

* ulteriori assiommi di separazione

Elementi di Topologia

Prof. M. Spina

aa 2008/09

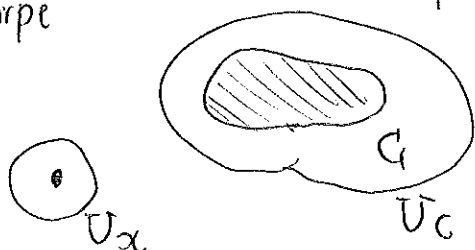
Lezione VIII - I

Materiali ridondante rispetto a quanto svolto

[! ci sono discrepanze in letteratura su alcune def]

$T_3 = \text{regolare}$
(S.T.)

Singer-Thorpe



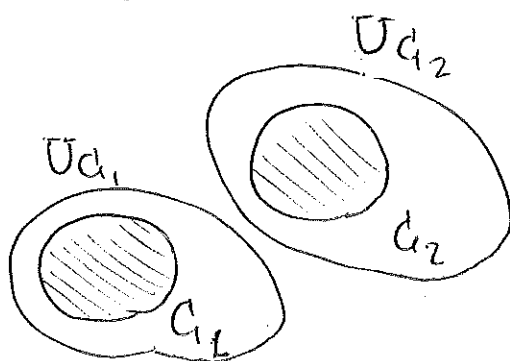
$T_1 + R$: dati $x \in X$,
 C chiuso, $C \neq x$,
 $\exists U_x \ni x$,
 $U_C \supset C$ aperto
 Disgiunti ($U_x \cap U_C = \emptyset$)

in altri libri: $\text{regolare} \equiv R$
(W)

$T_3 = R + T_1$

con la 1^a def. $T_3 \Rightarrow T_2 (\Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0)$

$T_4 = \text{normale}$
(S.T.)



$T_1 + N$: dati C_1, C_2
 chiusi disgiunti ($C_1 \cap C_2 = \emptyset$),
 $\exists U_{C_i} \supset C_i$ aperti e
 disgiunti $U_{C_1} \cap U_{C_2} = \emptyset$

oppure $\text{normale} \equiv N$

e $T_4 = T_1 + N$

con la 1^a def
VIII-1

$T_4 \Rightarrow T_3 (\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0)$



$$T_2 \not\Rightarrow T_3$$

controesempio:

* primo di Moore

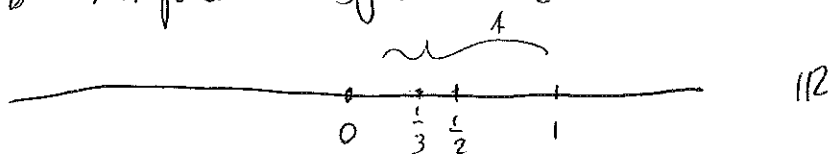
$$T_3 \not\Rightarrow T_4$$

controesempio

* primo di Niemycki

v. oltre

Altro esempio di spazio T_2 ma non T_3



$$A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n=1,2,\dots \right\}$$

intorni di $x \neq 0$: "isolati"

intorni di $x=0$: $U \setminus A$
"aperti"

$\mathbb{R}$, con questa nuova topologia, è T_2

ma non T_3 : infatti A è chiuso, e non può essere separato da 0 .

[Nota ci sono anche nozioni	$T_{2\frac{1}{2}}$	"completamente di Hausdorff"
	$T_{3\frac{1}{2}}$	Tychonov (completamente regolare)
	T_5	completamente normale

Per gli spazi normali (i.e. per noi i T_4)

* Si ha: $T_4 \times T_4$ non è nec. T_4 !!

[es: il prodotto di due copie di Sorgenfrey]

Ma vale il lemma di Urysohn

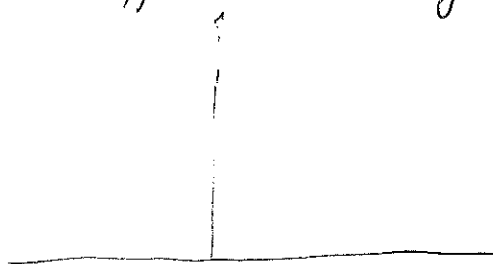
★ Esempio di spazio T_2 ma non T_3

Piano di Moore

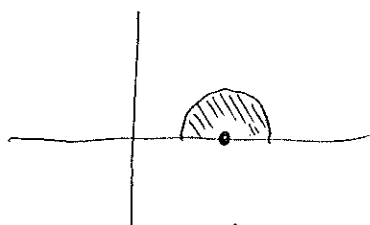
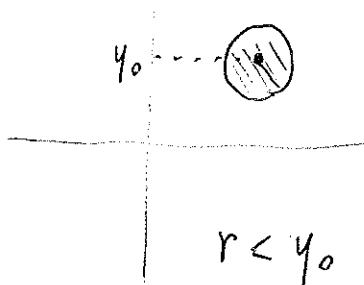
Hausdorff

regolare

$$X : \{ y \neq 0 \}$$



83 base per una nuova topologia τ



semidisco "aperto",
+ il punto

τ è T_2 (chiaro...) ★ $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ —
è chiuso.

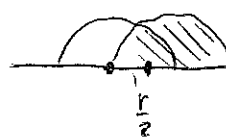
τ non è T_3 :

$\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ e 0 non possono essere separati
da insiemi aperti : se $U \ni \{0\}$ dove
aperto

Contenere
in qualche



ma



interseca U

★ Teorema . uno spazio compatto di
Hausdorff è T_4

$\left[\begin{array}{l} \text{Caveat:} \\ \text{Willard:} \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Singer-Thorpe:} \\ \text{normale} \end{array} \left. \begin{array}{l} \text{normale} \equiv T_4 \\ \text{normale} + T_1 = T_4 \end{array} \right]$
 $T_1 \text{ incorporata}$

con entrambe le convezioni l'enunciato è ok

$\left[X \text{ Lindelöf} : \text{ogni ricoprimento di } X \right.$
ammette un sottoricoprimento
numerabile

$X \text{ compatto} \Rightarrow X \text{ Lindelöf}$

Dim. Sia $A \subset X$ chiuso, $x \notin A$.
(=> compatto...)

$\forall a \in A$, siano $\bar{U}_a \ni x$, $\bar{V}_a \ni a$, $\bar{U}_a \cap \bar{V}_a = \emptyset$

$[X \text{ è } T_2]$. $A \subset \bigcup_{a \in A} \bar{V}_a \Rightarrow$, per compattezza,

$A \subset \bigcup_{i \in I} \bar{V}_{a_i}$ Siano $V = \bigcup_i V_{a_i}$ e $U = \bigcap_{i=1}^n \bar{U}_{a_i}$

Allora $\bar{U} \ni x$, $\bar{V} \ni a$ e $U \cap V = \emptyset$
 $\nwarrow \text{aperti} \nearrow$

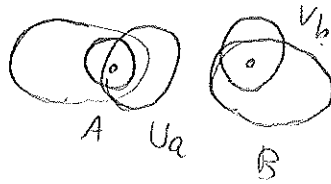
Dimostrate che X è regolare

$\left[\begin{array}{l} \text{Caveat: S.T. } T_3 \equiv \text{regolare} \\ \text{(} T_1 \text{ incorporata)} \\ \bar{W}: T_3 = \text{regolare} + T_1 \end{array} \right]$

Ma regolare + Lindelöf $\Rightarrow$ normale

Siamo infatti $A, B \subset X$ chiusi e disgiunti.
 $\forall a \in A$, sia $U_a \ni a$ con $\overline{U_a} \cap B = \emptyset$

Si costruisce $\bar{V}_b$ in modo analogo



ora, poiché X è Lindelöf,

$$A \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots$$

$$B \subset V_1 \cup V_2 \cup \dots$$

$\uparrow$ numerabili...

