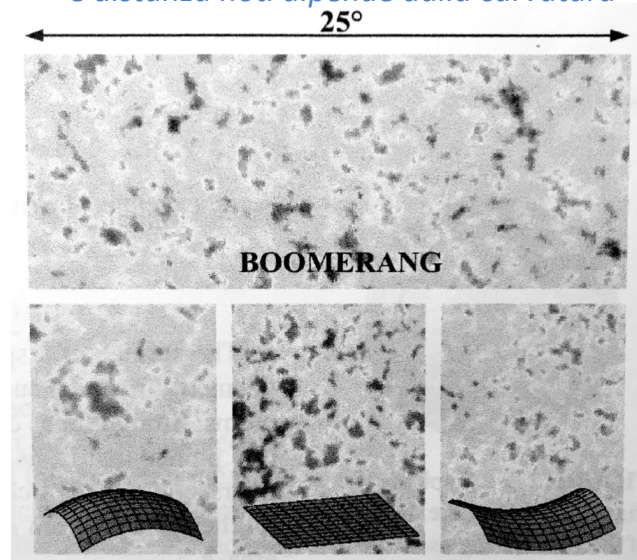
*"Spacetime tells matter how to move;
matter tells spacetime how to curve."*

La geometria è una questione fisica

- La Geometria dello spazio è una questione fisica, soggetta a misura-ipotesi-test
- Lo spazio fisico può avere geometrie diverse da quella euclidea
- Le misure di oggi determinano la curvatura dello spazio su scale di distanze dell'universo visibile
 - RG + osservazioni fissano 3 geometrie possibili a curvatura positiva, nulla, negativa



angolo sotteso da un oggetto di dimensione e distanza noti dipende dalla curvatura



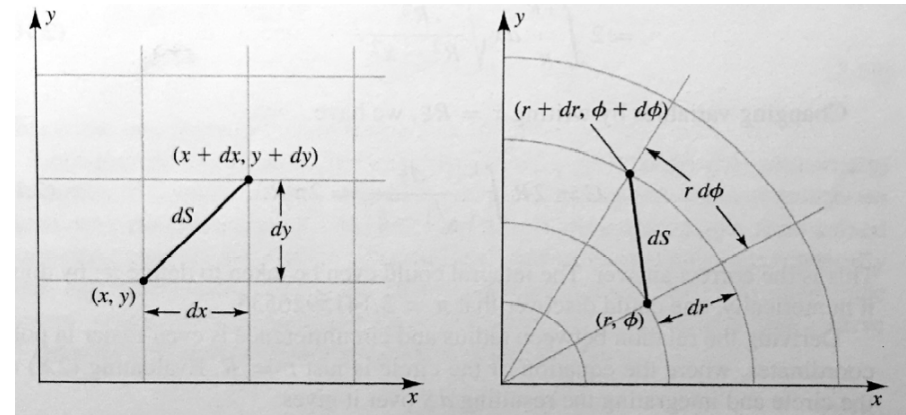
Dalla misura delle anisotropie CMB, note dalla teoria, otteniamo la curvatura dell'universo

Specificare la geometria

- Serve una descrizione intrinseca basata su dimensioni fisiche misurabili
 - Sistema di coordinate
 - Elemento di linea: distanza tra punti vicini

$$dS^2 = dx^2 + dy^2$$

- dS è una **quantità invariante**, indipendente dal sistema di coordinate



In Cartesian coordinates (x, y) , the distance dS between the points (x, y) and $(x + dx, y + dy)$ is (see Figure 2.5)

