Elementi di Topologia
Lez. III
Prof. M. Spera
Dottorato in Informatica
a.a. 2008/09

✶ La sfera di Bloch | rivisitata

Sia $\mathcal{H}$ sp. vett. hermitiano, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{H} = 2$ [= ovviamente di Hilbert]

$(|0\rangle, |1\rangle)$ base ortonormale

✶ notazione di Dirac

Consideriamo $\mathbb{P}(\mathcal{H}) \approx \{ \psi \in \mathcal{H} / \|\psi\| = 1 \} / \sim$

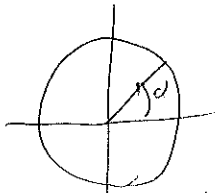
dove $\sim$: $\psi_1 \sim \psi_2 \iff \psi_2 = \underbrace{e^{i\alpha}}_{\text{fase } |\cdot| = 1} \psi_1$

Si ha $\mathbb{P}(\mathcal{H}) = \{ z_0 |0\rangle + z_1 |1\rangle / |z_0|^2 + |z_1|^2 = 1 \} / \sim$

S^3

v. anche oltre pag III - 16

$\mathbb{P}(\mathcal{H}) \approx S^3 / S^1$



Poniamo $z_0 = \cos(\frac{\vartheta}{2}) |0\rangle$ ← impongo che questo vettore abbia coeff. reale.

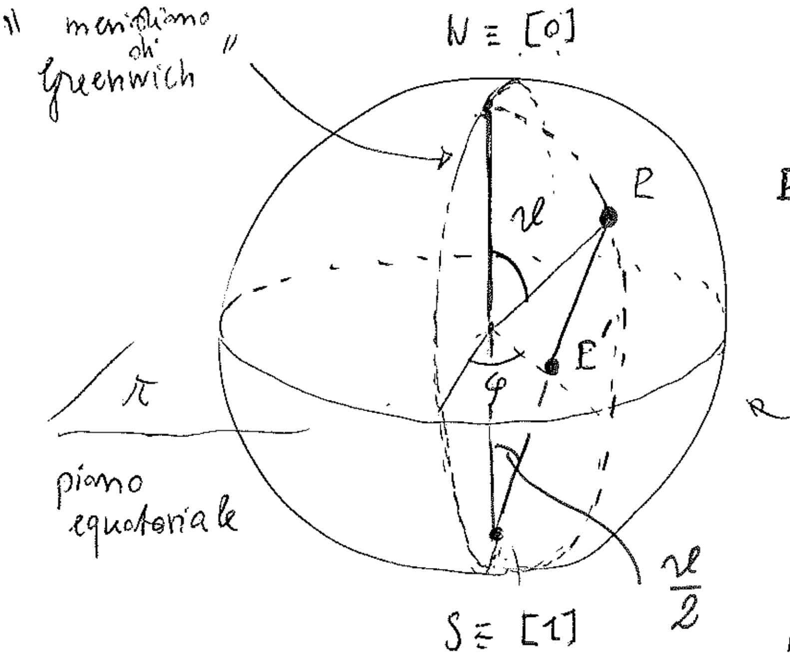
$z_1 = \sin(\frac{\vartheta}{2}) \cdot e^{i\varphi} |1\rangle$

$$z = \frac{z_1}{z_0} = \boxed{\tan \frac{\vartheta}{2} \, e^{i\varphi}}$$

se $z_0 \neq 0$

★ Interpretazione geometrica: proiezione stereografica

coordin. sferiche



$P: (\sin\vartheta\cos\varphi, \sin\vartheta\sin\varphi, \cos\vartheta)$

← $x^2+y^2+z^2=1$

$\boxed{\text{* proiezione stereografica da } S \equiv |1\rangle}$

* retta SP:

$$\begin{cases} x = t \sin\vartheta\cos\varphi \\ y = t \sin\vartheta\sin\varphi \\ z = -1 + t\,[\cos\vartheta + 1] \end{cases}$$

$P' = SP \cap \pi \qquad z_{P'} = 0 \quad \Rightarrow$

$$t = \frac{1}{1+\cos\vartheta} \quad \Rightarrow \quad P' = \Big(\underbrace{\frac{\sin\vartheta\cos\varphi}{1+\cos\vartheta}}_{x}, \underbrace{\frac{\sin\vartheta\sin\varphi}{1+\cos\vartheta}}_{y}, 0 \Big)$$

$$\text{ma} \quad \frac{\sin\vartheta}{1+\cos\vartheta} = \frac{\cancel{2}\sin\frac{\vartheta}{2}\cancel{\cos\frac{\vartheta}{2}}}{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}}\frac{\vartheta}{2}} = \tan\frac{\vartheta}{2}$$