Siamo ora

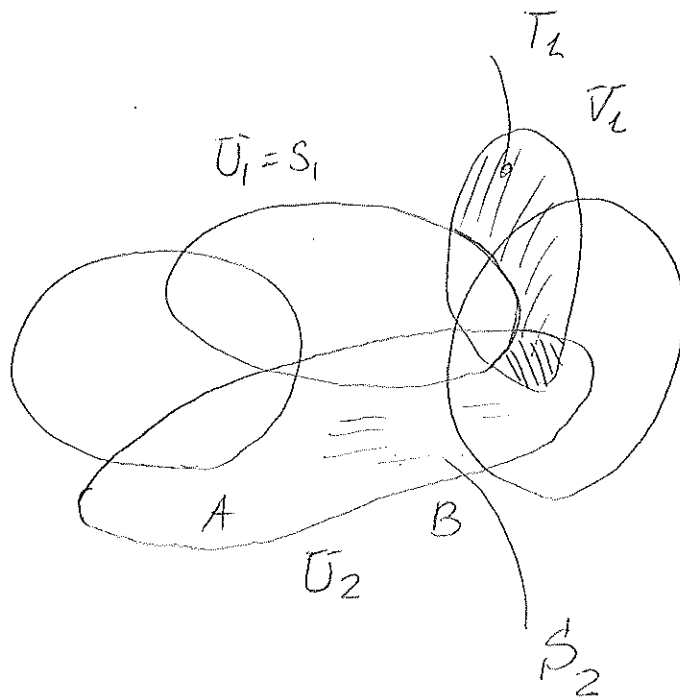
$$S_1 = \bar{U}_1 \quad T_1 = \bar{V} - \bar{S}_1 \quad S_1 \cap T_1 = \emptyset$$

$$S_2 = U_2 - \bar{T}_1 \quad T_2 = \bar{V}_2 - \overline{(S_1 \cup S_2)}$$

$$S_3 = U_3 - \overline{(T_1 \cup T_2)} \quad T_3 = \bar{V}_3 - \overline{(S_1 \cup S_2 \cup S_3)}$$

$$\Rightarrow S = \bigcup_n S_n \quad T = \bigcup_n T_n \quad \text{sono} \\ \text{aperti e} \\ \text{disgiunti}$$

e separano A e B



Dato che X è Hausdorff ($\Rightarrow T_1$)

l'asserto segue D

★ Teorema

Ogni spazio metrizzabile X
è normale (T_4)

Dim. X è T_1 , essendo T_2 .

Siano F_1, F_2 chiusi disgiunti di X , troviamo

$U_i \supset F_i$ aperti disgiunti [supponiamo
incontrari
non vuoi]

Definiamo: $d_F : X \rightarrow \mathbb{R}$ così:
 $\cap_X (F \neq \emptyset)$

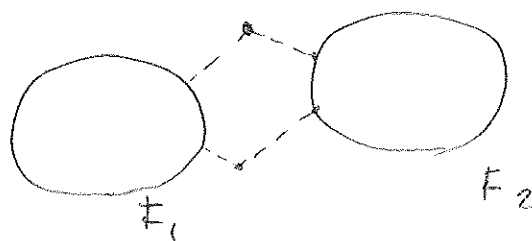
$$d_F(x) = \inf_{y \in F} \{d(x, y)\} \quad d: \text{distanza che induce la topologia di } X$$

$$U_1 := \{x \in X \mid d_{F_1}(x) - d_{F_2}(x) < 0\}$$

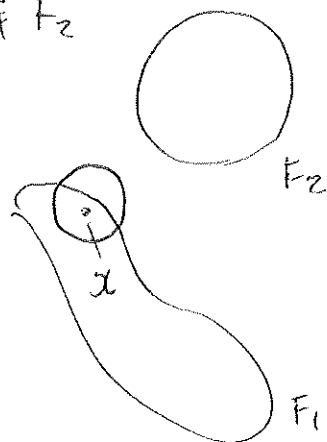
$$U_2 := \{x \in X \mid d_{F_1}(x) - d_{F_2}(x) > 0\}$$

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

$$\forall x \in F_1 \quad d_{F_1}(x) = 0$$



$$x \notin F_2$$



Dal fatto che F_2 è chiuso si
vince facilmente che

$$d_{F_2}(x) > 0 \Rightarrow x \in U_1$$

Pertanto $F_1 \subset U_1$
(e anche $F_2 \subset U_2$)

* Mostriamo che U_1 (e analog. U_2) è aperto.
 Ciò basterà per concludere.

Sia $x_1 \in U_1$, e $r := d_{F_2}(x_1) - d_{F_1}(x_1) > 0$

Facciamo vedere che $B_{r/3}(x_1) \subset U_1$.

Sia $x \in B_{r/3}(x_1)$. Si ha

$$\begin{aligned} \underbrace{d_{F_1}(x) - d_{F_2}(x)} &= \left[d_{F_1}(x) - d_{F_1}(x_1) \right] + \left[d_{F_1}(x_1) - d_{F_2}(x_1) \right] \\ &\quad + \left[d_{F_2}(x_1) - d_{F_2}(x) \right] \\ &= \underbrace{\left[d_{F_1}(x) - d_{F_1}(x_1) \right]}_{\leftarrow \text{Stimiamo} \rightarrow} = r + \underbrace{\left[d_{F_2}(x_1) - d_{F_2}(x) \right]}_{\leftarrow \text{Stimiamo} \rightarrow} \end{aligned}$$

Se $y \in F_1$, i

$$d(x, y) \leq d(x, x_1) + d(x_1, y) < \frac{r}{3} + d(x_1, y)$$

$$\Rightarrow d_{F_1}(x) \leq \frac{r}{3} + d_{F_1}(x_1) \Rightarrow \boxed{d_{F_1}(x) - d_{F_1}(x_1) \leq \frac{r}{3}}$$

Se $y \in F_2$ i

$$d(x_1, y) \leq d(x_1, x) + d(x, y) < \frac{r}{3} + d(x, y)$$

$$\Rightarrow d_{F_2}(x_1) \leq \frac{r}{3} + d_{F_2}(x) \Rightarrow$$

$$\boxed{d_{F_2}(x_1) - d_{F_2}(x) \leq \frac{r}{3}}$$

$$\Rightarrow d_{F_1}(x) - d_{F_2}(x) \leq \frac{2}{3}r - r = -\frac{1}{3}r < 0 \quad \square$$

Lemma

★ Sia X separabile, e $\mathcal{S} \subset X$ discreto,
 [ammette un sottoinsieme denso numerabile]
 non numerabile. Allora X non è normale

Dim. Sia $D \subset X$ numerabile e denso in X .
 p.a. sia X normale.

$\mathcal{S}$ è discreto $\Rightarrow$ è chiuso e così ogni $A \in \mathcal{S}$
 $\forall A \in \mathcal{S} \exists U(A), U(S \setminus A)$ in X , aperti,
 tali che $U(A) \cap U(S \setminus A) = \emptyset$.