$$dS = [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2}. \quad (2.7)$$

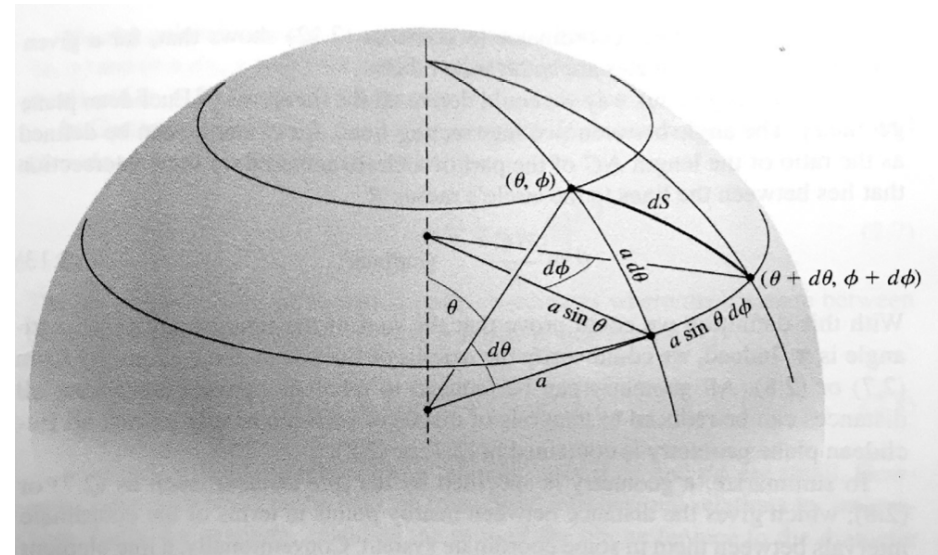
The same rule can be expressed in polar coordinates where the distance between the nearby points (r, ϕ) and $(r + dr, \phi + d\phi)$ is (see Figure 2.5)

$$dS = [(dr)^2 + (r d\phi)^2]^{1/2}. \quad (2.8)$$

*la forma varia con le coordinate,
ma la geometria rimane la stessa*

Specificare la geometria

- Geometria non-euclidea
 - superficie sferica 2D



$$dS^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Geometria dello spazio e nozione del tempo in meccanica newtoniana
negli aspetti che porteranno alla Relatività Speciale

SPAZIO, TEMPO, GRAVITA' IN FISICA NEWTONIANA (COME BASE PER LA RS)

Sistemi inerziali

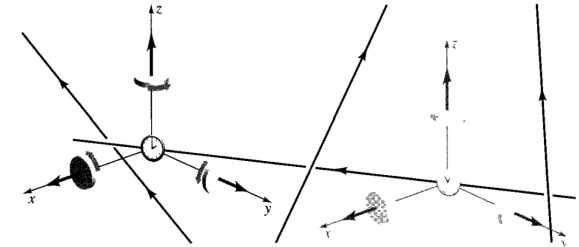
- La meccanica newtoniana assume una geometria dello spazio e una nozione di tempo particolari

*1° legge ...una particella libera viaggia a **V** cost (tempo?) in linea retta (geometria?)*

– **spazio piatto euclideo** $dS^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

- Le leggi sono formulate in **sistemi inerziali**

- 1) Scelgo l'origine su una particella libera
- 2) scelgo 3 assi cartesiani ortogonali
- 3) propago gli assi paralleli a se stessi come la particella si muove in linea retta



- L'osservatore nel sistema inerziale scopre un **parametro tempo t** rispetto al quale le posizioni di tutte le particelle libere variano con incremento costante
 - Usando le leggi della meccanica costruisce l'orologio che misura t

Sistemi inerziali

- Sistemi inerziali differiscono per **rotazione, traslazione, moto uniforme**

$x \rightarrow x'$ (... coordinate diverse dello stesso spazio)

$t \rightarrow t'$ (... ?)