$\Rightarrow \boxed{P' \equiv |\psi\rangle}$

$\left(z = e^{i\varphi}\tan\frac{\vartheta}{2} \right)$

☆ Sulla condizione di Hausdorff

X, spazio topologico, è di Hausdorff $\Leftrightarrow$

$$\underset{\text{diagonale}}{\Delta} = \{ (x,x) \mid x \in X \} \subset X \times X$$

è chiusa [nella topologia prodotto su $X \times X$]

$(\Rightarrow)$ Mostriamo che $X \setminus \Delta$ è aperto.

Sia $(x,y) \in X \setminus \Delta$: è $x \neq y$.

Siano $U \ni x$, $\bar{V} \ni y$ intorni disgiunti di x e y $(U \cap V = \emptyset)$. Ma allora essi non possono contenere elementi di Δ: se $(\tilde{x}, \tilde{x}) \in \Delta$, $\tilde{x} \in \bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$, assurdo. $U \times \bar{V}$ è allora un intorno di (x,y) contenuto in $X \setminus \Delta$, che pertanto è aperto.

$(\Leftarrow)$ $X \setminus \Delta$ è aperto. Dato dunque $(x,y) \in X \setminus \Delta$ (i.e. $x \neq y$) $\exists\ X \setminus \Delta \supset U \times \bar{V} \ni (x,y)$ e dunque è $U \cap \bar{V} = \emptyset$ $\Rightarrow$ X è Hausdorff.

Più in generale

★★ **Teorema**: le seguenti condizioni sono equivalenti

(i) X è Hausdorff

(ii) i limiti sono unici
[nessuna rete o filtro converge a più di un limite]

(iii) $\Delta = \{ (x,x) / x \in X \}$ è chiusa in $X \times X$

Dim.

(i) ⇒ (ii) ((con i filtri) se X è T_2 e $\mathcal{Y}$ è un filtro su X

[$\mathcal{Y}$ = famiglia di sottoinsiemi non vuoti t. ch. $A \in \mathcal{Y}$, $B \in \mathcal{Y} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{Y}$
filtro — e se $F \in \mathcal{Y}$ e $F \subset F'$, allora $F' \in \mathcal{Y}$]

sia $\mathcal{Y} \to x$ e $\mathcal{Y} \to y$ ma allora $U \ni x$, $V \ni y$ (intorni) sono tali che $U \in \mathcal{Y}$, $V \in \mathcal{Y}$

$(\mathcal{U}_x \subset \mathcal{Y})$
↑ filtro degli intorni

$\Rightarrow U \cap V \in \mathcal{Y} \Rightarrow U \cap V \neq \emptyset$

assurdo per la cond. T_2.

(ii) ⇒ (iii) ((con le reti). Se Δ non è chiusa,

$\exists \; (x_\lambda, x_\lambda) \to (x, y)$ per qualche $x \neq y$.

$\Rightarrow x_\lambda \to x$, $x_\lambda \to y$ (assurdo)

($\forall \; U \ni x$ $\exists \; \lambda_0 \in \Lambda$ t. che $\lambda \succeq \lambda_0 \Rightarrow x_\lambda \in U$)
↑ direzione
non è nec. un ordine

rete: $\{ x_\lambda \}_{\lambda \in \Lambda}$
Λ insieme diretto
$(\lambda \mapsto x_\lambda \in X$

(iii) ⇒ (i) se Δ è chiusa, $X \setminus \Delta$ è aperto

$\Rightarrow$ se $(x,y) \notin \Delta$, $\exists \; U \times V \ni (x,y)$ contenuto in $X \setminus \Delta$

$\Rightarrow U \cap V = \emptyset$.

Una relazione di equivalenza su X è detta aperta se $A \subset X$ aperto $\Rightarrow$ $[A]$ aperto

$([A] = \{ y \in X \,/\, y \sim a$ per qualche $a \in A \})$ $\equiv \bigcup_{a \in A} [a] = \bigcup_{a \in A} \pi(a) = \pi(A)$

ovviamente $[A] \supseteq A$

$$\boxed{\sim \text{ è aperta } \Longleftrightarrow \pi : X \to X/\sim \text{ è aperta}}$$

$\pi : x \mapsto [a]$ è continua, visto come s.ins. di X !!