Ora $U(A) \cap D \neq \emptyset \quad \forall A \in \mathcal{S}$ (D è denso).

Siano $A, B \in \mathcal{S}, A \neq B$ (e non vuoti)

Mostriamo che $U(A) \cap D \neq U(B) \cap D$

Sia $A \setminus B \neq \emptyset$

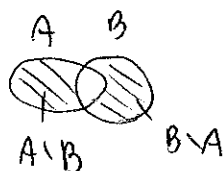
Da $U(B) \cap U(S \setminus B) = \emptyset$ segue pure

$$U(B) \cap U(S \setminus B) \cap D = \emptyset$$

Ma $U(A) \cap U(S \setminus B) \cap D \neq \emptyset$: infatti

$U(A) \cap U(S \setminus B)$ è intorno aperto di $A \setminus B$
 e dunque non vuoto $\Rightarrow U(A) \cap U(S \setminus B) \cap D \neq \emptyset$.

Analogo ragionamento se $B \setminus A \neq \emptyset$



Costruiamo l'applicazione

$$P(S) \rightarrow P(D)$$

$$A \mapsto U(A) \cap D \quad A \in S, A \neq \emptyset$$

$$S \mapsto D$$

$$\emptyset \mapsto \emptyset$$

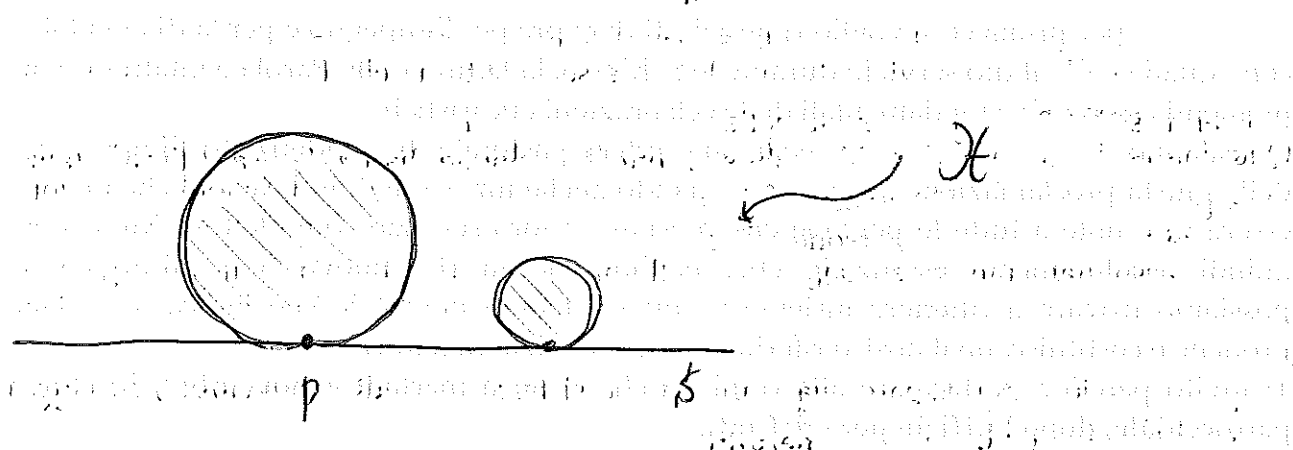
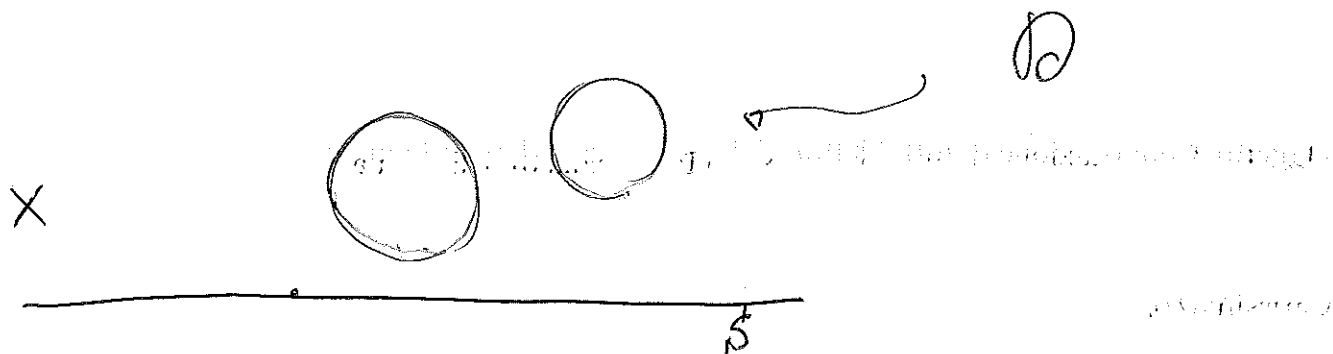
Essa è iniettiva per quanto visto sopra.

Ma ciò è assurdo, $\therefore \text{card } P(S) > \text{card } P(D)$
 $2^{\aleph_0}$

Di conseguenza X non è normale $[S-T; T_4]$

★ Esempio di spazio regolare ma non normale
 (S-T: T_3) normale
 (S-T: T_4)
 $\mathbb{R}^2$

Niemitzki



$$H = \left\{ \bigcup_{p \in S} D \mid p \in S, D \text{ tangente a } S \text{ in } p \right\}$$

$D \cup H$ è base per una topologia τ su X

S è chiuso in (X, τ) e $\tau|_{X \setminus S} = \text{top euclidea}$

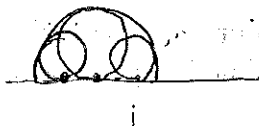
$\tau|_S = \text{top. discreta}$

$\mathbb{Q}^2 \cap X$ è denso $\Rightarrow X$ è separabile.

X non è normale (S non è numerabile)

Ma X è regolare: τ è T_1 (i punti
sono nella top. euclidea, che lo è)

Siamo $F \subset X$ chiuso

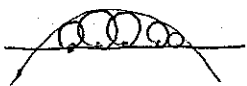


$p \in X \setminus F$



Se $p \in S$, sia $D_r(p) \cap S = \emptyset$

$D_r(p) \cap (X \setminus S) \cap F = \emptyset$



per punto $D_r(p) \cap F = \emptyset$

$\Rightarrow A := D_{\frac{r}{2}}(p)$, $B = X \setminus \overline{D_{\frac{r}{2}}(p)}$

sono aperti disgiunti d.c. $p \in A$, $F \subset B$

Se poi $p \in S$, dato che F è chiuso $\exists D(p)$ (aperto)

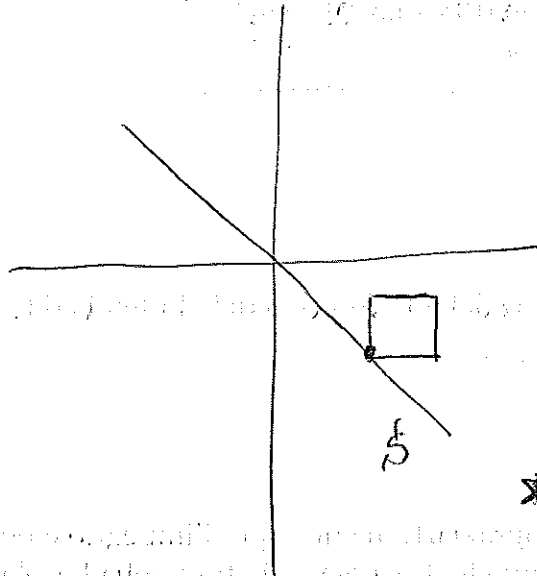
tale che $D(p) \cap F = \emptyset$. Sia $D_1(p) \in \mathcal{K}$

con $D_1 \subset D$. Allora $A = D_1(p)$

$B = X \setminus \overline{D_1(p)}$

sono disgiunti e $p \in A$, $F \subset B$ $\square$

*** Il prodotto topologico di spazi normali non è in generale normale!



$(\mathbb{R}, J_d)$
 $\uparrow$
 (a,b) int. aperti a destra (chiusi a sinistra)

*** Retta di Sorgenfrey

$\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^2$ è denso e numerabile

$S = \{x+y=0\}$ è non numerabile, e per

di qui la topologia indotta è quella discreta.