- *L'osservatore Oxyz' costruisce lo stesso tempo dalla 1° legge?
2 eventi simultanei per Oxyz lo sono anche per Oxyz'?*

- **ASSUNZIONE della Meccanica Newtoniana**

- La nozione di tempo è unica per tutti gli osservatori inerziali

$$t = t'$$

- **La nozione di tempo assoluto viene abbandonata in Relatività**
dove il tempo si trasforma da un sistema inerziale a un altro

Principio di relatività

- “Esperimenti identici eseguiti in diversi sistemi inerziali danno risultati *identici*”
 - Le leggi sono invarianti nella forma per trasformazioni galileiane
 - Posso determinare se il mio LAB è inerziale, verificando la 1° legge, ma in nessun modo posso dire quale degli infiniti sistemi inerziali rappresenta
Non c'è nozione di spostamento, rotazione, velocità assoluta
- L'invarianza delle leggi dipende dalle **simmetrie dello spazio euclideo**
 - l'elemento di linea ha forma invariante per rotazioni, traslazioni, moto uniforme

Gravità Newtoniana

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -\frac{GmM}{r^2}\vec{e}_r.$$

Legge di Newton

$$\vec{F}_{\text{grav}} = -m\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}_B),$$

$$\Phi(\vec{x}) = -\frac{GM}{r} \equiv -\frac{GM}{|\vec{x} - \vec{x}_A|}, \quad \Phi(\vec{x}) = -\int d^3x' \frac{G\mu(\vec{x}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|}.$$

Potenziale grav

$$\vec{g}(\vec{x}) \equiv -\vec{\nabla}\Phi(\vec{x}),$$

Campo grav

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{x}) = -4\pi G\mu(\vec{x}),$$

$$\nabla^2\Phi(\vec{x}) = 4\pi G\mu(\vec{x}).$$

Equazioni di campo

m inerziale e m gravitazionale

$$m_I = m_G$$

- Tutti i corpi cadono con la stessa accelerazione in un campo gravitazionale, indipendentemente dalla loro massa
- L'equivalenza della massa gravitazionale e inerziale, è un fatto sperimentale isolato e inspiegabile nella fisica newtoniana
- E' alla base della Relatività Generale

$$\vec{F} = m\vec{a},$$

$$m\vec{a} = -m\vec{\nabla}\Phi$$

$$\vec{a} = -\vec{\nabla}\Phi.$$

Principio variazionale – Meccanica Newtoniana

- In Meccanica Newtoniana le leggi possono essere formulate in termini di un principio variazionale
- In Relatività Generale le leggi del moto in spazi curvi si formulano dall'estensione di questo principio
- **“una particella si muove tra un punto e l'altro nello spazio in modo da rendere stazionaria (minima) l'azione”**

$$S[x(t)] = \int_{t_A}^{t_B} dt L(\dot{x}(t), x(t)).$$

$$L(\dot{x}, x) = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x),$$

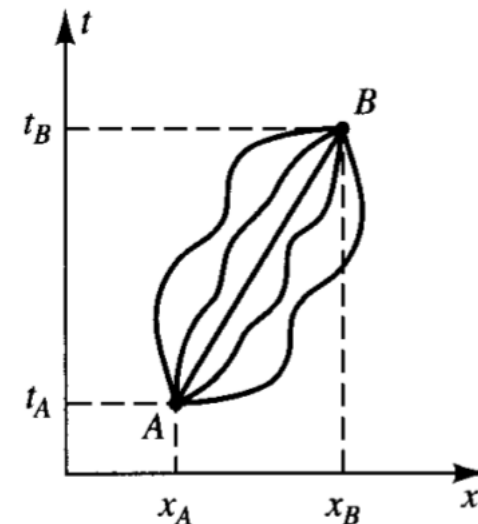


FIGURE 3.7 Many different paths between a position x_A at time t_A and a position x_B at time t_B can be described, but a particle moves on the one obeying Newton's law of motion. That path extremizes the action.