$= \pi(x) = \{ y \in X \,/\, y \sim x \}$

Ora, $[A] = \pi(A)$ [e anche $[A] = \pi^{-1}(\pi(A))$ $\Rightarrow$ π aperta $\Rightarrow$ $\pi(A)$ aperto $\Rightarrow$ $[A]$ aperto ; vic. se $[A]$ è aperto $\pi(A)$ è ap. per def.] v. Boothby

$\Rightarrow$ se π è aperta, A aperto $\Rightarrow$ $\underset{[A]}{\overset{}{\pi(A)}}$ aperto

$$\pi(A) = [A]$$

Viceversa, se A aperto $\Rightarrow$ $[A]$ aperto, ovvero ...

$A \quad = \quad \Rightarrow \pi(A)$ aperto.

Se X è a base numerabile e π è aperta, $X/\sim$ è pure a base numerabile.

(Importante)

$\mathcal{B}$ base numerabile $B \in \mathcal{B} \Rightarrow \pi(B)$ aperto

i $\pi(B)$ formano la base richiesta. ($W \subset X/\sim$ aperto.

$\pi^{-1}(W)$ aperto $\pi^{-1}(W) = \bigcup U_i$, $U_i \in \mathcal{B}$.

Ma $W = \pi(\pi^{-1}(W)) = \bigcup \pi(U_i)$ ...

☆ $\pi : X \to X/G$ è aperta

$(G \subset \mathrm{Omeo}(X))$ [se G è finito è pure chiusa]

Sia $A \subset X$. È

$$\pi^{-1}[\pi(A)] = \cup\{g(A) / g \in G\}$$

$$= \bigcup_{g \in G} g(A)$$

ma $g(A)$ è aperto $\forall g$ (g è omeo)

$\Rightarrow$ $\pi^{-1}[\pi(A])$ è aperto,

|| ma allora $\pi(A)$ è aperto per definizione.

★ Teorema. Sia X Hausdorff e $\sim$ aperta.

$X/\sim$ è Hausdorff $\Longleftrightarrow$

$\Delta_\sim \equiv R := \{(x,y) \mid x \sim y\}$ $\qquad \pi : X \to X/\sim$

è chiuso in $X \times X$

Dim. $(\Rightarrow)$ $X/\sim$ è T_2; siano $\begin{array}{l} U \ni \pi(x) \\ \qquad \nparallel \\ V \ni \pi(y) \end{array}$ disgiunti

Si ponga

$$\begin{array}{c} \hat{U} = \pi^{-1}(U) \\ \cup\!\!| \\ x \\ y \\ \cap\!\!| \\ \tilde{V} = \pi^{-1}(V) \end{array}$$

aperti

ma allora

$\hat{U} \times \tilde{V} \ni (x,y)$ e non interseca R.

altrimenti $\exists\ (x', y')$ t.c. $\underset{\substack{\in \\ U}}{\pi(x')} = \pi(y') \in V$

contro l'ipotesi che $U \cap V = \phi$.

$(\Leftarrow)$ Dati $\overset{\pi(x)}{\overset{\shortparallel}{[x]}}$ e $\overset{\pi(y)}{[y]} \in X/\sim$. Si consideri

$(x,y) \in \underset{\text{aperto}}{\tilde{U} \times \tilde{V}} \subset X \setminus R$ $\quad$ ($X \setminus R$ è aperto)

si ha $U = \underset{\text{aperto}}{\pi(\tilde{U})} \ni [x]$ $\quad V = \pi(\tilde{V}) \ni [y]$ $\quad$ [π è aperta]

e $U \cap V = \phi$

☆ G gruppo topologico (coesistono una struttura di gruppo e una topologia)

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (g, h) &\longmapsto g \cdot h \end{aligned}$$

si richiedono continue

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ g &\longmapsto g^{-1} \end{aligned}$$

$R_h : G \to G$

$R_h(g) = gh$ "traslazione destra" "moltip. destra"

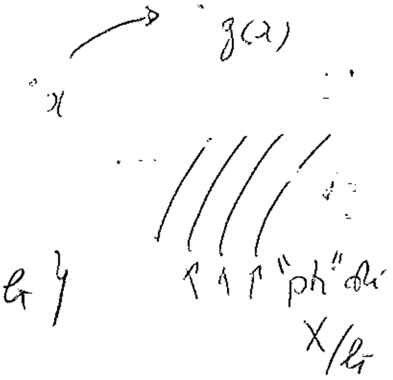
$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] & G \times G \arrow[r] & G \\ g \arrow[r, "\uparrow \text{continua}"'] & (g, h) \arrow[r, "\uparrow \text{continua}"'] & gh \end{tikzcd}$$