Punto $(\mathbb{R}^2, J_d \times J_d)$

top. prodotto

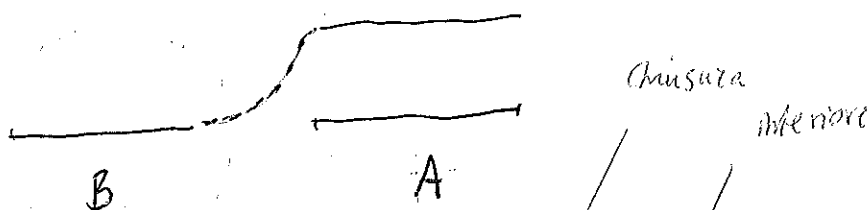
NON è normale.

*** Lemma di Urysohn

Sia X sp. topologico normale (T_4)

[insiemi chiusi disgiunti possono essere separati con aperti disgiunti]

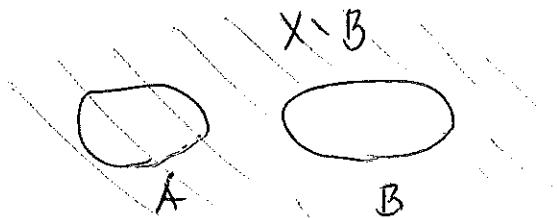
Allova $\forall A, B$ chiusi $A \cap B = \emptyset$,
 $\exists f \in C_{\mathbb{R}}(X)$ con $f|_A = 1$
 $f|_B = 0$



Dim
 [Jänich p. 120]

Sia $A = A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_r \subset X \setminus B$
 tale che $\overline{A_{i-1}} \subset A_i \quad \forall i$

Si può fare? Sì: partiamo da $A_0 = A \subset A_1 = X \setminus B$
 (importante)

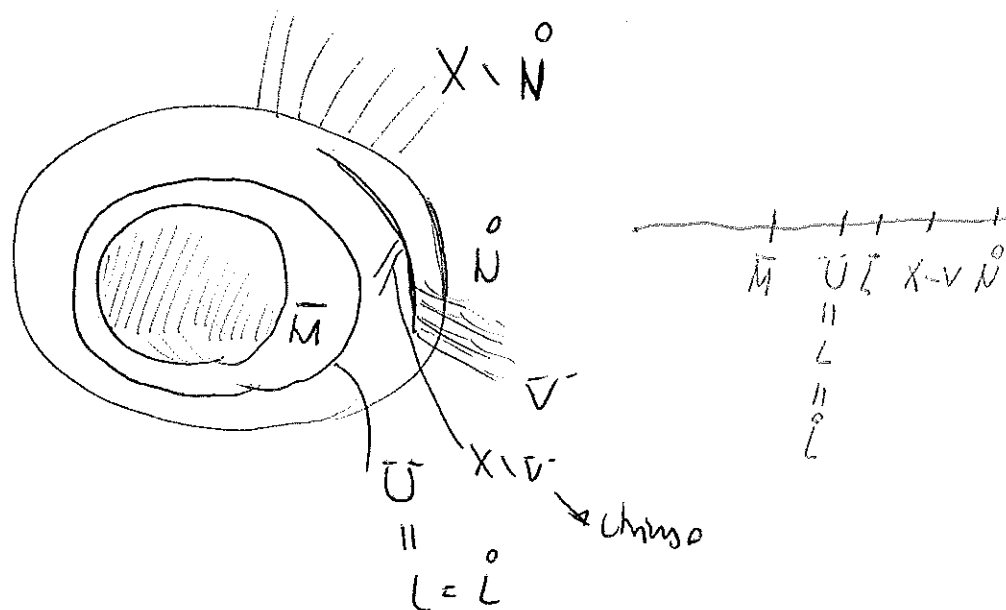


* Siano $M, N \quad \overline{M} \subset \overset{\circ}{N} : \exists L, \overline{M} \subset \overset{\circ}{L} \subset \overline{L} \subset \overset{\circ}{N}$

Si separano $\overline{M}$ e $\overset{\circ}{N}$ con U, V aperti
 $\overline{M} \subset U \quad \overset{\circ}{N} \subset V$
 $U \cap V = \emptyset$

e si pone $L = U : \overline{L} = \overline{U}$

$\overline{V} \supset X \setminus \overset{\circ}{N} \Rightarrow \overset{\circ}{N} \supset X \setminus \overline{V}$



$$\Rightarrow \bar{M} \subset L = \bar{L}^0 \subset \bar{L} \subset X \setminus \bar{V} \subset N^0$$

il procedimento si può iterare.

$$A_{-1} = \emptyset$$

si pone poi

$$f: X \rightarrow [0, 1]$$

"foramento"
 $r = 2^n$

$$f|_A \equiv 1$$

$$f|_{A_k \setminus A_{k-1}} = 1 - \frac{r}{2^n}$$



$$f|_{X \setminus A_r} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \bigcup & \bigcup & \bigcup \\ A_{k-1} & A_k & A_{k+1} \\ \bar{A}_{k+1} & \bar{A}_k & \text{giorno} \end{array}$$

una "catena ammissibile" può essere raffinata

$$U_0 : (A, X \setminus B)$$

$$A_0, A'_1, A_1, \dots, A'_R, A_R$$

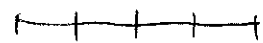
$$U_n$$

$$U_{n+1} \text{ raff. di } U_n$$

(f_n) è mon. crescente punto per punto

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n \text{ esiste} \quad e \quad f(x) = \begin{cases} 0 & x \in B \\ 1 & x \in A \end{cases}$$

Dimostriamo la continuità



$$r = 2^{-n}$$

$$n=0 \quad l=1$$



$$\begin{array}{cc} A_0 & A_1 \\ \parallel & \parallel \\ \dot{A} & X \setminus B \end{array}$$

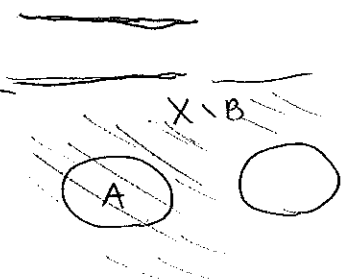
$$1 - \frac{R}{2^n}$$

$$R = 0 \Rightarrow 1$$

$$R = 2^n \Rightarrow 0$$

$$A_k \setminus A_{k-1}$$

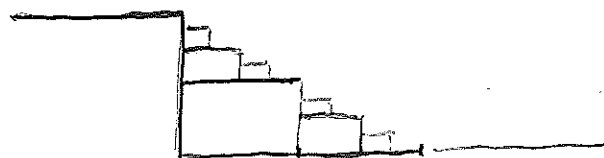
$$k=0 \quad A_0 \setminus \emptyset = A_0$$



$$\begin{aligned} \star \quad |f(x) - f_n(x)| &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \left[1 + \frac{1}{2} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot 2 = \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

$$1 \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array} \right) x$$

$$\left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 8 \end{array} \right) x$$



Ma f_n , su un dato gradino $di \frac{1}{2^n}$, non varia più di

$\frac{1}{2^n}$, pertanto f , sullo stesso gradino,

non varia più di $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$ (dis. triangolare)

Sia ora $\varepsilon < \frac{1}{2^{n-1}}$ sia $\alpha_0 \in$ gradino $di \frac{1}{2^n}$
(aperto) $\tilde{U}$

Si ha $|f(x) - f(\alpha_0)| < \varepsilon \quad \forall x \in \tilde{U}$

e ciò vale $\forall$ intorno di α_0 contenuto nel gradino.