La teoria della RS richiede una profonda revisione dei concetti di ST della fisica Newtoniana

RELATIVITA' SPECIALE

(COME BASE PER LA RG)

Evidenza sperimentale: Michelson Morley

- Le equazioni di Maxwell prevedono che la luce viaggi con $v=c$, con parametro c esplicito nelle equazioni
- Incompatibili con il principio di Relatività, per la regola di composizione newtoniana delle velocità
 $V' = V - v$
- L'esperimento di Michelson Morley (1887) mostrò che per la luce non vale la regola di composizione delle velocità

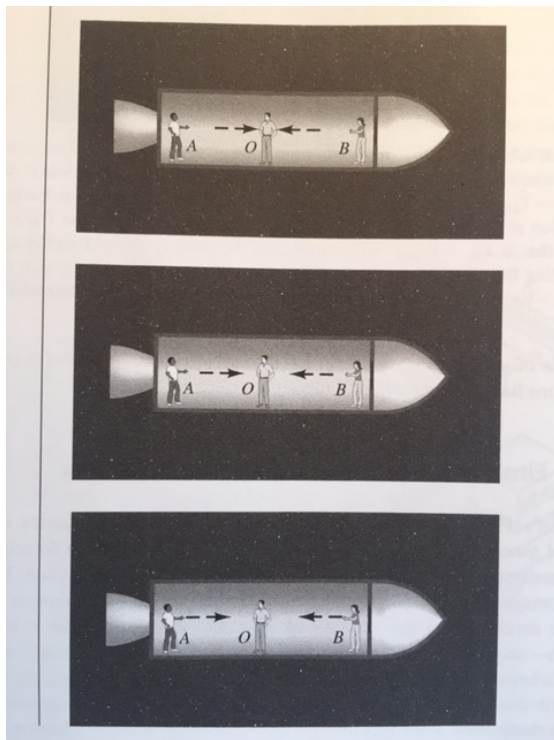
O è sbagliata la meccanica Newtoniana o sono sbagliate le equazioni di Maxwell...

La soluzione della Relatività speciale

- Il principio di relatività è assunto valido anche per l'elettromagnetismo
- Velocità della luce è costante ($\mathbf{v} = \mathbf{c}$) in tutti i sistemi inerziali
- Nuova connessione tra i sistemi inerziali, consistente con ($\mathbf{v} = \mathbf{c}$) - non valgono più le trasformazioni di Galileo
- L'assunzione ($\mathbf{v}_{\text{luce}} = \mathbf{c}$) richiede una revisione dei concetti di Spazio e Tempo Newtoniani – cade il concetto di tempo assoluto

Cade la simultaneità

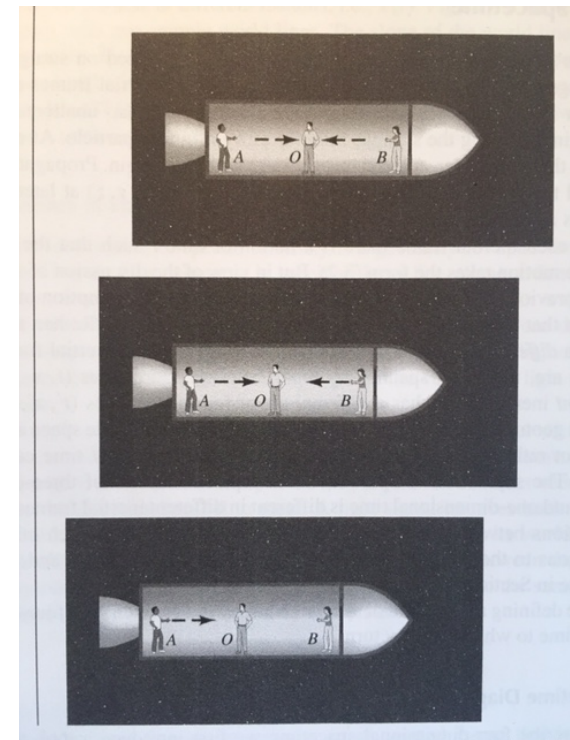
- 2 eventi simultanei in un sistema di riferimento inerziale non lo sono più in un altro



Sistema a riposo. A e B percorrono la stessa distanza → sono emessi simultaneamente

L'osservatore O riceve i segnali da A e B simultaneamente. Quale segnale è stato emesso prima?