R_h è di fatto un omeomorfismo (inverso continuo: $R_{h^{-1}}$)

Es:
- Ogni gruppo, dotato di τ_d, è gr. top.
- $GL(n, \mathbb{R})$ è un gruppo topologico (top. quella di $\mathbb{R}^{n^2}$. Le operazioni sono continue)

☆ **Teorema** X spazio topologico

$G \subset \mathrm{Omeo}(X)$ gruppo



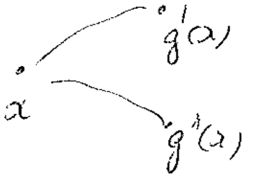
X/G è Hausdorff $\iff$

spazio delle orbite dell'azione di G su X

$K = \{ (x, g(x)) \mid x \in X, g \in G \}$

$G\cdot x$ orbita di x

è chiuso (nel prodotto)



Dim

proiezione canonica

$\pi : X \to X/G$ è aperta (e suriettiva)

e così $p : (x, y) \longmapsto p(x,y) := (\pi(x), \pi(y))$

(è un'identificazione ($f: X \to Y$ aperti di $Y \iff f^{-1}(A)$ aperto di X)

$p(x,y) \in \Delta \iff (x,y) \in K$ (i.e. $x, y \in$ stessa orbita)

$p^{-1}(\Delta) = K$ e Δ è chiusa $\iff K$ è chiuso.

Es: $\underbrace{\mathbb{R}^n / GL(n, \mathbb{R})}$ non è di Hausdorff:

da intendersi: spazio delle orbite di $GL(n,\mathbb{R})$

A

$\begin{pmatrix} \lambda & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \quad \lambda \neq 0$

$e_1 \longmapsto \lambda e_1$

$\mathbb{R}^n$

$\Downarrow$

$K = \{(\underline{0}, \underline{0})\} \cup \{(e_1, v)\}_{v \neq 0}$

che non è chiuso: ex $(e_1, \underline{0})$ è pto di accumulazione di K ma non gli appartiene.

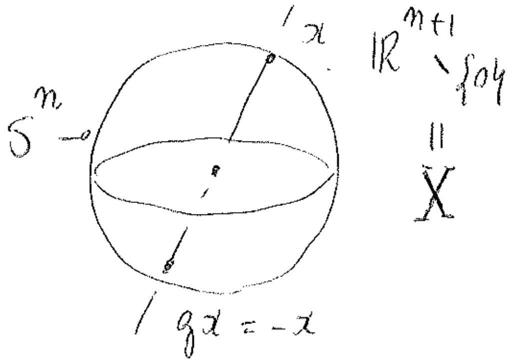
☆ Variante: si usa il teorema precedente

$\sim$: $x \sim y \iff y = g \cdot x$ per qualche $g \in G$

$\sim$ è una relazione aperta [$x \sim y \iff$ appartengono alla stessa orbita]

Esempio: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ Sp. proiettivo reale

(I)



$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n/\Gamma \qquad \Gamma = \mathbb{Z}/_2$$

$$g: \underset{\substack{\cap \\ S^n \\ \|x\|=1}}{x} \longmapsto g\cdot x \equiv -x$$

mappa antipodale

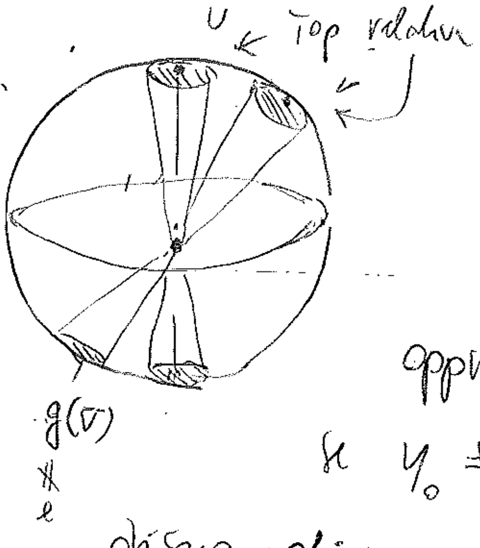
$$x \sim y \iff y = \pm x \qquad \begin{pmatrix} x_0 & \text{———} & x_n \\ y_0 & \text{———} & y_n \end{pmatrix}$$

$\sim$ è una relazione aperta.

intuitivamente è chiuso

★ mostriamo che $R \equiv R_\sim$ è chiuso $\Rightarrow$ $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è T_2

ecco:



$$U \cap g(V) = \emptyset \quad \forall g \in \Gamma$$

oppure, analiticamente: se $y_0 \neq \pm x_0$, tale disuguaglianza persiste localmente...