Da cui la conclusione $\square$

★ Lemma di estensione di Tietze

X spazio topologico normale . Sia $f : A \rightarrow [a, b]$
continua su A chiuso . Allora $\exists F : X \rightarrow [a, b]$
t. che $F|_A = f$

Sia $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua e limitata su A

$$\text{Sia } \delta := \sup_{a \in A} |\varphi(a)|$$

$$\text{Sia } \underline{\Phi} : X \mapsto [-\delta/3, \delta/3] : x$$

$$\forall a \in A \text{ vale } |\varphi(a) - \underline{\Phi}(a)| \leq \frac{2}{3} \delta$$

$\underline{\Phi}$ si dice minore approssimata $\frac{1}{3}$ -chiusa

Esso esiste per Urysohn: $\varphi^{-1}([\frac{\delta}{3}, \delta])$ e $\varphi^{-1}([- \delta, -\frac{\delta}{3}])$

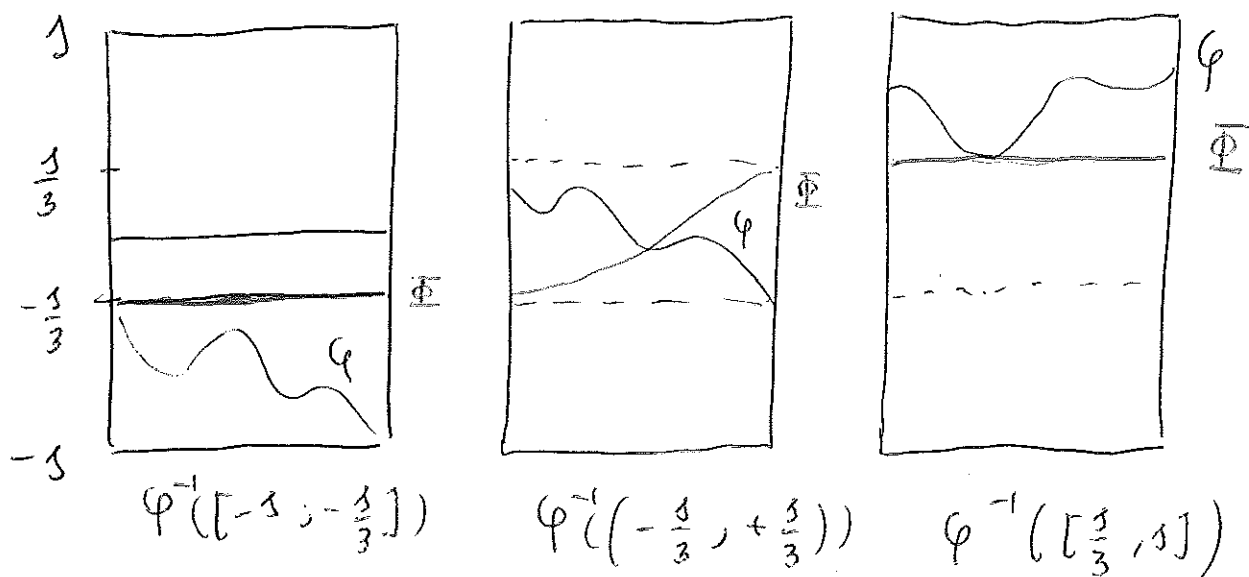
Sono chiusi e disgiunti in A e in X (A chiuso)

$\Rightarrow \exists f$ continua $X \rightarrow [0, 1]$ che li separa,

che si modifica ad una $\underline{\Phi} : X \rightarrow [-\frac{\delta}{3}, \frac{\delta}{3}]$

continua, che vale $\frac{\delta}{3}$ su $\varphi^{-1}([\frac{\delta}{3}, \delta])$ e

$-\frac{\delta}{3}$ su $\varphi^{-1}([- \delta, -\frac{\delta}{3}])$



Sia $[a, b] = [-1, 1]$ (non si perde in generalità)
 $\delta = 1$

Sia F_1 funzione $\frac{1}{3}$ -chiusa di f .

Sia $f - F_1|_A$ consideriamo F_2 : $\frac{1}{3}$ chiusa.

ecc. otteniamo

F_{n+1} : $\frac{1}{3}$ -chiusa di $f - (F_1 + F_2 + \dots + F_n)|_A$

$$e \quad \left| f(a) - \sum_{k=1}^n F_k(a) \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n \quad \forall a \in A$$

$$\left| F_{n+1}(x) \right| < \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3} \right)^n \quad \forall x \in X$$

$\Rightarrow$ la funzione $F := \sum_{k=1}^{\infty} F_k$ (limite uniforme)

$\tilde{f}$ continua, $F: X \rightarrow [-1, 1]$ e $F|_A = f$

** Corollario : al posto di $[a, b]$ si può prendere $\mathbb{R}$
 (in gen $\mathbb{R}^n$ ecc)
 Dunford & Schwartz

Sia data f . Sia $\varphi := \arctan f : A \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

(l'immagine è compresa in un intervallo chiuso)

* Studiamo φ con Tietze.

Vorremmo prendere $F \stackrel{?}{=} \tan \Phi$

ma Φ può assumere i valori $\pm \frac{\pi}{2}$, tuttavia ciò accade su un B chiuso e disgiunto da A .

Per Urysohn trova $\lambda : X \rightarrow [0, 1]$ con
continua

$\lambda|_A = 1$, $\lambda|_B = 0$ e prendo

$$F = \tan(\lambda \Phi) \quad \square$$

★ Para compatta (Dieudonné)

X sp. topologico è detto para compatto
 se ogni ricoprimento aperto $\mathcal{U}$ ammette
 un raffinamento $\mathcal{V}$ localmente finito

raffinamento:
 ogni $V \in \mathcal{V}$
 è contenuto in
 un $U \in \mathcal{U}$

[$\mathcal{Y}$ famiglia di s. insieme di uno sp. topologico
loc. finito: ogni pto $p \in X$ ammette $U_p \ni p$
 intorno che interseca un # finito di insiemi di $\mathcal{Y}$]

Nota: X compatto $\Rightarrow X$ para compatto
 (vedremo tra poco che $\nleftrightarrow$)

Teorema: X sp. top. loc. compatto, Hausdorff,
 2° assioma di numerabilità

|| Allora ogni $\mathcal{U}$ possiede $\mathcal{V}$ loc. finito ed è
numerabile. In particolare X è para compatto