V luce costante



Sistema in moto a velocità V . Per l'osservatore O, A percorre una distanza maggiore → è stato emesso prima

Lo Spaziotempo

- **Sistemi inerziali**

La costruzione dei sistemi inerziali in relatività è la stessa ,
la 1° legge di Newton è valida in relatività

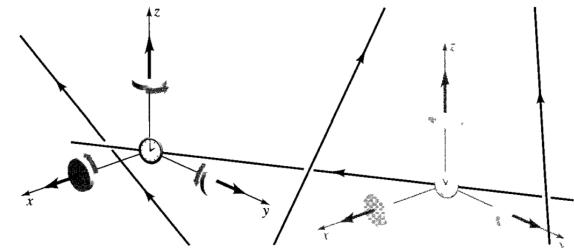
- Esiste la **nozione di tempo** calcolato dal moto delle particelle libere

- **NON c'è nessuna ragione fisica perché il tempo sia lo stesso in tutti i sistemi inerziali**

- $(t, x, y, z) \rightarrow (t', x', y', z')$

la geometria per i fenomeni fisici è **4-dim**

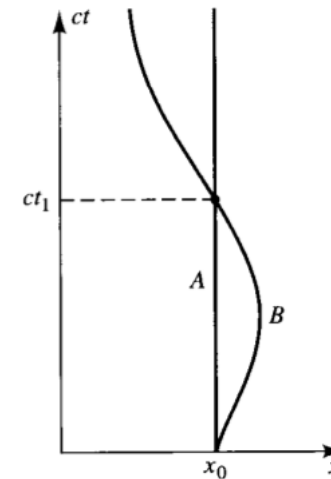
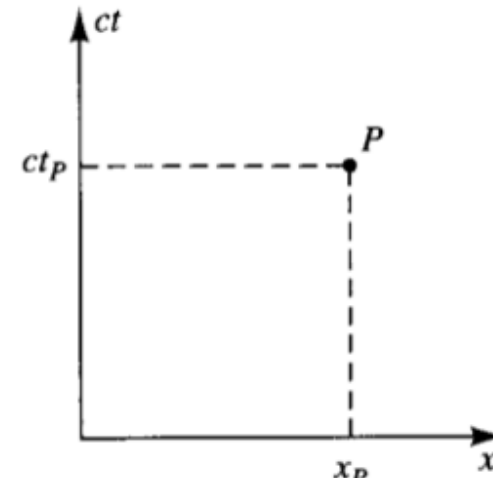
la separazione **(3dim + tempo)** è diversa nei diversi sistemi inerziali



- Le trasformazioni tra sistemi inerziali non sono più quelle di Galileo, ma le rotazioni, le traslazioni, il moto uniforme nello spaziotempo 4D (**trasformazioni di Lorentz**)

Lo Spaziotempo

- Diagrammi spaziotempo
 - sezione (ct, x) dello ST
 - Una particella (evento) descrive una curva “linea universo” $x(t)$
 - Slope: $d(ct)/dx = c/v$
- Raggi di luce si muovono sulla linea universo 45° nello ST



La geometria dello Spaziotempo

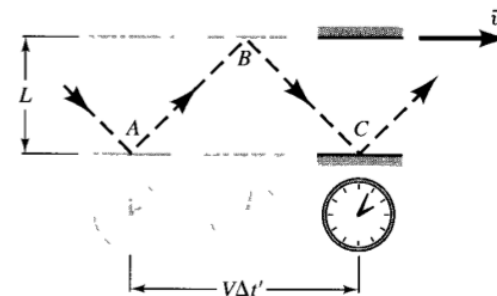
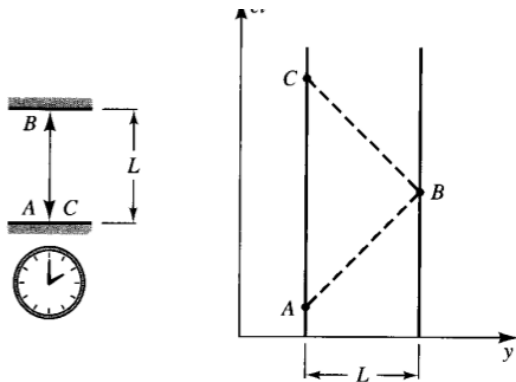
- È definita dall'elemento di linea ds
- Esperimento simulato per motivare la forma di ds in relazione a $v=c$ costante