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (II) $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$

$\sim$: $x \sim y$ se $x = t y$ $t \neq 0$

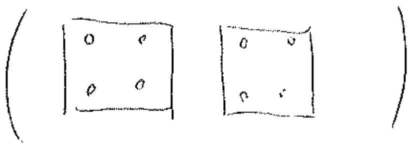
$\sim$ è ancora aperta. $G = \underset{\mathbb{R}\setminus\{0\}}{\underset{\|}{\mathbb{R}^*}}$ $x \mapsto g \cdot x = t x$

$R_\sim$ è chiuso: vediamolo così (Boothby) ☆

Sia
$$f : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto f(x,y) = \sum_{i \neq j} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

$$\begin{pmatrix} x_0 & \text{———} & x_n \\ y_0 & \text{———} & y_n \end{pmatrix} \begin{matrix} \neq 0 \\ \neq 0 \end{matrix}$$

minori 2×2 estratti



$f(x,y) = 0 \iff x = t y$ per qualche $t \neq 0$

f è continua

$\Rightarrow$ $R_\sim = f^{-1}(0)$

$\Rightarrow$ $R_\sim$ è chiuso (controimm. di un chiuso)

$$\pi : G \longrightarrow G/H$$

gruppo topologico

sottogruppo (top) di H

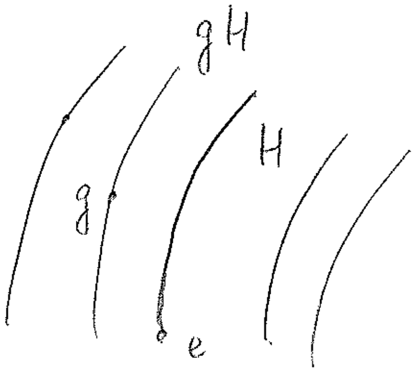
$$g \longmapsto [g] = \{ gh \,/\, h \in H \}$$

$$[g] \equiv gH$$

(classe laterale sinistra)
left coset

motivazione culturale
il programma di Erlangen di F. Klein (1872)

geometria $\longrightarrow$ proprietà invarianti rispetto ad un gruppo di trasformazioni



✩ spazio delle orbite di H, che agisce su G a destra

$$G \ni g \longmapsto g \cdot h \in G$$

$$\boxed{\pi \text{ è continua e aperta}}$$

✩✩ Dimostriamo che: G/H è Hausdorff $\Longleftrightarrow$ H è chiuso (in G)

Infatti, si consideri

$$F : G \times G \longrightarrow G$$
$$(x, y) \longmapsto y^{-1}x$$

F è continua e

$$F^{-1}(H) = \{ (x,y) \,/\, \underbrace{y^{-1}x}_{h} \in H \}$$
$$= \{ (x,y) \,/\, x \sim y \}$$

stessa orbita di H

$= \Delta_\sim$ che è chiusa $\Longleftrightarrow$ G/H è Hausdorff. □

$$\star \quad SU(2) = \{ U \in M_2(\mathbb{C}) \,/\, U^* U = U U^* = I, \ \underbrace{\det U = +1}_{} \}$$

gruppo unitario speciale di $\mathbb{C}^2$

senza questa) $U(2)$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{a}_{21} \\ \bar{a}_{12} & \bar{a}_{22} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \bar{A}^t = \overline{A^t}$$

antilineare nella prima variabile

$$U(2) \text{ conserva } \langle z, w \rangle = \bar{z}_1 w_1 + \bar{z}_2 w_2$$

$$\langle z, w \rangle = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

prodotto scalare Hermitiano

segue facilmente che $U = \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ $\quad (*)\ \boxed{|a|^2 + |b|^2 = 1}$ $\Updownarrow$ $\det U = 1$

base ortonormale di $\mathbb{C}^2$ (qubit)

sfera tridimensionale (in $\mathbb{R}^4$)

$$SU(2) \approx S^3$$

(è un gruppo di Lie)

$a = a_1 + i a_2$
$b = b_1 + i b_2$

$(*)$ diventa $\boxed{a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1}$

$$\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} \leftarrow\!\circ \ (a_1\, a_2\, b_1\, b_2)$$

biunivoca e bicontinua