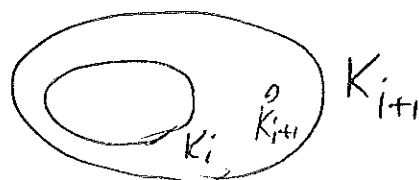
[Ad esempio, le var. diff. sono para compatte

$\mathbb{R}$ è allora para compatto ma non compatto $\square$]

Dim. Osserviamo intanto che X sp. top. loc comp,

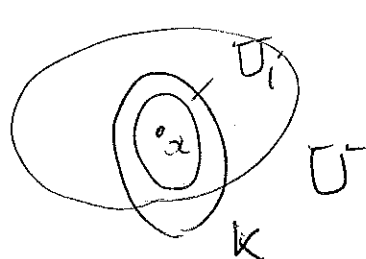
Hausdorff, 2° assioma di numerabilità:

$$\Rightarrow X = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i, \quad K_i \subset K_{i+1}^{\circ} \quad \text{interna } \circ$$



Infatti sia $\{U_i\}_{i=1,2,\dots}$ una base numerabile

di X . Sia $\bar{U} \subset X$, $\bar{U}$ aperto, con $x \in \bar{U}$



Sia K compatto, $K \ni x$

Esiste U_i t.c. $U_i \subset U \cap K_i^{\circ}$

U_i è relativamente compatto: infatti $\overline{U_i} \subset K$,

e, se vale $\mathcal{H}$, un chiuso $\subset$ compatto è compatto

Quunque $\overline{U_i}$ è compatto.

Quunque $\{U_i\}$ è una base, U_i rel. comp.

... Possiamo allora in questo caso.

Allora, $\forall i$, $\overline{U_i}$, compatto, può essere ricoperto con un # finito di U_j , e $\overline{\bigcup U_j} \equiv H_i$
 compatto

$$\overline{\bigcup_{\text{finito}} U_j} = H_j \subset \bigcup_{\text{finito compatto}} \overline{U_j} \quad \text{compatto}$$

H_j chiuso $\subset$ compatto $\Rightarrow H_j$ compatto.

$$\overline{U_i} \subset \overset{\circ}{H_i} \quad \text{e} \quad X = \bigcup_i \overset{\circ}{H_i}$$

Sia $K_0 = H_1$, e successivamente

$$K_{i+1} = \bigcup_{j \in J(i)} H_j$$

$$\text{con } K_i \subset \bigcup_{j \in J(i)} H_j$$

$\Rightarrow \{K_i\}$ ha le proprietà richieste

Riprendiamo la dim.

$$X = \bigcup K_i \quad K_i \subset K_{i+1}^\circ$$

Se $i \geq 0$,

$$V_i = \left\{ (K_{i+2}^\circ \setminus K_{i+1}) \cap U ; U \in \mathcal{U} \right\}$$

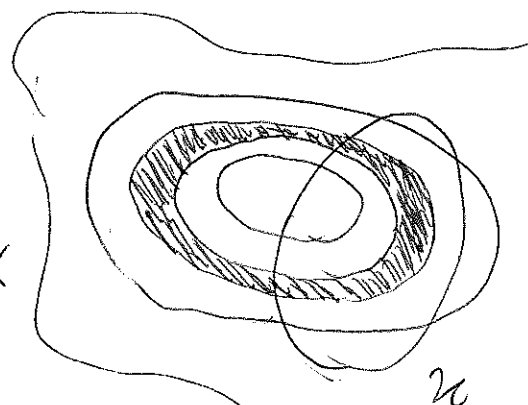
($K_j = \emptyset$ se $j \leq 0$) ricopre $K_{i+1} \setminus K_i^\circ$

che è compatto poiché chiuso in K_{i+1}

V_i possiede un sottoc. $\{ V_{i1} \dots V_{i\alpha(i)} \}$ di

$K_{i+1} \setminus K_i^\circ$. Ma

$$\bigcup_{i \geq 0} [K_{i+1} \setminus K_i^\circ] = X$$



di cui $\mathcal{V} = \left\{ V_{ih} , \begin{matrix} i = 0, 1, \dots \\ 1 \leq h \leq \alpha(i) \end{matrix} \right\}$

ricopre X , ed è numerabile.

$\mathcal{V}$ è più fine di $\mathcal{V}_i$.

Infine, dato $x \in X$,

$$\exists i \geq 1 \text{ t.c. } x \in K_i$$

$$\text{Si ha: } K_{i+1}^\circ \ni x \text{ e}$$

$$K_{i+1}^\circ \cap \overline{V}_{jh} = \emptyset \quad \forall j \geq i+2$$

$\Rightarrow K_{i+1}^\circ$ interseca solo un numero finito

di aperti di V .

*** In definitiva, V è un raffinamento
localmente finito di $\mathcal{U}$. $\square$

★ Partizioni dell'unità

X sp. topologico, $p: X \rightarrow \mathbb{R}$ continua
+ chiusa

$$\text{supp}(p) = \{x \in X : p(x) \neq 0\}$$

supporto di p .

Sia $\{S_\alpha\}_{\alpha \in A}$ fam. di sottosinsiemi di X

essa è detta localmente finita se $\forall x \in X$,

$\exists U_x$ tale che $S_\alpha \cap U_x \neq \emptyset$ solamente
intorno (vp) di x

per un numero finito di α .

★ partizione dell'unità: Sia X una var. differenziabile
una part. dell'unità è una famiglia di $f: C^0$

$$\{p_\alpha: X \rightarrow \mathbb{R}\}_{\alpha \in A} \quad p_\alpha \text{ non negativa d.l.n.}$$

a) $\{\text{supp } p_\alpha\}$ è localmente finita

b) $\sum_\alpha p_\alpha(x) = 1 \quad \forall x \quad [\text{la somma è finita}]$

$\{p_\alpha\}$ si dice subordinata ad $\mathcal{U}$, ric. aperto,
 se $\forall \alpha \in A, \exists U \in \mathcal{U}$ tale che $\text{supp}(p_\alpha) \subset U$.

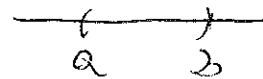
Costruzione di partizioni dell'unità:

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$$

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$



se $a < b$, sia ψ :



$$\psi(x) = \varphi(x-a) \varphi(b-x)$$

positiva in (a,b)
 nulla altrove

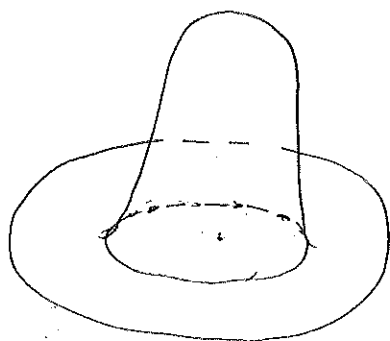
$$\zeta(x) := \frac{\int_{-\infty}^x \psi(t) dt}{\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt}$$

$\zeta \in C^\infty$

$$\zeta(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ 0 < \zeta(x) < 1 & x \in (a,b) \\ 1 & x \geq b \end{cases}$$

combiniamo ora la f. radiale

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} (-\|x\| + a + b)$$



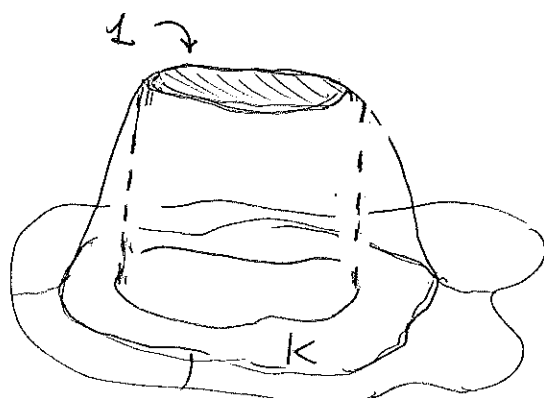
$$g(x) = \begin{cases} 1 & \|x\| \leq a \\ 1 > g(x) > 0 & a < \|x\| < b \\ 0 & \|x\| \geq b \end{cases}$$

★ Lemma $U \subset \mathbb{R}^N$, $K \neq \emptyset$ compatto, $K \subset U$.