2 specchi su cui si riflette un segnale. Un sistema è a riposo, l'altro in moto con velocità V verso y negative.
Gli orologi misurano il tempo tra l'evento A (partenza segnale) e C (ritorno)

$$\Delta t = 2L/c,$$

$$\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$$

$$\Delta t' = \frac{2}{c} \sqrt{L^2 + \left(\frac{\Delta x'}{2}\right)^2}, \quad \Delta x' = V \Delta t', \quad \Delta y' = 0, \quad \Delta z' = 0.$$



Si verifica l'identità...



$$-(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 = -4[L^2 + (\Delta x'/2)^2] + (\Delta x')^2 = -4L^2 = -(c\Delta t)^2.$$

La geometria dello Spaziotempo

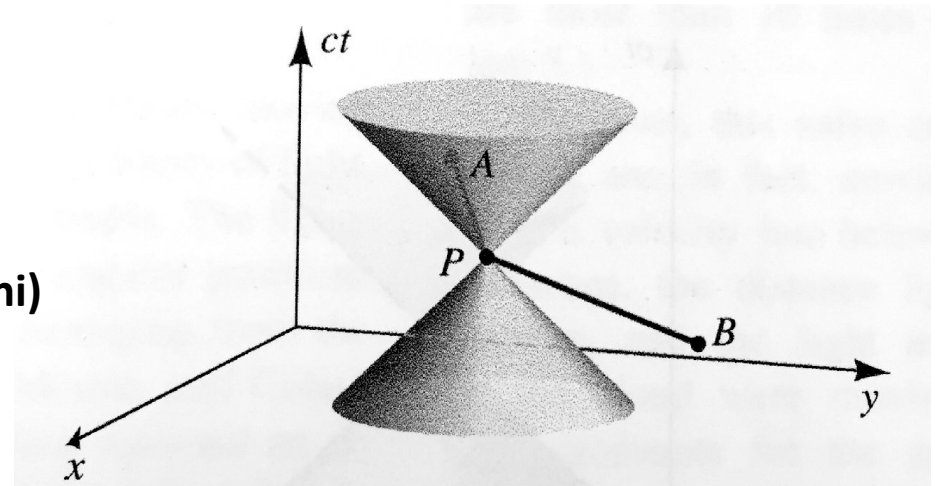
$$ds^2 = -(c dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

- Elemento di linea dello **spaziotempo piatto non-euclideo** $(-,+,+,+)$
- **Invariante** - definisce la geometria dello ST fisico ed è il punto di partenza per sviluppare la teoria della RS
- Richiedendo l'invarianza di ds^2 ricaviamo le **trasformate di lorentz** tra sistemi inerziali

La geometria dello Spaziotempo

$$ds^2 = -(c dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

- **Intervallo tra due eventi**
 - > 0 “spazio”
 - = 0 “luce”
 - < 0 “tempo”
- **Cono di luce di P:**
eventi con distanza nulla
 - non dipende dalle coordinate
 - Linee universo di particelle **massa m sono di tipo tempo, (interni)**
 - Definisce la **causalità**



La metrica dello Spaziotempo

$$ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta.$$

- Metrica dello spaziotempo
 - le componenti sono calcolate nel particolare sistema di coordinate

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Tempo proprio

$$d\tau^2 \equiv -ds^2/c^2.$$

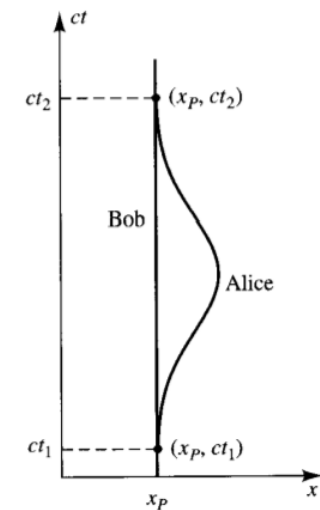
- tempo misurato da un orologio in moto lungo la curva di tipo tempo
- Fondamentale per la RG
- Dal tempo proprio si formula il principio variazionale che descrive i moti

• DILATAZIONE TEMPORALE

- Il tempo proprio dell'osservatore in moto è sempre minore del tempo di coordinata (osservatore fermo)

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B \left[dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2)/c^2 \right]^{1/2}$$

$$\tau_{AB} = \int_{t_A}^{t_B} dt' \left[1 - \vec{V}^2(t')/c^2 \right]^{1/2}$$



Trasformazioni di Lorentz

- I sistemi inerziali differiscono per
 - Rotazione/Traslazione/Moto uniforme
 - Le trasformazioni che preservano l'elemento di linea sono le trasformazioni di Lorentz (rotazioni dello ST)

$$t' = \gamma(t - vx/c^2),$$

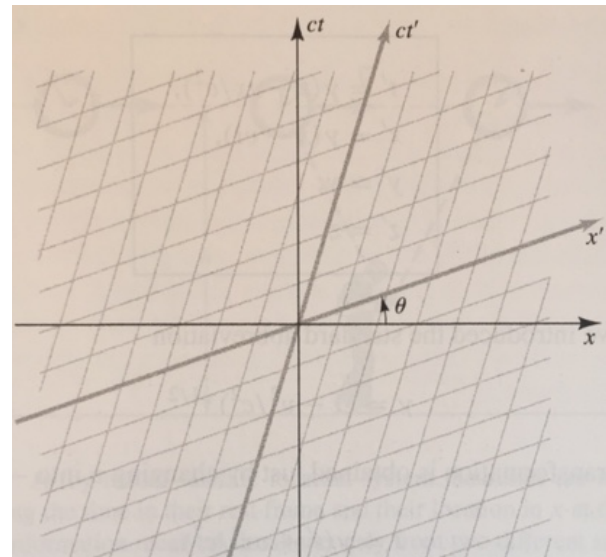
$$x' = \gamma(x - vt),$$

$$y' = y,$$

$$z' = z,$$

si verifica... $V=C=V'$

$$V^{x'} = \frac{c - v}{1 - v/c} = c.$$

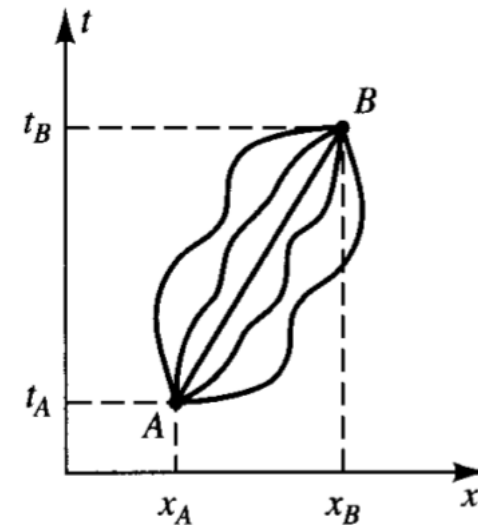


...relatività della simultaneità

Principio variazionale – Relatività Speciale

- In Relatività Speciale la legge del moto della **particella libera** si può riassumere nel principio variazionale
- Il principio verrà naturalmente esteso alle “**particelle in caduta libera**” negli spazi curvi della RG
- “la linea universo di una **PARTICELLA LIBERA** tra due eventi separati da un intervallo di tipo tempo rende stazionario il tempo proprio”

$$\tau_{AB} = \int_A^B d\tau = \int_A^B [dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2]^{1/2}.$$



$$x^\alpha = x^\alpha(\tau).$$

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} = 0.$$