$\exists f: \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , $\text{supp}(f) \subset U$ compatto

$$f(\mathbb{R}^N) \subseteq [0, 1]$$

tale che $f(x) = 1 \quad \forall x \in K$



supp f

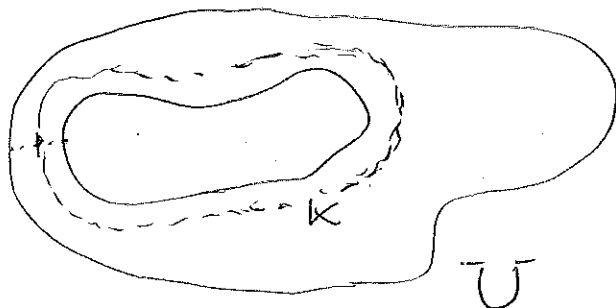
U

VIII-28

Se $U \neq \mathbb{R}^N$

Se $a = 0$

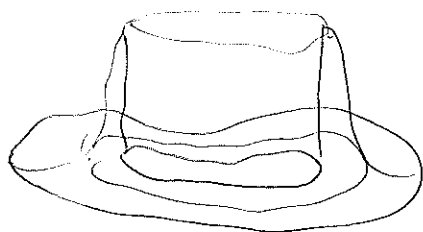
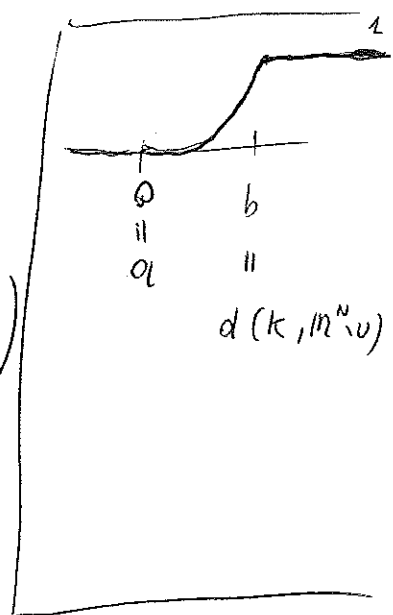
$$b = \frac{\overbrace{d(K, \mathbb{R}^N \setminus U)}^{\text{distance}}}{2}$$



$\mathbb{R}^N \setminus U$
è chiuso

$$f(x) = \begin{cases} d(x, \mathbb{R}^N \setminus U) - b \end{cases}$$

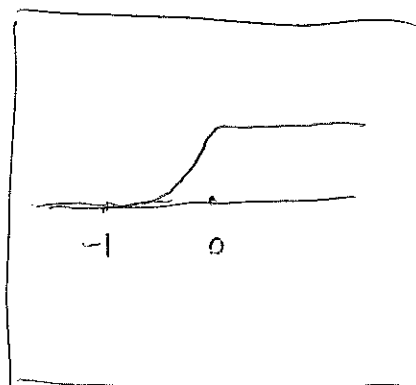
$$= \begin{cases} d(x, \mathbb{R}^N \setminus U) - \frac{d(K, \mathbb{R}^N \setminus U)}{2} \end{cases}$$



Se $U = \mathbb{R}^N$, si pone $a = -1$ $b = 0$



$$f(x) = \begin{cases} -d(x, K) \end{cases}$$



* Teorema, X sp. topologico di Hausdorff

X è paracompatto $\Leftrightarrow$ ogni ricoprimento
aperto ammette una partizione dell'unità
a questo subordinata

$\Leftarrow$ X è banale : se $\{\tau_\alpha\}$ è una part. dell'unità
subordinata ad un ricoprimento $\mathcal{U}$,

posto $V_\alpha := \{x \in X \mid \tau_\alpha(x) \neq 0\}$, i V_α

danno vita ad un raffinamento localmente finito.

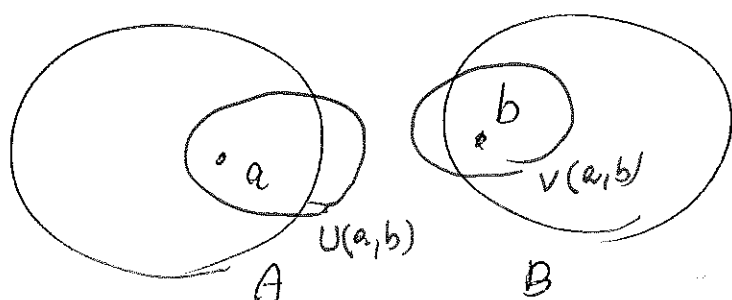
Se X è H , localmente compatto, e l'unione
di una famiglia numerabile di sottospazi, allora
è paracompatto ($\Rightarrow$ le varietà sono paracompatte)

$\Rightarrow$ Mostriamo che se X è paracompatto

* Vale il lemma di Urysohn, e utilizziamo
quest'ultimo per costruire partizioni dell'unità.

* Urysohn: Siano A, B chiusi, disgiunti.
(normalità)

Proviamo $U \supset A, V \supset B$ aperti e disgiunti.



Proviamo

$$U(a,b), V(a,b)$$

$$\downarrow$$

$$U(a,b) \cap V(a,b) = \emptyset$$

Sia a fisso. Separiamo a e B ...

Sia $\{V(a,b)\}_{b \in B} \cup X \setminus B$ e prendiamone

un raffinamento localmente finito. Sia

$$\tilde{U}(a) = \bigcup \{ \text{insiemi } U_i \subset V(a,b) \text{ per qualche } b \}$$

$\exists$ allora un intorno aperto $\tilde{U}(a)$ di a che interseca solo un numero finito di tali insiemi, siano

$$U(a,b_1) \dots U(a,b_r) \dots$$

Definiamo allora

$$U(a) = \tilde{U}(a) \cap U(a,b_1) \dots \cap U(a,b_r)$$

Questo sarà disgiunto da $V(a)$

Ora continuiamo

$$\{ U(a) \}_{a \in A} \cup X \setminus A$$

e scegliamo un raffinamento localmente finito

$$U = \bigcup \{ \text{insiemi di } U \mid \exists a \in A \text{ tale che } a \in U(a) \}$$

Dato $b \in B$, $\exists \bar{V}(b)$ che interseca un numero finito di insiemi di U .

Poniamo

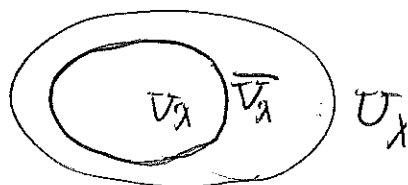
$$\bar{V} = \bar{V}(b) \cap V(a_1) \cap \dots \cap V(a_r)$$

$$\text{Si ha allora } U \cap \bar{V} = \emptyset \quad \checkmark$$

Ora dato $\mathcal{U} = \{ U_\alpha \}_{\alpha \in \Lambda}$, loc. finito (senza perdere in generalità).

$$\text{A Troviamo } \{ \bar{V}_\alpha \}, \quad \bar{V}_\alpha \subset U_\alpha$$

è cioè possibile



$$\text{basterà porre } \sigma_\alpha : X \rightarrow [0,1], \quad \sigma_\alpha|_{\bar{V}_\alpha} \equiv 1$$

$$\sigma_\alpha|_{X \setminus U_\alpha} \equiv 0 \quad (\text{Urysohn})$$

e massimo $\{\sigma_\alpha\}$ (loc. finita) : posto

$$\sigma = \sum_\alpha \sigma_\alpha \quad (\text{continua e positiva})$$

basta porre $\tau_\alpha := \frac{\sigma_\alpha}{\sigma} \dots$

X paracompatto $\Rightarrow X$ normale

X metrizabile $\Rightarrow X$ normale (Urysohn)

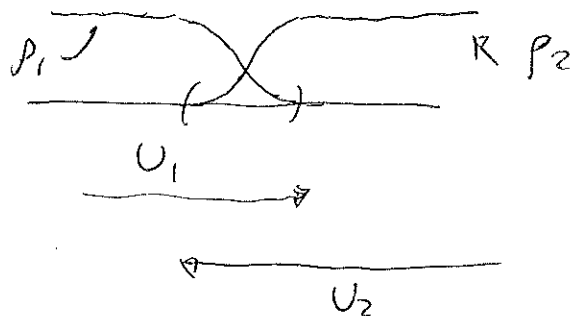
X, Y paracompatti $\not\Rightarrow X \times Y$ paracompatti

- questo perché normale $\times$ normale
 $\not\Rightarrow$ normale

Es:

$$\mathbb{R} = U_1 \cup U_2$$

$\{p_i\}_{i=1,2}$ partizione
 dell'unità
 subordinata a $\{U_i\}$



★ Teorema

Sia X var. diff

$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ v.c. aperto

v. anche la
Lezione

VIII-2

a) $\exists \{p_i\}_{i=1,2,\dots}$ sub. ad $\mathcal{U}$,

[numerabile!]

con $\text{supp } p_i \equiv K_i$ compatto

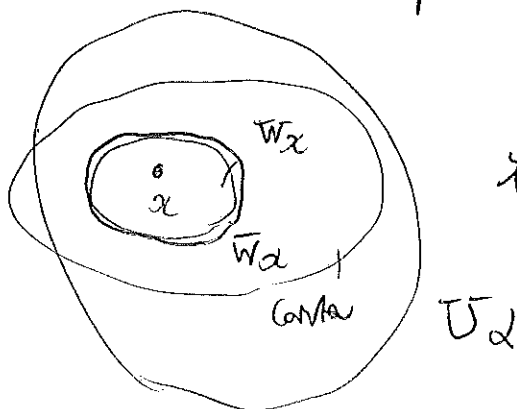
b) $\exists \{\psi_\alpha\}$, $\text{supp}(\psi_\alpha) \subset U_\alpha \quad \forall \alpha$,

ψ_α id. nulla ^{al più} ovunque che per un infinito num.

di indici

Dim. Sia $x \in X$. $\exists \bar{W}_\alpha \ni x$ con
aperto

$\bar{W}_\alpha$ compatto e contenuto in un aperto coordinatizzato
e anche in U_α per qualche α



Allora $\mathcal{W} = \{\bar{W}_\alpha\}_{\alpha \in I}$

è un raffinamento di $\mathcal{U}$

Ma X è Hausdorff, loc. compatto, soddisf.
il 2° assioma di numerabilità

$\Rightarrow$
 W possiede un rff. numerabile
localmente finito

(v.)

$$\mathcal{V} = \{V_i : i=1,2,\dots\}$$

Sicché, per ogni i , si ha

$$\overline{V_i} \subset B_i \cap U_\alpha, \quad \overline{V_i} \text{ compatto}$$

dominio di una carta $\varphi_i: B_i \rightarrow \mathbb{R}^n$
aperto coordinatizzato

Sia

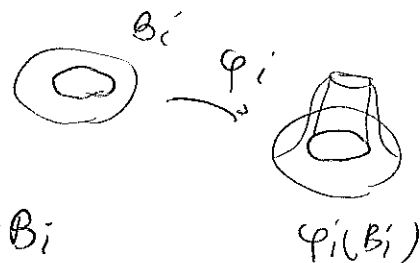
$$\varphi_i: B_i \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ carta locale}$$

$\exists f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, C^∞ , $\text{supp } f_i \subset \varphi_i(B_i)$ con

$$f_i(x) = 1 \quad \forall x \in \varphi_i(\overline{V_i})$$

Si pone

$$\sigma_i(x) = \begin{cases} f_i \circ \varphi_i(x) & x \in B_i \\ 0 & x \notin B_i \end{cases}$$



$$\sigma_i \in \mathcal{C}^b$$

ora $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i$ è ben def. poiché
 $\mathcal{V}$ è loc. fin.

$\sigma_i \geq 0$ e $\forall \alpha \in X$, $\exists i$ tale che

$\sigma_i(\alpha) \neq 0$, e pertanto

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i(\alpha) > 0 \quad \forall \alpha.$$

Si può allora porre

$$p_i(\alpha) = \frac{\sigma_i(\alpha)}{\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j(\alpha)}$$

e questa è la part. dell'unità cercata.

b) Trovata $\{p_i\}$, fissata i , sia $\alpha(i) \in A$

tale che $\text{Supp}(p_i) \subset U_{\alpha(i)}$

Sia $\psi_\alpha \equiv 0$ se $\alpha \neq \alpha(i) \quad \forall i=1,2,\dots$

altrimenti definiamo

$$\psi_\alpha = \sum_{\alpha(i)=\alpha} p_i$$

$\{\psi_\alpha\}$ è una part. dell'unità, e di più ha l'imp. numerabile delle ψ_α non è nulla

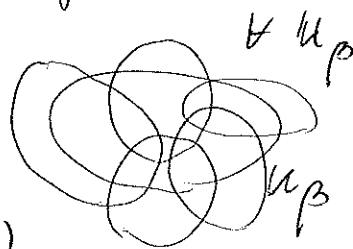
Inoltre $\forall \alpha \in A$,

$$\text{Supp}(\psi_\alpha) \subset \overline{\bigcup_{\alpha=\alpha(i)} \text{Supp}(p_i)}$$

ma $\{\text{Supp}(p_i)\}$ è loc. finit. chiuso $(\text{Supp}(p_i) \cap \bar{U}_\beta \neq \emptyset$ per un numero finito di indici i

$\Rightarrow$

$$\overline{\bigcup_{\alpha=\alpha(i)} \text{Supp}(p_i)} \equiv \bigcup_{\alpha=\alpha(i)} \text{Supp}(p_i)$$



[In generale $\bigcup_{\alpha \in A} \text{chiusi}$ non è un chiuso]

Donc $\text{Supp } \psi_\alpha \subset U_\alpha$

sicché $\{\psi_\alpha\}$ è subordinata a $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$



Le ψ_α non hanno supporto compatto in generale!

X non compatto $\mathcal{U} = \{X\}$

ψ_X ha supporto in $X \dots$